仪征中学2020届高三（下）期初学情检测

数学Ⅰ参考答案

一、填空题:

1. $\{-1,0,2\}$；　2. 2；　3. -1；　4. $\dfrac{3}{10}$；　5. 90；　6. $[1,+\infty)$；　7. $\dfrac{4}{3}\pi$

8. $\dfrac{5}{4}$；　9. 4；　10. $(\sqrt{2},+\infty)$；　11. $2+\sqrt{3}$；　12. $\dfrac{\pi}{3}$；　13. $\left(0,\dfrac{11\sqrt{2}}{2}\right]$；　14. $(2,\mathrm{e}+1)$.

二、解答题:

15. 解：（1）由题意可知，$f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=(\sin x+\cos x,0)\cdot(\sin x,1)=\sin^2 x+\sin x\cos x$，

因为$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2},\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$，

即 $f(x)$的最小值为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}$；

（2）因为 $f(\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$，所以$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，

所以$\cos\left(4\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=1-2\sin^2\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=1-2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)^2=\dfrac{8}{9}$，

由诱导公式可知，$\sin 4\theta=\cos\left(4\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{8}{9}$.

16. 证明：（1）在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，因为$BB_1 \underline{\underline{//}} CC_1$，且$D,E$分别为$BB_1,CC_1$中点，

所以$BD \underline{\underline{//}} C_1E$，所以四边形$BDC_1E$为平行四边形，所以$DC_1//BE$，

因为$DC_1\not\subset$面A_1BE，$BE\subset$面A_1BE，所以$DC_1//$面A_1BE；

（2）在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BB_1\perp$面$A_1B_1C_1$，又$A_1M\subset$面$A_1B_1C_1$，所以$BB_1\perp A_1M$，

因为$AB=AC$，所以$A_1B_1=A_1C_1$，又因为M为B_1C_1中点，所以$A_1M\perp B_1C_1$，

因为$B_1C_1\cap BB_1=B_1$，$BB_1,B_1C_1\subset$面BB_1C_1C，所以$A_1M\perp$面BB_1C_1C，

因为$DC_1\subset$面BB_1C_1C，所以$A_1M\perp DC_1$，

因为$BB_1\perp$面$A_1B_1C_1$，又$B_1C_1\subset$面$A_1B_1C_1$，所以$BB_1\perp B_1C_1$，即四边形BB_1C_1C为矩形，

因为$BB_1=\sqrt{2}BC$，且E,M分别为CC_1,B_1C_1中点，所以$\dfrac{EC_1}{MC_1}=\dfrac{B_1C_1}{DB_1}=\sqrt{2}$，

即$\angle C_1EM=\angle B_1C_1D$，因为$\angle C_1EM+\angle C_1ME=90^{\circ}$，所以$\angle B_1C_1D+\angle C_1ME=90^{\circ}$，

所以$DC_1\perp EM$，

又因为$A_1M\perp DC_1$，$A_1M,EM\subset$面A_1EM，所以$DC_1\perp$面A_1EM.

17. 解：（1）由图可知，$HE=7-2a,PH=a$，所以$PQ=HE+2a\cos\theta=7-\frac{4}{5}a$，

梯形$PQEH$的高$h=a\sin\theta=\frac{4}{5}a$，所以其面积$S=\frac{1}{2}(PQ+HE)\cdot h=\frac{4}{5}a\left(7-\frac{7}{5}a\right)$，

直四棱柱$PQEH-NMFG$的高$HG=8-2a\sin\theta=8-\frac{8}{5}a$，

则$V=\frac{4}{5}a\left(7-\frac{7}{5}a\right)\left(8-\frac{8}{5}a\right)=\frac{224}{125}\left(a^3-10a^2+25a\right)$，

因为$7-2a>0,7-\frac{4}{5}a<7$，所以$0<a<\frac{7}{2}$；

（2）设$V(a)=a^3-10a^2+25a$，则$V'(a)=3a^2-20a+25=(a-5)(3a-5)$，

当$a\in\left(0,\frac{5}{3}\right)$时，$V'(a)>0$，$V(a)$单调递增，

当$a\in\left(\frac{5}{3},\frac{7}{2}\right)$时，$V'(a)<0$，$V(a)$单调递减，

所以$V(a)_{\max}=V\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{500}{27}$，

因为$V=\frac{224}{125}V(a)$，所以$V_{\max}=\frac{224}{125}\times\frac{500}{27}=\frac{896}{27}$；

答：（1）V关于a的函数为$V=\frac{224}{125}\left(a^3-10a^2+25a\right)$，其中$0<a<\frac{7}{2}$；

（2）此直四棱柱体积最大值为$\frac{896}{27}$.

