

值范围为()

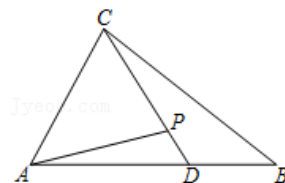
- A. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ B. $(-1, 0)$ C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ D. $(0, 1)$

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, P 为 CD 上一点, 且满足

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 若 $AC = 3$, $AB = 4$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的值为

()

- A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{13}{12}$ D. $-\frac{13}{12}$



二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 若复数 z 满足 $z(1-2i)=10$, 则 ()

- A. $\bar{z} = 2-4i$ B. $z-2$ 是纯虚数
C. 复数 z 在复平面内对应的点在第三象限

D. 若复数 z 在复平面内对应的点在角 α 的终边上, 则 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

10. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x - 18 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + ax + a^2 - 27 < 0\}$, 则下列命题中正确的是 ()

- A. 若 $A = B$, 则 $a = -3$ B. 若 $A \subseteq B$, 则 $a = -3$
C. 若 $B = \emptyset$, 则 $a \leq -6$ 或 $a \geq 6$ D. 若 $B \subsetneq A$ 时, 则 $-6 < a \leq -3$ 或 $a \geq 6$

11. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{2019} < S_{2021} < S_{2020}$, 设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 则数列

$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则下列结论中正确的是 ()

- A. $a_{2020} > 0$ B. $a_{2021} < 0$
C. $a_{2019} \cdot a_{2020} > a_{2021} \cdot a_{2022}$ D. $n = 2019$ 时, T_n 取得最大值

12. 设函数 $f(x) = \min\{|x-2|, x^2, |x+2|\}$, 其中 $\min\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中的最小者. 下列说法正确的有 ()

- A. 函数 $f(x)$ 为偶函数 B. 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 有 $f(x-2) \leq f(x)$
C. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(f(x)) \leq f(x)$ D. 当 $x \in [-4, 4]$ 时, $|f(x)-2| \geq f(x)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知平面向量 $\vec{a} = (-2, x)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则实数 x 的值为_____.

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n (3n - 2)$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 等于_____.

15. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x \leq 0 \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(2021) =$ _____.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $\frac{3a_1}{a_2} + \frac{3a_2}{a_3} + \cdots + \frac{3a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{n}{2} (n \in N^*)$,

则 $a_n =$ _____, $\lambda a_n \geq 4^n$ 对所有 $n \in N^*$ 恒成立, 则 λ 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题包括 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 4$, $a_4 + a_7 = 15$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = 2^{a_n - 2} + n$, 求 $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10}$ 的值.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $3S_n = 1 + 2a_n$,

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{(2n-1)a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x \cos x - x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 6$, $a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0$, $n \in N^*$ 且 $n \geq 2$.

(1) 求证: 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - 3} \right\}$ 为等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)^2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分) 已知函数 $f(x) = 2e^x - ax - 2 (x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 已知 $x \geq 0$ 时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{x+1}$

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的最大值;

(2) 令 $g(x) = (x+1)f(x) - (a-2)x + x^2$, 若 $g(x)$ 既有极大值, 又有极小值, 求实数 a 的取值范围;

(3) 求证: 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $\ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) + \ln(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) < 2\sqrt{n}$.

2021-2022 学年度江苏省泰州中学第一学期期初检测 高三数学

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集为 $\mathbb{R}$, 集合 $A = \left\{ x \mid \left(\frac{1}{2} \right)^x \leq 1 \right\}$, $B = \{ x \mid x^2 - 6x + 8 \leq 0 \}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = (\quad)$

A. $\{ x \mid x \leq 0 \}$

B. $\{ x \mid 2 \leq x \leq 4 \}$

C. $\{ x \mid 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 4 \}$

D. $\{ x \mid 0 < x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 4 \}$

【答案】C

【解答】解: $\because \left(\frac{1}{2} \right)^x \leq 1 = \left(\frac{1}{2} \right)^0, \therefore x \geq 0, \therefore A = \{ x \mid x \geq 0 \};$

又 $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \leq 0, \therefore 2 \leq x \leq 4.$

$\therefore B = \{ x \mid 2 \leq x \leq 4 \},$

$\therefore \complement_{\mathbb{R}} B = \{ x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 4 \},$

$\therefore A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = \{ x \mid 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 4 \},$

故选：C.

