

§1.5 一元二次不等式及其解法

复习目标

1. 会从实际问题的情境中抽象出一元二次不等式模型.
2. 通过函数图象了解一元二次不等式与相应的二次函数、一元二次方程的联系.
3. 会解一元二次不等式.

课前热身

1. 判断对错:

- (1) 若不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则必有 $a>0$. ()
- (2) 若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 没有实数根, 则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$. ()
- (3) 不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的条件是 $a<0$ 且 $\Delta=b^2-4ac\leq 0$. ()
- (4) $\frac{x-a}{x-b}\geq 0$ 等价于 $(x-a)(x-b)\geq 0$. ()

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+4<0\}$, $B=\{x|x^2-x-6<0\}$, 则 $A\cap B=(\quad)$

A. $(-2, 3)$ B. $(1, 3)$ C. $(3, 4)$ D. $(-2, 4)$

3. (2020 大连质检) 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left\{x\mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right\}$, 则 $a-b$ 的值是 ()

A. -10 B. -14 C. 10 D. 14

4. 函数 $y=\log_2(3x^2-2x-2)$ 的定义域是_____.

5. 已知函数 $f(x)=ax^2+ax-1$, 若对任意实数 x , 恒有 $f(x)\leq 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

6. 若不等式 $x^2+ax+4<0$ 的解集不是空集, 则实数 a 的取值范围是_____.

知识梳理

典例研究

考点一 一元二次不等式的解法

例 1.(1)已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $B = \{-4, 1, 3, 5\}$, 则 $A \cap B$ 等于()

A. $\{-4, 1\}$

B. $\{1, 5\}$

C. $\{3, 5\}$

D. $\{1, 3\}$

(2)不等式 $\frac{1-x}{2+x} \geq 0$ 的解集为()

A. $[-2, 1]$

B. $(-2, 1]$

C. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

例 2. 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 2 \geq 2x - ax (a \in \mathbb{R})$.

考点二 一元二次方程与一元二次不等式

例 3. 已知不等式 $ax^2 - bx - 1 > 0$ 的解集是 $\{x | -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}\}$, 则不等式 $x^2 - bx - a \geq 0$ 的解集是_____.

考点三 一元二次不等式恒成立问题

例 4. (1) 对于任意实数 x , 不等式 $(a-2)x^2 - 2(a-2)x - 4 < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, 2]$

C. $(-2, 2)$

D. $(-2, 2]$

(2)设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1 (m \neq 0)$, 若对于 $x \in [1, 3]$, $f(x) < -m + 5$ 恒成立, 则 m 取值范围是_____.

(3)对任意 $m \in [-1, 1]$, 函数 $f(x) = x^2 + (m-4)x + 4 - 2m$ 的值恒大于零, 求 x 的取值范围.

课堂小结

跟踪反馈

1. 若 $0 < t < 1$, 则关于 x 的不等式 $(t-x)\left(x-\frac{1}{t}\right) > 0$ 的解集为()

- A. $\left\{x \mid \frac{1}{t} < x < t\right\}$ B. $\left\{x \mid x > \frac{1}{t} \text{ 或 } x < t\right\}$ C. $\left\{x \mid x < \frac{1}{t} \text{ 或 } x > t\right\}$ D. $\left\{x \mid t < x < \frac{1}{t}\right\}$

2. 已知函数 $f(x) = (ax-1)(x+b)$, 如果不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 3)$, 那么不等式 $f(-2x) < 0$ 的解集为()

- A. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3. (多选题) 下列说法正确的是()

- A. 不等式 $2x^2 - x - 1 > 0$ 的解集是 $\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$
B. 不等式 $-6x^2 - x + 2 \leq 0$ 的解集是 $\left\{x \mid x \leq -\frac{2}{3} \text{ 或 } x \geq \frac{1}{2}\right\}$
C. 若不等式 $ax^2 + 8ax + 21 < 0$ 的解集是 $\{x \mid -7 < x < -1\}$, 那么 a 的值是 3
D. 关于 x 的不等式 $x^2 + px - 2 < 0$ 的解集是 $(q, 1)$, 则 $p+q$ 的值为 -1

4. 不等式 $\frac{x+2}{x-1} > 2$ 的解集为_____.

5. 已知关于 x 的不等式 $-x^2 + ax + b > 0$.

- (1) 若该不等式的解集为 $(-4, 2)$, 求 a, b 的值;
(2) 若 $b = a + 1$, 求此不等式的解集.

6. 若二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 满足 $f(x+2) - f(x) = 16x$ 且 $f(0) = 2$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 若存在 $x \in [1, 2]$, 使不等式 $f(x) > 2x + m$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

纠错补偿

1. 订正： 题号

2. 补偿训练：