

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学寒假自主练习 (1)

一、单选题

1. 1. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-3}{x-7} \leq 0 \right\}$, $B = \{ x \mid x^2 - 7x + 10 < 0 \}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) =$ ()

A. $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ B. $(-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$

C. $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$ D. $(-\infty, 3] \cup [5, +\infty)$

2. 复数 z 满足 $z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} = 17$, 则 $|z + 2 - i|$ 的最小值为 ()

A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$

3. 下列命题中正确命题的个数是 ()

①对于命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $x^2 + x + 1 < 0$, 则 $\neg p: \exists x \in \mathbb{R}$, 均有 $x^2 + x + 1 > 0$;

②命题“已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 若 $x + y \neq 3$, 则 $x \neq 2$ 或 $y \neq 1$ ”是真命题;

③设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是非零向量, 则“ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ”是“ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ”的必要不充分条件;

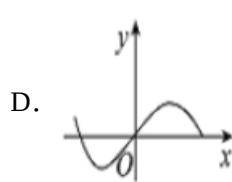
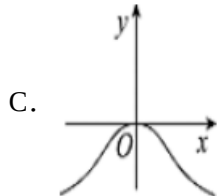
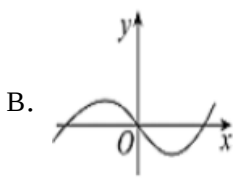
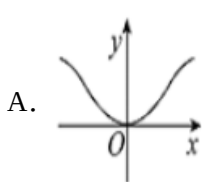
④ $m = 3$ 是直线 $(m+3)x + my - 2 = 0$ 与直线 $mx - 6y + 5 = 0$ 互相垂直的充要条件.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$, 且 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 则 $a_{10} =$ ()

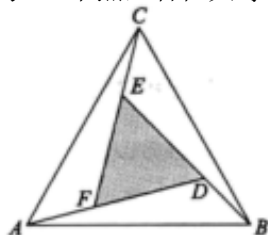
A. 2^9 B. $2^9 - 1$ C. 56 D. 46

5. 函数 $f(x) = x \left(\frac{2}{1+2^x} - 1 \right)$ 的图象大致为 ()



6. 类比“赵爽弦图”, 可类似地构造如图所示的图形, 它是由 3 个全等的三角形与中间的一个小等边三角形拼成的大等边三角形, 设 D 为 BE 中点, 若在大等边三角形中随机取一点, 则此点取自小等边三角形的概率是 ()

A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{4}{13}$



7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点是 F ，左、右顶点分别是 A_1, A_2 ，过 F 作 x 轴的垂线与双曲线交于 B, C 两点，若 $A_1B \perp A_2C$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}$

8. 已知函数 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + (m+n)x + 1$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2 ，且 $x_1 \in (0, 1)$ ， $x_2 \in (1, +\infty)$ ，记分别以 m, n 为横、纵坐标的点 $P(m, n)$ 表示的平面区域为 D ，若函数 $y = \log_a(x+4) (a > 1)$ 的图象上存在区域 D 内的点，则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(1, 3]$ B. $(1, 3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

二、多选题

9. 下列说法中，正确的命题是 ()

- A. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$ ， $P(\xi < 4) = 0.84$ ，则 $P(2 < \xi < 4) = 0.16$.
 B. 以模型 $y = ce^{kx}$ 去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设 $z = \ln y$ ，将其变换后得到线性方程 $z = 0.3x + 4$ ，则 c, k 的值分别是 e^4 和 0.3 .
 C. 已知两个变量具有线性相关关系，其回归直线方程为 $y = a + bx$ ，若 $b = 2$ ， $\bar{x} = 1$ ， $\bar{y} = 3$ ，则 $a = 1$.
 D. 若样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的方差为 2，则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$ 的方差为 16.

10. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x - 2\sin^2 x$ ，给出下列四个选项，正确的有 () .