18. 解：（1）由题意可知，$c=1$，且$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，又因为$a^2=b^2+c^2$，解得$a=2,b=\sqrt{3}$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）由题意可知，直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1)$，设$A\left(x_1,\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-1)\right),B\left(x_2,\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-1)\right)$，

将直线l的方程与椭圆C的方程联立，$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1)\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，整理得$2x^2-2x-3=0$，

因为$x_{1,2}=\frac{-2\pm2\sqrt{7}}{4}$，所以$x_1+x_2=1$，

则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(x_1+x_2,\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1+x_2-2)\right)=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=t\overrightarrow{OP}(t>0)$，所以点$P$的坐标为$\left(\frac{1}{t},-\frac{\sqrt{3}}{2t}\right)$，

将P点坐标代入椭圆C的方程，$\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{4t^2}=1$，解得$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（3）设直线l的方程为$x=my+1(m\in\mathbf{R})$，且设$A(my_1+1,y_1),B(my_2+1,y_2)$，

将直线l的方程与椭圆C的方程联立，$\begin{cases}x=my+1\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，整理得$\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$，

因为 $y_{1,2}=\dfrac{-6m\pm\sqrt{36m^2+36\left(3m^2+4\right)}}{2\left(3m^2+4\right)}$，所以 $y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$，

则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(m\left(y_1+y_2\right)+2,y_1+y_2\right)=\left(\dfrac{8}{3m^2+4},\dfrac{-6m}{3m^2+4}\right)$，

因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=t\overrightarrow{OP}\left(t>0\right)$，所以点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{8}{\left(3m^2+4\right)t},\dfrac{-6m}{\left(3m^2+4\right)t}\right)$，

将点 P 的坐标代入椭圆 C 的方程，$\dfrac{16}{\left(3m^2+4\right)^2t^2}+\dfrac{12m^2}{\left(3m^2+4\right)^2t^2}=1$，整理得 $t^2=\dfrac{4}{3m^2+4}$，

所以 $\dfrac{4}{3m^2+4}\in\left(0,1\right]$，所以 $t\in\left(0,1\right]$.

19. 解：（1）$h\left(x\right)=\mathrm{e}^x-a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$，则 $h'\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\dfrac{a}{x^2}-a$，

因为 $0\leqslant a\leqslant \mathrm{e}$，所以当 $x\in\left(0,1\right]$ 时，$h'\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\dfrac{a\left(1-x^2\right)}{x^2}>0$

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$h'\left(x\right)=\left(\mathrm{e}^x-a\right)+\dfrac{a}{x^2}>0$，

即 $h\left(x\right)>0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

（2）由题意可知，$\mathrm{e}^a+\dfrac{k}{\mathrm{e}^a}-\ln\left(a^2+1\right)>\left(a^2+1\right)+\dfrac{k}{a^2+1}-a$ 对任意 $a>0$ 恒成立，

整理得 $\mathrm{e}^a+\dfrac{k}{\mathrm{e}^a}+a>\mathrm{e}^{\ln\left(a^2+1\right)}+\dfrac{k}{\mathrm{e}^{\ln\left(a^2+1\right)}}+\ln\left(a^2+1\right)$ 对任意 $a>0$ 恒成立，

设 $a^2=t>0$，则 $a-\ln\left(a^2+1\right)=\sqrt{t}-\ln\left(t+1\right)$，设 $F\left(t\right)=\sqrt{t}-\ln\left(t+1\right)\left(t>0\right)$，

则 $F'\left(t\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{\left(\sqrt{t}-1\right)^2}{2\sqrt{t}\left(t-1\right)}\geqslant0$，所以 $F\left(t\right)$ 单调递增，所以 $F\left(t\right)>F\left(0\right)=0$，

即当 $a>0$ 时，$a>\ln\left(a^2+1\right)$，设 $G\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\dfrac{k}{\mathrm{e}^x}+x$，$G'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\dfrac{k}{\mathrm{e}^x}+1=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-k}{\mathrm{e}^x}$，

