

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期 高二数学

小题大赛 (2)

一、单选题:

1. 抛物线 $y = 2x^2$ 的焦点坐标是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

2. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_5 + a_6 = 31$, $S_7 = 77$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

3. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题: “三百七十八里关, 初行健步不为难, 次日脚痛减一半, 六朝才得到其关, 要见次日行里数, 请公仔细算相还.” 你的计算结果是 ()

- A. 86 里 B. 90 里 C. 96 里 D. 192 里

4. 如图, 已知空间四边形 $OABC$, 其对角线为 OB , AC , M , N 分别是 OA , CB 的中点,

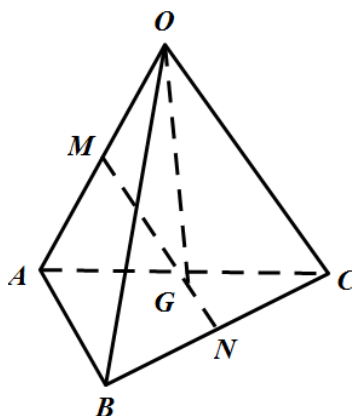
点 G 在线段 MN 上, 且使 $MG = 3GN$, 用向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$ 是 ()

A. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OC}$



5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PB = PC = AB = AC = BC = 4$, $PA = 2\sqrt{3}$, 则异面直线

PC 与 AB 所成角的余弦值是 ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{8}$

6. 若两个正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$, 且存在这样的 x, y 使不等式 $x + \frac{y}{4} < m^2 + 3m$ 有解,

则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 4)$ B. $(-4, 1)$ C. $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $3a_1 + 3^2 a_2 + 3^3 a_3 + \cdots + 3^n a_n = n (n \in N^*)$, 则数列

$\left\{ \frac{1}{\log_3 a_n \cdot \log_3 a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 S_n 为 ()

- A. $\frac{n}{n+2}$ B. $\frac{1}{n+2}$ C. $\frac{2n}{n+3}$ D. $\frac{n}{n+1}$

8. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_2 的直线交双

曲线的右支于 A, B 两点, 若 $|AF_2| = 3|BF_2|$, 且 $\cos \angle F_1 A F_2 = \frac{4}{5}$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

二、多选题:

9. 下列说法中正确的是 ()

- A. “ $a > b$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的既不充分又不必要条件
 B. “ $x = 2$ ” 是 “ $1, x, 4$ 成等比数列” 的充分不必要条件
 C. “ $m > 0, n < 0$ ” 是 “方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 表示双曲线” 的必要不充分条件
 D. 命题 “ $\forall x > 1, x^2 - 1 > 0$ ” 的否定是 “ $\exists x \leq 1$, 使得 $x^2 - 1 \leq 0$ ”

10. 设正实数 m, n 满足 $m + n = 2$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $\frac{n}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 3 B. mn 的最大值为 1
 C. $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ 的最小值为 2 D. $m^2 + n^2$ 的最小值为 2

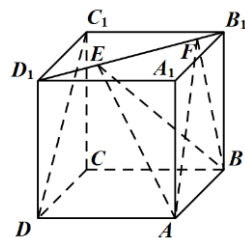
11. 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过 F 的直线与 E 交于 A, B 两点, C, D

分别为 A, B 在 l 上的射影, 且 $|AF| = 3|BF|$, M 为 AB 中点, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\angle CFD = 90^\circ$ B. $\triangle CMD$ 为等腰直角三角形
 C. 直线 AB 的斜率为 $\pm\sqrt{3}$ D. $\triangle AOB$ 的面积为 4

12. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F , 且 $EF=1$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. 存在点 E, F 使得 $AE \parallel BF$
 B. 异面直线 EF 与 C_1D 所成的角为 60°
 C. 三棱锥 $B-AEF$ 的体积为定值 $\frac{\sqrt{2}}{12}$
 D. A_1 到平面 AEF 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

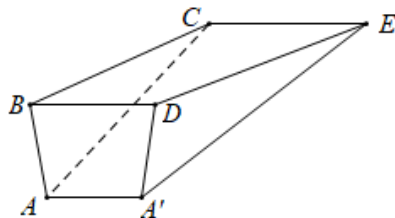


三、填空题

13. 已知 “ $\exists x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, 使 $x^2 + 2x + a \geq 0$ ” 为真命题, 则实数 a 的取值范围是_____

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 右支上一点 P 到右焦点的距离为 4, 则该点到左准线的距离为_____

15. 《九章算术》与《几何原本》并称现代数学的两大源泉. 在《九章算术》卷五商功篇中介绍了羡除 (此处是指三面为等腰梯形, 其他两侧面为直角三角形的五面体) 体积的求法. 在如图所示的羡除中, 平面 $ABDA'$ 是铅垂面, 下宽 $AA' = 3\text{m}$, 上宽 $BD = 4\text{m}$, 深 3m , 平面 $BDEC$ 是水平面, 末端宽 $CE = 5\text{m}$, 无深, 长 6m (直线 CE 到 BD 的距离), 则该羡除的体积为_____ m^3



16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点为 F_1, F_2 , 如果椭圆 C 上存在一点 P , 使得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 且 ΔPF_1F_2 的面积等于 4, 则实数 b 的值为_____, 实数 a 的取值范围为_____.

小题大赛（2）答案

一、单选题： ABCD ACDB

二、多选题： AB ABD AC BCD

三、填空题：

13. $[-8, +\infty)$

14. 4

15. 36

16. 2 ; $[2\sqrt{2}, +\infty)$