2. 下列关于 x, y 的关系中为函数的是 ()

A. $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{3-x}$

B. $y^2 = 4x$

C. $y = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ 1-2x, & x \leq 1 \end{cases}$

D.

x	1	2	3	4
y	0	0	-6	11

【答案】D

【解析】对于 A，定义域需满足 $\begin{cases} x-4 \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \end{cases}$ 解集为 $\emptyset$ ，故 A 不是函数；对于 B，因为 $y^2 = 4x$ ，

即 $y = \pm 2\sqrt{x}$ ，不能满足函数的定义，故 B 不是函数；对于 C，

$y = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ 1-2x, & x \leq 1, \end{cases}$ 当 $x=1$ 时， $y=1$ 或 $y=-1$ 不能满足函数的定义，故 C 不是函数；对于 D，满

足构成函数的要素，故 D 是函数，故选 D.

3. “ $a = \frac{1}{8}$ ”是“对任意的正数 x ， $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

解：当 “ $a = \frac{1}{8}$ ” 时，由基本不等式可得：

“对任意的正数 x ， $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ” 一定成立，

即 “ $a = \frac{1}{8}$ ” $\Rightarrow$ “对任意的正数 x ， $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ” 为真命题；

而 “对任意的正数 x ， $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ” 的” 时，可得 “ $a \geq \frac{1}{8}$ ”

即 “对任意的正数 x ， $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ” $\Rightarrow$ “ $a = \frac{1}{8}$ ” 为假命题；

故 “ $a = \frac{1}{8}$ ” 是 “对任意的正数 x ， $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ” 的充分不必要条件

故选：A.

4. 《张丘建算经》卷上第 22 题为：“今有女善织，日益功疾（注：从第 2 天开始，每天比前一天多织相同量的布），第一天织 5 尺布，现一月（按 30 天计）共织 390 尺”，则从第 2 天起每天比前一天多织 ()

A. $\frac{1}{2}$ 尺布

B. $\frac{5}{18}$ 尺布

C. $\frac{16}{31}$ 尺布

D. $\frac{16}{29}$ 尺布

【答案】D

解：设该女子第 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 天织 a_n 尺布，前 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 天织布 S_n 尺，

则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设其公差为 d ，

由题意可得 $S_{30} = 30a_1 + \frac{30 \times 29}{2}d = 150 + 15 \times 29d = 390$ ，解得 $d = \frac{16}{29}$ 。

故选：D.

5. 设 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$, $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ ，则 a, b, c 的大小关系是()

A. $c < a < b$

B. $c < b < a$

C. $a < c < b$

D. $b < c < a$

【答案】A

解： $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}} < 1$,

$b = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} > 1$,

$c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}} < 1$;

且 $0 < \frac{8}{27} < \frac{9}{16} < 1$ ，函数 $y = x^{\frac{1}{4}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数，

所以 $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$,

所以 $c < a$;

综上知， $c < a < b$.

故选：A.

6. 已知 $x > 0$, $y > 0$ ，且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ ，若 $x + 2y > m^2 + 2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是()

A. $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

B. $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$

C. $(-2, 4)$

D. $(-4, 2)$

【答案】D

解析： $\because x > 0, y > 0, \therefore x + 2y = (x + 2y)\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{x}{y} + \frac{4y}{x} + 4 \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{4y}{x}} + 4 = 4 + 4 = 8$ ，当且仅当 $x = 4, y = 2$ 时，等号成立。 $\therefore x + 2y > m^2 + 2m$ 恒成立， $\therefore m^2 + 2m < 8$ ，解得 $-4 < m < 2$ ，故选D.