不等式 $\mathrm{e}^a+\dfrac{k}{\mathrm{e}^a}+x>\mathrm{e}^{\ln\left(a^2+1\right)}+\dfrac{k}{\mathrm{e}^{\ln\left(a^2+1\right)}}+\ln\left(a^2+1\right)$ 等价于 $G\left(a\right)>G\left(\ln\left(a^2+1\right)\right)$，

① 当 $k\leqslant2$ 时，$G'\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-k}{\mathrm{e}^x}>0$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，$G\left(x\right)$ 单调递增，

所以 $G\left(a\right)>G\left(\ln\left(a^2+1\right)\right)$，即 $k\leqslant2$ 符合题意；

② 当 $k>2$ 时，因为 $G'\left(0\right)<0,G'\left(\ln k\right)>0$，所以存在 $x_0\in\left(0,\ln k\right)$，使得 $G'\left(x_0\right)=0$，

且当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减，

取 $a=x_0$，则 $G\left(a\right)<G\left(\ln\left(a^2+1\right)\right)$，所以 $k>2$ 不符合题意；

综上，k 的取值范围为 $k\leqslant2$.

20. 解：（1）因为 $\dfrac{a_{n+2}\cdot a_n}{a_{n+2}+a_n}=\dfrac{2}{5}a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，所以 $\dfrac{1}{a_{n+2}}+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{2a_{n+1}}$，

所以 $\dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{2}{a_n}\right)$，

① 当$a_2=\frac{1}{2}a_1$时，$\frac{1}{a_2}-\frac{2}{a_1}=0$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{2}{a_1}\right)=0$，即$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列；

② 当$a_2\neq\frac{1}{2}a_1$时，$\frac{1}{a_2}-\frac{2}{a_1}\neq 0$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{2}{a_1}\right)\neq 0$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}\right\}$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列；

综上，原命题得证；

（2）因为$a_2=a_1=1\neq\frac{1}{2}a_1$，由（1）可知，数列$\left\{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}\right\}$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，

因为$\frac{1}{a_2}-\frac{2}{a_1}=-1$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}=-\frac{1}{2^{n-1}}$，

两边同时乘以$\frac{1}{2^{n+1}}$，则$\frac{1}{2^{n+1}a_{n+1}}-\frac{1}{2^n a_n}=-\frac{1}{4^n}$，

由累加法可知，$\frac{1}{2^n a_n}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}$，

所以$a_n=\frac{3}{2^{n-1}+\frac{1}{2^{n-2}}}$，因为$2^{n-1}+\frac{1}{2^{n-2}}\leqslant 2^n+\frac{1}{2^{n-1}}$，

所以$a_n\geqslant a_{n+1}$，当且仅当$n=1$时等号成立，

假设存在三项$a_m,a_r,a_t\left(m<r<t\right)$成等差，则$a_m+a_t=2a_r$，所以$a_m<2a_r$，

① 当$r\geqslant m+3$时，则$a_m<2a_r\leqslant 2a_{m+3}$，所以$\frac{3}{2^{m-1}+\frac{1}{2^{m-2}}}<\frac{6}{2^{m+2}+\frac{1}{2^{m+1}}}$，

整理得$4^m<\frac{5}{2}$，无解，所以$r\leqslant m+2$，

② 当$r=m+2$时，$a_m<2a_r=2a_{m+2}$，所以$\frac{3}{2^{m-1}+\frac{1}{2^{m-2}}}<\frac{6}{2^{m+1}+\frac{1}{2^m}}$，整理得$2^{2m-1}<\frac{7}{2}$，

解得$m=1$，所以$r=3$，此时$a_m=a_1=1,a_r=a_3=\frac{2}{3}$，

所以$a_t=\frac{3}{2^{t-1}+\frac{1}{2^{t-2}}}=2a_3-a_1=\frac{1}{3}$，整理得$2^{t-1}+\frac{1}{2^{t-2}}=9$，无解；

③ 当$r=m+1$时，$a_t=2a_{m+1}-a_m$，即$\frac{3}{2^{t-1}+\frac{1}{2^{t-2}}}=\frac{6}{2^m+\frac{1}{2^{m-1}}}-\frac{3}{2^{m-1}+\frac{1}{2^{m-2}}}$，

整理得$2^{3m-2}+5\cdot 2^{m-1}-3\cdot 2^{t-1}=\frac{3}{2^{t-2}}-\frac{1}{2^{m-2}}$，

易知$m\geqslant 2$，则$t\geqslant 4$，所以上式左边为整数，右边为分数，等式不可能成立；

综上，数列$\{a_n\}$中不存在三项成等差.

