2020—2021学年度第一学期其中检测试题

高 三 数 学

2020．11

（全卷满分150分，考试时间120分钟）

一、单项选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求)．

1. 已知复数z满足$(1-\mathrm{i})z=2$，i为虚数单位，则z等于(　　)

A．$1-\mathrm{i}$　　B．$1+\mathrm{i}$　　C．$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D．$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 已知集合$A=\{x\mid(x+1)(x-2)\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid\sqrt{x}<2\}$，则$A\cap B=$(　　)

A．$[-1,0]$　　B．$[0,1]$　　C．$(0,2]$　　D．$[0,2]$

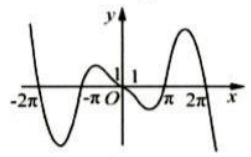
3. 已知$a=\log_{1.1}0.9$，$b=0.9^{1.1}$，$c=1.1^{0.9}$，则a,b,c的大小关系为(　　)

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

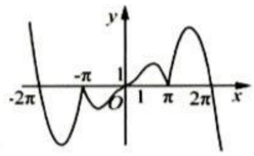
4. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x-5, & x\geq 6\\ f(x+2)+1, & x<6\end{cases}$，则$f(5)$的值为(　　)

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

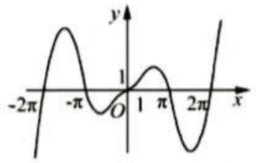
5. 函数$f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})\cdot\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$的图象大致为(　　)



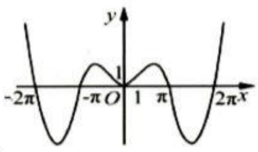
A．



B．



C．



D．

6. 在△ABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c．根据下列条件解三角形，其中有两个解的是(　　)

A．$a=8$，$b=10$，$A=45°$　　B．$a=60$，$b=81$，$B=60°$

C．$a=7$，$b=5$，$A=80°$　　D．$a=14$，$b=20$，$A=45°$

7. 我国古代数学家刘徽在《九章算术注》中提出了割圆术："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣"．这可视为中国古代极限思想的佳作．割圆术可以视为将一个圆内接正n边形等分成n个等腰三角形(如图所示)，当n变得很大时，等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积．运用割圆术的思想，可得到$\sin 2°$的近似值为(　　)(π取近似值3.14)

A．0.035　　B．0.026　　C．0.018　　D．0.033

8. 已知一个球的半径为3，则该球内接正六棱锥的体积的最大值为(　　)

A. $10\sqrt{3}$　　B. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$　　C. $16\sqrt{3}$　　D. $\frac{35\sqrt{3}}{2}$

二、多项选择题(本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分)

9. 下列命题中正确的是(　　)

A. 命题“$\forall x\in R$，$\sin x\le 1$”的否定是“$\exists x\in R$，$\sin x>1$”

B. “$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件

C. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$a^2+b^2>c^2$，则$\triangle ABC$为锐角三角形

D. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$\sin 2A=\sin 2B$，则$A=B$

10. 若函数$f(x)=\sin 2x$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到的图象对应的函数为$g(x)$，则下列说法中正确的是(　　)

A. $g(x)$的图象关于$x=\frac{5\pi}{12}$对称　　B. 当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$g(x)$的值域为$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

C. $g(x)$在区间$\left(\frac{5}{12}\pi,\frac{11}{12}\pi\right)$上单调递减　　D. 当$x\in[0,\pi]$时，方程$g(x)=0$有3个根

11. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(x+1)$为奇函数，且$f(2+x)=f(2-x)$，则(　　)

A. $f(1)=0$　　B. $f(x)=f(x+4)$

C. $f(x+1)=-f(-x-1)$　　D. $y=f(x)$在区间$[0,50]$上至少有25个零点

12. 已知正数x,y,z满足$3^x=4^y=6^z$，则下列说法中正确的是(　　)

A. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{z}$　　B. $3x>4y>6z$　　C. $x+y>(\frac{3}{2}+\sqrt{2})z$　　D. $xy>2z^2$

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知幂函数$y=f(x)$的图象过点$(2,\frac{1}{4})$，则曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$处的切线方程为________.

