2018-2019 学年度第二学期高二期中调研测试数学参考答案

1、$\{x|1<x<4\}$　　2、真　　3、3　　4、(0，$\sqrt{6}$]　　5、$\sqrt{5}$　　6、$(0,3]$

7、充分不必要　　8、$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　9、$(-1,1)$　　10、$[e,+\infty)$　　11、$\frac{3}{5}$　　12、$\frac{5}{2}$

13、5　　14、$\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$

15、【解析】（1）由 A 中不等式变形得：$(2x-1)(x-3)\le 0$

解得：$A=[\frac{1}{2},3]$ ，　…………… 2 分

当 $a=-4$ 时，$x^2-4<0$

解得：$B=(-2,2)$，　…………… 4 分

综上所述，$A\cap B=[\frac{1}{2},2)$　…………… 6 分

（2）由题意得：$B\subseteq C_R A$

分两种情况考虑：

当 $B=\Phi$，即 $a\ge 0$ 时，满足题意；　…………… 8 分

当 $B\ne\Phi$，即 $a<0$ 时，集合 $B=\{x|-\sqrt{-a}<x<\sqrt{-a}\}$ ，

$\therefore\sqrt{-a}\le\frac{1}{2}$ ，

解得：$-\frac{1}{4}\le a<0$，　…………… 12 分

综上所述，a 的取值范围是 $a\ge-\frac{1}{4}$.　…………… 14 分

16、【解析】（1）若命题 p 为真命题，则 $\begin{cases} m-2<0 \\ m>0 \end{cases}$

得 $0<m<2$.　…………… 4 分

（2）若命题 q 为真命题，则 $|z|=\sqrt{(m-2)^2+m^2}\le\sqrt{10}$

得：$-1\le m\le 3$，　…………… 8 分

若命题¬p，命题 q 都为真，则$\begin{cases} m \le 0, m \ge 2 \\ -1 \le m \le 3 \end{cases}$ ………… 12 分

即 $m \in [-1,0] \cup [2,3]$. ………… 14 分

17、【解析】（1）由题意得 $x^2 - 2mx + 2 - m \ge x - mx$ 在 R 上恒成立，

即 $x^2 - (m+1)x + 2 - m \ge 0$ 恒成立，

$\Delta = (m+1)^2 - 4(2-m) \le 0$ 解得：$m \in [-7,1]$ ………… 6 分

（2）由 $A = \{y \mid y = f(x), 0 \le x \le 1\}$ 且 $A \subseteq [0,+\infty)$

得 $f(x) \ge 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立，

当 $m < 0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增，$f(x)_{\min} = f(0) = 2 - m \ge 0$，$m \le 2$ …… 8 分

当 $0 \le m \le 1$ 时，$f(x)_{\min} = f(m) = 2 - m - m^2 \ge 0$，解得 $-2 \le m \le 1$

故 $0 \le m \le 1$ ………… 10 分

当 $m > 1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减，$f(x)_{\min} = f(1) = -3m + 3 \ge 0$，$m \le 1$

故 m 不存在 ………… 12 分

综上，实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

故实数 m 的最大值为 1. ………… 14 分

18、【解析】（1）$\because f(-x) = -f(x)$

$\therefore (k+1)(2^x + 2^{-x}) = 0$

$\therefore k = -1$ ； ………… 4 分

（2）任取 $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$

则 $f(x_1) - f(x_2) = (2^{x_1} - \frac{1}{2^{x_1}}) - (2^{x_2} - \frac{1}{2^{x_2}})$

$= \left(2^{x_1} - 2^{x_2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{x_1+x_2}}\right)$

$\because x_1 < x_2 \therefore 2^{x_1} < 2^{x_2}$ $\therefore f(x_1) < f(x_2)$

所以，$f(x)$ 在 R 上是单调增函数。 …………10 分

（3）不等式 $f(\ln m) + f(2\ln m - 1) \le 1 - 3\ln m$

等价变形为 $f(\ln m) + \ln m \le -f(2\ln m - 1) + 1 - 2\ln m$

因为 $f(x)$ 为奇函数

所以，不等式等价变形为 $f(\ln m) + \ln m \le f(1 - 2\ln m) + 1 - 2\ln m$

由（2）得：$f(x)$ 在 R 上是单调增函数

则 $y = f(x) + x$ 在 R 上是单调增函数

所以，$\ln m \le 1 - 2\ln m$

不等式解集为$\left(0, e^{\frac{1}{3}}\right]$. ………… 16 分

19、解：（1）由题意可知∠MNP=α，故有 MP=60tanα，

所以在 RtΔNMT 中，$GH = MN = \dfrac{60}{\cos\alpha}$ ………… 2 分

（2）$W = \left(80 + 16\sqrt{3} - 60\tan\alpha\right) \times 1 + \dfrac{60}{\cos\alpha} \times 2$

$$= 80 + 16\sqrt{3} - 60\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 120\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$= 80 + 16\sqrt{3} - 60\frac{\sin\alpha - 2}{\cos\alpha}$$ ………… 8 分