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x \leq 0, \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程， $f(x) = x + a$ 无实根，则实数 a 的取值

范围为()

A. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ B. $(-1, 0)$

C. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ D. $(0, 1)$

【答案】B

解：因为函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \end{cases}$,

关于 x 的方程 $f(x) = x+a$ 无实根等价于函数

$y=f(x)$ 的图象与直线 $y=x+a$ 无交点，

设直线 $y=x+a$ 与 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x>0$) 切与

点 $P(x_0, y_0)$,

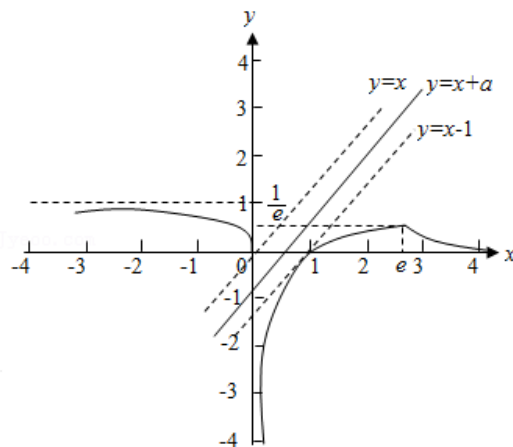
由 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

由已知有： $\frac{1-\ln x_0}{x_0^2} = 1$, 解得 $x_0=1$, 则 $P(1, 0)$,

则切线方程为： $y=x-1$,

由图知：函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=x+a$ 无交点时实数 a 的取值范围为实数 a 的取值范围为 $-1 < a < 0$,

故选：B.



8.如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ， $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ ， P 为 CD 上一点，且满足

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，若 $AC=3, AB=4$ ，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的值为()

A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{13}{12}$ D. $-\frac{13}{12}$

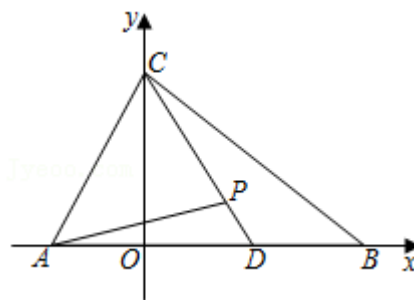
【答案】C

解：如图所示，建立直角坐标系.

$AC=3, AB=4$

$\because \angle CAB = \frac{\pi}{3}, \therefore |OA| = \frac{3}{2}, |OC| = \frac{3\sqrt{3}}{2},$

$\therefore A(-\frac{3}{2}, 0), C(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}), B(\frac{5}{2}, 0).$



$$\because \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{8}{3}, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \left(\frac{8}{3}, 0\right) = \left(\frac{7}{6}, 0\right), \therefore \overrightarrow{CD} = \left(\frac{7}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\text{设 } \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AC} + (1-\lambda) \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AC} + (1-\lambda) \times \frac{2}{3} \overrightarrow{AB},$$

$$\text{与 } \overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \text{ 比较, 可得: } m = \lambda, \frac{2(1-\lambda)}{3} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } m = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} (4, 0) = \left(\frac{19}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{7}{6} \times \frac{19}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{13}{12}.$$

故选: C.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 若复数 z 满足 $z(1-2i)=10$, 则 ()

A. $\bar{z} = 2-4i$

B. $z-2$ 是纯虚数

C. 复数 z 在复平面内对应的点在第三象限

D. 若复数 z 在复平面内对应的点在角 α 的终边上, 则 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】AB

【解析】由题意, 复数 z 满足 $z(1-2i)=10$, 可得复数 $z = \frac{10}{1-2i} = \frac{10(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = 2+4i$, 所

以 $\bar{z} = 2-4i$, 故选项 A 正确; $z-2=4i$ 是纯虚数, 故选项 B 正确; 复数 z 在复平面内对应点的坐标为 $(2, 4)$ 位于第一象限, 故选项 C 错误; 因为 $z=2+4i$ 在复平面内对应的 $(2, 4)$

在角 α 的终边上, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故选项 D 错误, 故选 AB.

10. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x - 18 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + ax + a^2 - 27 < 0\}$, 则下列

命题中正确的是 ()

A. 若 $A=B$, 则 $a=-3$

B. 若 $A \subseteq B$, 则 $a=-3$

C. 若 $B = \emptyset$, 则 $a \leq -6$ 或 $a \geq 6$

D. 若 $B \subsetneq A$ 时, 则 $-6 < a \leq -3$ 或 $a \geq 6$

【答案】ABC

解析: $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x < 6\}$, 若 $A=B$, 则 $a=-3$, 且 $a^2-27=-18$, 故 A 正确, $a=-3$ 时 $A=B$. 故 D 不正确.

若 $A \subseteq B$, 则 $(-3)^2 + a \cdot (-3) + a^2 - 27 \leq 0$ 且 $6^2 + 6a + a^2 - 27 \leq 0$,

解得 $a = -3$ ，故 B 正确，

当 $B = \varnothing$ 时， $a^2 - 4(a^2 - 27) \leq 0$ ，解得 $a \leq -6$ 或 $a \geq 6$ ，故 C 正确.

11. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_{2019} < S_{2021} < S_{2020}$ ，设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ，则数列

$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，则下列结论中正确的是 ()

A. $a_{2020} > 0$

B. $a_{2021} < 0$

C. $a_{2019} \cdot a_{2020} > a_{2021} \cdot a_{2022}$

D. $n = 2019$ 时， T_n 取得最大值

【答案】ABC

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

因为 $S_{2019} < S_{2021} < S_{2020}$ ，

可得 $S_{2021} - S_{2020} = a_{2021} < 0$ ， $S_{2020} - S_{2019} = a_{2020} > 0$ ， $S_{2021} - S_{2019} = a_{2021} + a_{2020} > 0$ ，

即 $a_{2020} > -a_{2021} > 0$ ， $a_{2020} - d > -a_{2021} - d > 0$ ，即 $a_{2019} > -a_{2022} > 0$ ，

所以 $a_{2019} a_{2020} > a_{2021} a_{2022}$ ，且 $d < 0$ ，

即数列 $\{a_n\}$ 递减，且 $a_1 > 0$ ， $a_2 > 0$ ，...， $a_{2020} > 0$ ， $a_{2021} < 0$ ，

又由 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ，可得 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$ ，

当 $n \leq 2018$ 时，可得 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} > 0$ ，

当 $n = 2019$ 时，可得 $\frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} < 0$ ，

当 $n = 2020$ 时，可得 $\frac{1}{b_{2020}} = \frac{1}{a_{2020} a_{2021} a_{2022}} > 0$ ，

当 $n \geq 2021$ 时，可得 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} < 0$ ，

又由 $\frac{1}{b_{2019}} + \frac{1}{b_{2020}} = \frac{1}{a_{2020} a_{2021}} \left(\frac{1}{a_{2019}} + \frac{1}{a_{2022}} \right) = \frac{1}{a_{2020} a_{2021}} \times \frac{a_{2019} + a_{2022}}{a_{2019} a_{2022}}$ ，

因为 $a_{2019} > 0$ ， $a_{2020} > 0$ ， $a_{2021} < 0$ ， $a_{2022} < 0$ ，且 $a_{2019} + a_{2022} > 0$ ，

所以 $\frac{1}{b_{2019}} + \frac{1}{b_{2020}} = \frac{1}{a_{2020} a_{2021}} \times \frac{a_{2019} + a_{2022}}{a_{2019} a_{2022}} > 0$ ，

所以当 $n = 2020$ 时， $\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right)$ 取得最小值. 综上可得，D 不正确.