14. 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$AC=3$，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

15. 黄金比例，用希腊字母Φ表示，借用古希腊数学家欧几里德的话：当整条线段的长度与线段中较长段的比例等于较长段与较短段的比例时，就是根据黄金比例来分割一线段. 从下图我们可以更直观地感受黄金比例：

用A,B分别表示较长段与较短段的线段长度，于是将欧几里德的描述用代数方法表示出来：$\Phi=\frac{A}{B}=\frac{A+B}{A}$，从而可以解出$\Phi$的值. 类似地，可以定义其他金属比例. 假设把线段分成$n+1$段，其中有n段长度相等，记这n段的每一段长为A，而剩下的一段长为B（长度较短的）. 如果A与B之比等于整条线段的长与A之比，我们用λ_n来表示这个比例，即$\lambda_n=\frac{A}{B}$. 对于$n(n\in\mathrm{N}^*)$的每个值对应一个λ_n，则称λ_n为金属比例. 当$n=1$时，即为黄金比例，此时$\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$；当$n=2$时，即为白银比例，我们用希腊字母$\sigma$表示该比例，则$\sigma=$________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & x\le a\\ 4-x, & x>a\end{cases}$，其中 $a>0$，若函数 $g(x)=f(x)-3|x|$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是________________.

四、解答题（本大题共 6 小题，计 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

在① $a=\sqrt{2}$，② $S=\dfrac{c}{2}\cos B$，③ $C=\dfrac{\pi}{3}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并对其进行求解.

问题：在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，面积为 S，$\sqrt{3}b\cos A=a\cos C+c\cos A$，$b=1$，__________________，求 c 的值.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2 x+\sin(x+\dfrac{\pi}{3})\sin(x-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及对称中心；

(2) 若 $f(\alpha)=\dfrac{1}{6}$，且 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3})$，求 $\cos 2\alpha$ 的值.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a^{x+k}-a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\ne 1$）是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求实数 k 的值；

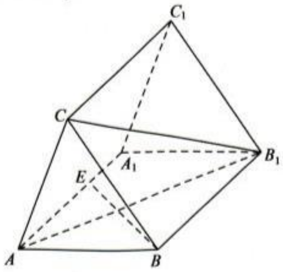
(2) 若 $f(1)<0$，且不等式 $f(3tx+4)+f(-2x^2+1)\le 0$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 成立，求实数 x 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 和 AA_1C_1C 均为菱形，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 AA_1C_1C，$\angle A_1AC=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle A_1AB=\dfrac{\pi}{4}$，$E$ 为棱 AA_1 上一点，$BE\perp AA_1$.

(1) 求证：$BE\perp A_1C_1$；

(2) 设 $AB=2$，求二面角 $B-CC_1-A$ 的余弦值.



21.（本小题满分 12 分）

某校从高二年级随机抽取了 20 名学生的数学总评成绩和物理总评成绩，记第 i 位学生的成绩为 (x_i, y_i)（$i=1,2,3,\cdots,20$），其中 x_i、y_i 分别为第 i 位学生的数学总评成绩和物理总评成绩. 抽取的数据列表如下（按数学成绩降序整理）：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学总评成绩 x	95	92	91	90	89	88	88	87	86	85
物理总评成绩 y	96	90	89	87	92	81	86	88	83	84
序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
数学总评成绩 x	83	82	81	80	80	79	78	77	75	74
物理总评成绩 y	81	80	82	85	80	78	79	81	80	78

(1) 根据统计学知识，当相关系数 $|r| \geq 0.8$ 时，可视为两个变量之间高度相关. 根据抽取的数据，能否说明数学总评成绩与物理总评成绩高度相关？请通过计算加以说明.

参考数据： $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=485$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2=678$，$\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=476$.

参考公式： 相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$.

(2) 规定：总评成绩大于等于 85 分者为优秀，小于 85 分者为不优秀. 对优秀赋分 1，对不优秀赋分 0，从这 20 名学生中随机抽取 2 名学生，若用 X 表示这 2 名学生两科赋分的和，求 X 的分布列和数学期望.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-mx-2$，$g(x)=e^x-\sin x-x\cos x-1$.

(1) 当 $x \geq \dfrac{\pi}{2}$ 时，若不等式 $f(x)>0$ 恒成立，求正整数 m 的值；

(2) 当 $x \geq 0$ 时，判断函数 $g(x)$ 的零点个数，并证明你的结论.

参考数据： $e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.8$