（3）设 $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha - 2}{\cos\alpha}$ （其中$0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$）

则 $f'(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha\cos\alpha - (-\sin\alpha)(\sin\alpha - 2)}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1 - 2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

令 $f'(\alpha) = 0$ 得$1 - 2\sin\alpha = 0$，即$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ ，得$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ …………10 分

列表

α	$\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$
$f'(\alpha)$	+	0	−
$f(\alpha)$	单调增	极大值	单调减

所以当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时有 $f(\alpha)_{\max}=-\sqrt{3}$，此时有 $W_{\min}=80+16\sqrt{3}+60\sqrt{3}=80+76\sqrt{3}$

答：排管的最小费用为 $80+76\sqrt{3}$ 万元，相应的角 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.　　………… 16 分

20、**解**：(1) 由题意知，函数 $f(x)$ 的定义域为(0，＋∞)，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-k=\dfrac{1-kx}{x}$，

当 $k=2$ 时， $f'(1)=-1$，

则切线方程为 $y-(-2)=-(x-1)$，即 $x+y+1=0$.　　………… 4 分

(2) ①若 $k<0$ 时，则 $f'(x)>0$， $f(x)$ 是区间(0，＋∞)上的增函数.

因为 $f(1)=-k>0, f(e^k)=k-ke^k=k(1-e^k)<0$，

所以 $f(1)f(e^k)<0$，函数在区间(0，＋∞)有唯一零点；

②若 $k=0$, 则 $f(x)=\ln x$ 有唯一零点 $x=1$；

③若 $k>0$，令 $f'(x)=0$，则 $x=\dfrac{1}{k}$，

所以在区间 $\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$ 上， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 是增函数；

在区间 $\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$ 上， $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 是减函数；

故在区间(0，＋∞)上， $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\dfrac{1}{k}\right)=\ln\dfrac{1}{k}-1=-\ln k-1$

由于 $f(x)$ 无零点，所以 $f\left(\frac{1}{k}\right)=-\ln k-1<0$，解得 $k>\frac{1}{e}$，

故所求实数 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.　　　　………… 10 分

(3) 设 $x_1>x_2>0$，

因为 $f\left(x_1\right)=0, f(x_2)=0$，

所以 $\ln x_1-kx_1=0,\ln x_2-kx_2=0$，

所以 $\ln x_1-\ln x_2=k(x_1-x_2)$，

$\ln x_1+\ln x_2=k(x_1+x_2)$，

要证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，

即证 $k(x_1+x_2)>2$，即证 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，

即证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2\left(x_1-x_2\right)}{x_1+x_2}$.

设 $t=\frac{x_1}{x_2}>1$，上式转化为 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$.

设为 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

所以 $g'(t)=\frac{\left(t-1\right)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以 $g(t)$ 在(1，＋∞)上单调递增，

所以 $g(t)>g(1)=0$，

所以为 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

所以, $\ln x_1+\ln x_2>2$.　　　　…………16 分

21. 解：（1）当$n=1$时，显然成立 ………… 2 分

（2）假设当$n=k,k\ge 1,k\in N^*$时，$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$ ………… 4 分

则，当$n=k+1$时，$1^3+2^3+\cdots+k^3+\left(k+1\right)^3=\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2+\left(k+1\right)^3$

$$=\frac{\left(k+1\right)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}=\frac{\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)^2}{4}=\left[\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{2}\right]^2$$

所以当 n＝k＋1 时，等式也成立，

由(1)(2)可知，对于一切 n∈N*等式恒成立． …………10 分

22．解：（1）因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$．

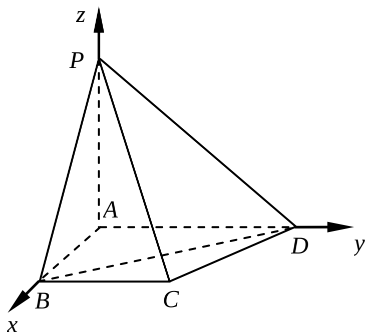
又 $AD\perp AB$，

故分别以 AB，AD，AP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系．

根据条件得 $AD=\sqrt{3}$．所以 $B(1，0，0)$，$D(0，\sqrt{3}，0)$，$C(1，\dfrac{2\sqrt{3}}{3}，0)$，$P(0，0，2)$．

从而$\overrightarrow{BD}=(-1，\sqrt{3}，0)$，$\overrightarrow{PC}=(1，\dfrac{2\sqrt{3}}{3}，-2)$．… 3 分

设异面直线 BD，PC 所成角为θ，



则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{BD}，\overrightarrow{PC}>|=\left|\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}\right|$

$$=\left|\frac{(-1，\sqrt{3}，0)\cdot(1，\frac{2\sqrt{3}}{3}，-2)}{2\times\sqrt{\frac{19}{3}}}\right|=\frac{\sqrt{57}}{38}.$$