12. 设函数 $f(x) = \min\{|x-2|, x^2, |x+2|\}$, 其中 $\min\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中的最小者. 下列说法正确的有

A. 函数 $f(x)$ 为偶函数

B. 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 有 $f(x-2) \leq f(x)$

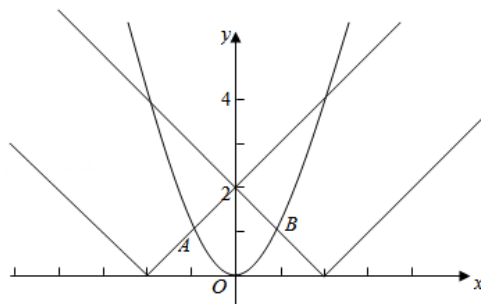
C. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(f(x)) \leq f(x)$

D. 当 $x \in [-4, 4]$ 时, $|f(x)-2| \geq f(x)$

【答案】ABC

解: 在同一直角坐标系中画出函数 $y=|x-2|$,

$y=x^2$, $y=|x+2|$ 的图象如右图所示,



由图象可知: $f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ |x-2|, & x \geq 1 \end{cases}$

显然有 $f(-x) = f(x)$, 可得 $f(x)$ 为偶函数; 故 A 正确;

又当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = |x-2|$, $f(x-2)$ 的图象可看作 $f(x)$ 的图象右移 2 个单位得到, 显然 $x \geq 1$ 时, $f(x)$ 的图象在 $f(x-2)$ 图象之上,

$\therefore$ 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 有 $f(x-2) \leq f(x)$, 故 B 正确;

又由图象可知: 若 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) \geq 0$, 可令 $t = f(x)$,

由 $y = f(t)$ 和 $y = t (t \geq 0)$ 的图象可知: 当 $t \geq 0$ 时, $y = t$ 在曲线 $y = f(t)$ 的上方, $\therefore$ 当 $t \geq 0$ 时, 有 $t \geq f(t)$,

即有 $f(f(x)) \leq f(x)$ 成立, 故 C 正确;

若 $x \in [-4, 4]$, $f(-4) = 2$, $f(-4) - 2 = 0$, 显然 $f(-4) > |f(-4) - 2|$, 故 D 不正确,

故选: ABC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知平面向量 $\vec{a} = (-2, x)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则实数 x 的值为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n (3n-2)$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 等于_____.

【答案】 30

【详解】

由题意, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n (3n-2)$,

则 $a_{2n} + a_{2n-1} = 6n - 2 - (6n - 5) = 3$,

所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) = 10 \times 3 = 30$.

15. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x \leq 0 \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(2021) =$ _____.

【答案】2

解: 当 $x > 0$ 时, 由 $f(x) = f(x-1) - f(x-2)$, 可得 $f(x+1) = f(x) - f(x-1)$,

两式相加得 $f(x+1) = -f(x-2)$, 则 $f(x+3) = -f(x)$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $f(x+6) = -f(x+3) = -[-f(x)] = f(x)$,

即 $x > 0$ 时, $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数,

$$\text{又 } f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(2021) = f(5) = -f(2) = f(-1) = 2,$$

故答案为: 2

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $\frac{3a_1}{a_2} + \frac{3a_2}{a_3} + \cdots + \frac{3a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{n}{2} (n \in N^*)$, 则

$a_n =$ _____, $\lambda a_n \geq 4^n$ 对所有 $n \in N^*$ 恒成立, 则 λ 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{6^n}{n(n+1)}$ $\left[\frac{320}{81}, +\infty \right)$.