仪征中学2020届高三（下）期初学情检测

数学Ⅱ参考答案

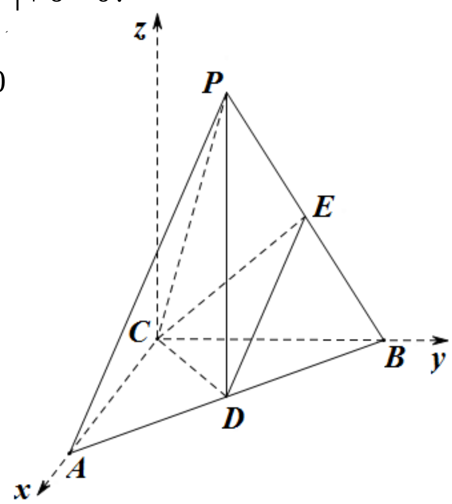
21． 解：$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&6\\-5&-1\end{bmatrix}$，设$M(x,y)$，则$\begin{bmatrix}0&6\\-5&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6y\\-5x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}$，

所以$\begin{cases}6y=6\\-5x-y=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$，所以$M$点坐标为$(0,1)$.

22. 解：设点B的极坐标为(ρ_0,θ_0)，由题设可知$\rho_0=\sqrt{2}\rho,\theta_0=\theta+\dfrac{\pi}{4}$，即$\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho_0,\theta=\theta_0-\dfrac{\pi}{4}$，

代入圆M的极坐标方程，整理可得$\rho_0^2-4\sqrt{2}\rho_0\cos\left(\theta_0-\dfrac{5\pi}{12}\right)+6=0$，

所以点B运动轨迹的极坐标方程为$\rho^2-4\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\dfrac{5\pi}{12}\right)+6=0$.



23. 解：建立如图所示的空间直角坐标系，易知$C(0,0,0),A(2,0,0)$

$D(1,1,0),E\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right),P(1,1,3)$，

（1）由题设知$\overrightarrow{PA}=(1,-1,-3),\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，

设直线CE与直线PA夹角为θ，

则$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{CE}|}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}}$，整理得$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{209}}{19}$；

（2）设直线PC与平面DEC夹角为θ_0，面DEC的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

因为$\overrightarrow{CD}=(1,1,0),\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，所以有$\begin{cases}x+y=0\\\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{2}z=0\end{cases}$，

取$x=1$，解得$y=-1,z=\dfrac{2}{3}$，即面DEC的一个法向量为$\boldsymbol{m}=\left(1,-1,\dfrac{2}{3}\right)$，

因为$\overrightarrow{CP}=(1,1,3)$，所以$\sin\theta_0=\dfrac{|\overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|1-1+2|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{11}$.

24. 解：（1）当$n=1$时，$a_1=1\in[1,2)$，假设当$n=k$时，$a_k\in[1,2)$，

因为$y=x+\frac{1}{x}$在$[1,2)$上单调递增，所以解得$a_{k+1}=\frac{4}{5}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)\in[1,2)$，原命题得证；

（2）由（1）的推理过程可知，当$a\in[1,2)$时，$a_n\leqslant 2$恒成立，

又因为当$a_k>2$时，$a_{k+1}=\frac{4}{5}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)>2$，且$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{a_k}-a_k\right)<0$，

即$2<a_{k+1}<a_k$，所以当$a>2$时，恒有$2<a_n\leqslant a$，即$a_n\leqslant a$恒成立，

当$a\in(0,1)$时，$a_2=\frac{4}{5}\left(a+\frac{1}{a}\right)>1$，由上述过程可知，$a_n\leqslant \max\{2,a_2\}$恒成立，

综上，对任意给定的实数a，均存在正实数$M=\max\left\{a,\frac{4}{5}\left(a+\frac{1}{a}\right),2\right\}$，

使得$a_n\leqslant M$恒成立.