即异面直线 BD 与 PC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{57}}{38}$． ………………………… 5 分

（2）因为 $AB\perp$平面 PAD，所以平面 PAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AB}=(1，0，0)$．

设平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PC}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{PC}=(1，\dfrac{2\sqrt{3}}{3}，-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0，\sqrt{3}，-2)$，

得$\begin{cases}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y-2z=0, \\ \sqrt{3}y-2z=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}z, \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}z.\end{cases}$

不妨取 $z=3$，则得 $\boldsymbol{n}=(2，2\sqrt{3}，3)$. …………………… 8 分

设二面角 $A-PD-C$ 的大小为φ,

则 $\cos\varphi=\cos<\overrightarrow{AB}，\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(1，0，0)\cdot(2，2\sqrt{3}，3)}{1\times5}=\dfrac{2}{5}$.

即二面角 $A-PD-C$ 的余弦值为$\dfrac{2}{5}$. …………………… 10 分

23、解：（1）以 O 为坐标原点，建立坐标系 $O-ABP$，

则 $A(4,0,0)$， $B(0,3,0)$， $C(-4,0,0)$， $D(0,-3,0)$， $P(0,0,4)$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(4,0,-4)$， $\overrightarrow{DB}=(0,6,0)$， $\overrightarrow{AB}=(-4,3,0)$.

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，得 $M(-\dfrac{4}{3},0,\dfrac{8}{3})$，所以 $\overrightarrow{MB}=(\dfrac{4}{3},3,-\dfrac{8}{3})$，

设平面 BDM 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}6y=0 \\ \dfrac{4}{3}x+3y-\dfrac{8}{3}z=0\end{cases}$，得 $y=0$，

令 $x=2$，则 $z=1$，所以平面 BDM 的一个法向量 $\vec{n}=(2,0,1)$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{PA},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{4}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

即直线 PA 与平面 BDM 所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ………………5 分

（2）易知平面 ABC 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$.

设 $M(a,0,b)$，代入 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MC}$，得 $(a,0,b-4)=\lambda(-4-a,0,-b)$，

解得$\begin{cases}a=\dfrac{-4\lambda}{1+\lambda} \\ b=\dfrac{4}{1+\lambda}\end{cases}$，即 $M(\dfrac{-4\lambda}{1+\lambda},0,\dfrac{4}{1+\lambda})$，所以 $\overrightarrow{MB}=(\dfrac{4\lambda}{1+\lambda},3,\dfrac{-4}{1+\lambda})$，

设平面 BDM 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-4x+3y=0\\ \dfrac{4\lambda}{1+\lambda}x+3y-\dfrac{4}{1+\lambda}z=0\end{cases}$，

消去 y，得 $(2\lambda+1)x=z$，令 $x=1$，则 $z=2\lambda+1$， $y=\dfrac{4}{3}$，

所以平面 BDM 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,\dfrac{4}{3},2\lambda+1)$，

所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\left|\dfrac{2\lambda+1}{\sqrt{1+\dfrac{16}{9}+(2\lambda+1)^2}}\right|$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $-\dfrac{4}{3}$，

因为 $\lambda>0$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{3}$.　　　…………………………10 分

24.解：（1）$\because$ 函数 $f(x)=\ln(2-x)+ax$ 在区间 $(0,1)$ 上是增函数.

$\therefore f'(x)=\dfrac{-1}{2-x}+a\geq 0$ 在区间 $(0,1)$ 上恒成立,

$\therefore a\geq\dfrac{1}{2-x}$,又 $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是增函数

$\therefore a\geq g(1)=1$ 即实数 a 的取值范围为 $a\geq 1$.　　………… 3 分

（2）先用数学归纳法证明 $0<a_n<1$.　当 $n=1$ 时，$a_1\in(0,1)$ 成立,　………… 4 分

假设 $n=k$ 时，$0<a_k<1$ 成立,　　………… 5 分

当 $n=k+1$ 时，由（1）知 $a=1$ 时，函数 $f(x)=\ln(2-x)+x$ 在区间 $(0,1)$ 上是增函数

$\therefore a_{k+1}=f(a_k)=\ln(2-a_k)+a_k$

$\therefore 0<\ln 2=f(0)<f(a_k)<f(1)=1$,　　………… 7 分

即 $0<a_{k+1}<1$ 成立,

$\therefore$ 当 $n\in N^*$ 时,$0<a_n<1$ 成立.　　………… 8 分

下证 $a_n<a_{n+1}$.

$\because 0<a_n<1$,　$\therefore a_{n+1}-a_n=\ln(2-a_n)>\ln 1=0$.　　………… 9 分

$\therefore a_n<a_{n+1}$.

综上 $0<a_n<a_{n+1}<1$.　　………… 10 分