【详解】

解: 由于 $\frac{3a_1}{a_2} + \frac{3a_2}{a_3} + \cdots + \frac{3a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{n}{2} (n \in N^*)$,

所以当 $n \geq 2$ 时, 有 $\frac{3a_1}{a_2} + \frac{3a_2}{a_3} + \cdots + \frac{3a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{2}$,

两式相减可得 $\frac{3a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2n}$, 即当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6n}{n+2}$, 当 $n=1$ 时, 求得 $a_2 = 6$,

即 $\frac{a_n}{a_1} = 2$ 也符合该递推关系, 所以 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1 = \frac{6^n}{n(n+1)}$.

由于 $\lambda a_n \geq 4^n \Rightarrow \lambda \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot n(n+1)$, 令 $c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n n(n+1)$,

由于 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (n+1)(n+2)}{\left(\frac{2}{3}\right)^n n(n+1)} = \frac{2n+4}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3n}$, 当 $n=4$ 时, $c_4 = c_5$, 当 $n < 4$ 单调

递增, 当 $n > 4$ 单调递减, 所以 $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 = c_5 > c_6 > \dots$, 故数列最大项为 $\frac{320}{81}$,

即 $\lambda \geq \frac{320}{81}$.

故答案为: $\frac{6^n}{n(n+1)}; \left[\frac{320}{81}, +\infty \right)$.

四、解答题: 本题包括 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 4$, $a_4 + a_7 = 15$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = 2^{a_n-2} + n$, 求 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10}$ 的值.

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

由已知得 $\begin{cases} a_1 + d = 4 \\ (a_1 + 3d) + (a_1 + 6d) = 15 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 1 \end{cases}$.

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = n + 2$.

(2) 由 (1) 可得 $b_n = 2^n + n$.

所以 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10} = (2+1) + (2^2+2) + (2^3+3) + \dots + (2^{10}+10)$

$= (2+2^2+2^3+\dots+2^{10}) + (1+2+3+\dots+10)$

$= \frac{2(1-2^{10})}{1-2} + \frac{(1+10) \times 10}{2}$

$= (2^{11} - 2) + 55$

$= 2^{11} + 53 = 2101$.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 满足 $3S_n = 1 + 2a_n$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{(2n-1)a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解: (1) $3S_n = 1 + 2a_n$, ①,

当 $n=1$ 时, $3S_1 = 1 + 2a_1$, 解得 $a_1 = 1$,

当 $n \geq 1$ 时, $3S_{n+1} = 1 + 2a_{n+1}$, ②,

由② - ①可得 $3a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n$,

$$\text{即 } a_{n+1} = -2a_n, \quad \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = -2,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 以 -2 为公比的等比数列,

$$\therefore a_n = (-2)^{n-1},$$

$$(2) (2n-1)a_n = (2n-1)(-2)^{n-1},$$

$$\text{则 } T_n = 1 \times (-2)^0 + 3 \times (-2)^1 + 5 \times (-2)^2 + \cdots + (2n-1)(-2)^{n-1},$$

$$\therefore -2T_n = 1 \times (-2)^1 + 3 \times (-2)^2 + 5 \times (-2)^3 + \cdots + (2n-1)(-2)^n,$$

两式相减, 可得

$$3T_n = 1 + 2 \times (-2)^1 + 2 \times (-2)^2 + 2 \times (-2)^3 + \cdots + 2 \times (-2)^{n-1} - (2n-1)(-2)^n,$$

$$= 1 + 2 \times \frac{-2 \times [1 - (-2)^{n-1}]}{1-2} - (2n-1)(-2)^n,$$

$$= 1 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \times (-2)^n - (2n-1)(-2)^n = -\frac{1}{3} - (2n - \frac{1}{3}) \times (-2)^n,$$

$$\therefore T_n = -\frac{1}{9} - \frac{(6n-1) \cdot (-2)^n}{9}.$$

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x \cos x - x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

【解析】(1) 因为 $f(x) = e^x \cos x - x$, 所以 $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$, $f'(0) = 0$.

又因为 $f(0) = 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 1$.