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π
 B. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 上是减函数
 C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{8}, 0\right)$ 对称
 D. 函数 $f(x)$ 的图象可由 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，再向下平移 1 个单位得到.

11. 已知函数 $y = f(x)$ 是 R 上的奇函数，对任意 $x \in R$ ，都有 $f(2-x) = f(x) + f(2)$ 成立，当 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，且 $x_1 \neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ，则下列结论正确的有 ()

- A. $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2019) = 0$
 B. 直线 $x = -5$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴
 C. 函数 $y = f(x)$ 在 $[-7, 7]$ 上有 5 个零点 D. 函数 $y = f(x)$ 在 $[-7, -5]$ 上为减函数

12. 设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) + f(x) = x^2$, 且当 $x \leq 0$ 时, $f'(x) < x$. 已知存在 $x_0 \in \left\{x \mid f(x) - \frac{1}{2}x^2 \geq f(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right\}$, 且 x_0 为函数 $g(x) = e^x - \sqrt{e}x - a$ ($a \in R, e$ 为自然对数的底数) 的一个零点, 则实数 a 的取值可能是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{e}}{2}$ C. $\frac{e}{2}$ D. $\sqrt{e}$

三、填空题

13. 已知函数 $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程是 _____.

14. 函数 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{4}{5}$, 那么 $\sin 2x =$ _____.

15. 关于 x 的方程 $(2017 - x)(1999 + x) = 2016$ 恰有两个根为 x_1, x_2 , 且 x_1, x_2 分别满足

$3^{x_1} = a - 3x_1$ 和 $\log_3(x_2 - 1)^3 = a - 3x_2$, 则 $x_1 + x_2 + a =$ _____.

16. 菱形 $ABCD$ 边长为 6, $\angle BAD = 60^\circ$, 将 $\triangle BCD$ 沿对角线 BD 翻折使得二面角 $C - BD - A$ 的大小为 120° , 已知 A, B, C, D 四点在同一球面上, 则球的表面积等于 _____.

四、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角分别为 A, B, C , 已知 $\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos A$.

(1) 求角 A 的值;

(2) 若 $B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 且 $\cos(A - B) = \frac{4}{5}$, 求 $\sin B$.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n - 3$ ($n \in N_+$).

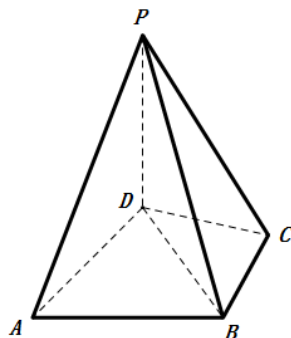
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{4n+1}{a_n}$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

19. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为四边形， $\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形， $BC \perp CD$ ， $BC = CD$ ， $PD \perp AB$ ，平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ 。

(1) 求证： $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若二面角 $C-PB-D$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ，求 PD 的长。



20. 某茶楼有四类茶饮，假设为顾客准备泡茶工具所需的时间互相独立，且都是整数分钟，经统计以往为 100 位顾客准备泡茶工具所需的时间 (t) ，结果如下：

类别	铁观音	龙井	金骏眉	大红袍
顾客数 (人)	20	30	40	10
时间 t (分钟/人)	2	3	4	6

注：服务员在准备泡茶工具时的间隔时间忽略不计，并将频率视为概率。

(1) 求服务员恰好在第 6 分钟开始准备第三位顾客的泡茶工具的概率；

(2) 用 X 表示至第 4 分钟末已准备好了工具的顾客人数，求 X 的分布列及数学期望。

21. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，并且经过定点 $P(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 问是否存在直线 $y = -x + m$ ，使直线与椭圆交于 A, B 两点，满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{12}{5}$ ，若存在求 m 值，若不存在说明理由。

22. 已知函数 $f(x) = x \ln x (x > 0)$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2) 若对任意 $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x) \geq \frac{-x^2 + mx - 3}{2}$ 恒成立，求实数 m 的最大值。