(2) 设 $h(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$, 则 $h'(x) = e^x (\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

所以对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 有 $h(x) < h(0) = 0$, 即 $f'(x) < 0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $f(0)=1$, 最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

20. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=6$, $a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n \geq 2$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n-3}\right\}$ 为等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)^2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(1) 证明: $a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0 \Rightarrow a_n = \frac{6a_{n-1}-9}{a_{n-1}}$

$$\therefore \frac{1}{a_n-3} - \frac{1}{a_{n-1}-3} = \frac{a_{n-1}}{3a_{n-1}-9} - \frac{1}{a_{n-1}-3} = \frac{(a_{n-1}-3)}{3(a_{n-1}-3)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{又} \because \frac{1}{a_1-3} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n-3}\right\}$ 是以首项为 $\frac{1}{3}$, 公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列

(2) 由 (1) 得 $\frac{1}{a_n-3} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$,

$$\therefore a_n = \frac{3(n+1)}{n}$$

(3) 解: $\because b_n = \frac{a_n}{(n+1)^2} = \frac{3}{n(n+1)} = 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 3\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3n}{n+1} \end{aligned}$$

21. (12分) 已知函数 $f(x) = 2e^x - ax - 2 (x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 已知 $x \geq 0$ 时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = 2e^x - x - 2$, $f'(x) = 2e^x - 1$, $f'(1) = 2e - 1$,

即曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率 $k=2e-1$, 又 $f(1) = 2e-3$,

故所求的切线方程是 $y = (2e - 1)x - 2$.

(2) 当 $x \geq 0$ 时, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x)]_{\min} \geq 0$.

易知 $f'(x) = 2e^x - a$.

①若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

又 $f(0) = 0$, $\therefore$ 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, 符合题意.

②若 $a > 0$, 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln \frac{a}{2}$.

则当 $x \in (-\infty, \ln \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln \frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$\therefore x = \ln \frac{a}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值.

当 $\ln \frac{a}{2} \leq 0$, 即 $0 < a \leq 2$ 时, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, 符合题意.

当 $\ln \frac{a}{2} > 0$, 即 $a > 2$ 时, 当 $x \in (0, \ln \frac{a}{2})$ 时, $f(x)$ 单调递增, $f(x) < f(0) = 0$,

不符合题意.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{x+1}$

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的最大值;

(2) 令 $g(x) = (x+1)f(x) - (a-2)x + x^2$, 若 $g(x)$ 既有极大值, 又有极小值, 求实数 a 的范围;

(3) 求证: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) + \ln(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) < 2\sqrt{n}$.

(1) 解: (1) 函数 $y = f(x)$ 定义域为 $x \in (-1, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$,

$\therefore x \in (-1, +\infty)$ 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上为增函数; 在区间 $(0, +\infty)$ 为减函数,

所以 $f(x)_{\max} = f(0) = 1$;

(2) 解: $g(x) = 1 + \ln(x+1) - (a-2)x + x^2$,

$g'(x) = \frac{1}{x+1} - (a-2) + 2x = \frac{2x^2 + (4-a)x + 3-a}{x+1}$,

$g(x)$ 既有极大值, 又有极小值,

等价于方程 $2x^2 + (4-a)x + 3-a = 0$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根,

$$\text{即: } \begin{cases} 2+(a-4)+3-a > 0 \\ x = \frac{a-4}{4} > -1 \\ \Delta = (a-4)^2 - 8(3-a) > 0 \end{cases}, \text{ 解得: } a > 2\sqrt{2},$$

所以所求实数 a 的取值范围是: $(2\sqrt{2}, +\infty)$;

(3) 证明: 由 (1) 知当 $x > 0$ 时, $f(x) < f(0) = 1$,

$$\therefore \ln(1+x) < x, \therefore \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\therefore \ln(1+1) < 1, \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}, \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\therefore \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$< 1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$= 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= 1 + 2\sqrt{n} - 2 = 2\sqrt{n} - 1 < 2\sqrt{n}$$