

江苏省仪征中学 2020 届高三年级第一学期 B 版午间 “3+1” (39)
2019 年 12 月 9

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 评价 _____

请将填空题答案填在横线上，并将每个题目的解答过程写在题目下方。

1. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $BD=2$, 且 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) = 5$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

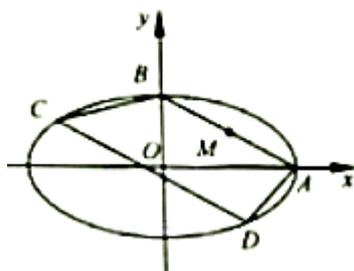
2. 已知 $x > 0$, $y > 0$, $x + y = \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$, 则 $x+y$ 的最小值为_____.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A, F 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点和右焦点, 过坐标原点 O 的直线交椭圆 C 于 P, Q 两点, 线段 AP 的中点为 M , 若 Q, F, M 三点共线, 则椭圆 C 的离心率为_____.

4. 如图, 在平面直角坐标系 xoy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点和上顶点分别为点 A, B , M 是线段 AB 的中点, 且 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}b^2$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 若 $a=2$, 四边形 $ABCD$ 内接于椭圆, $AB \parallel CD$, 记直线 AD, BC 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: $k_1 \cdot k_2$ 为定值.



1. 3

2. 3

3. $\frac{1}{3}$

4. (1) 解: $A(a, 0)$, $B(0, b)$, 线段 AB 的中点 $M(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b), \quad \overrightarrow{OM} = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}),$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}b^2,$$

$$\therefore -\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}b^2 = -\frac{3}{2}b^2, \text{ 化为: } a=2b,$$

$$\therefore \text{椭圆的离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

(2) 证明: 由 $a=2$, 可得 $b=1$,

\therefore 椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $A(2, 0)$, $B(0, 1)$,

直线 BC 的方程为: $y = k_2x + 1$, 联立 $\begin{cases} y = k_2x + 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 化为: $(1+4k_2^2)x^2 + 8k_2x = 0$,

$$\text{解得 } x_C = \frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \quad \therefore y_C = \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2},$$

$$\text{即 } C(\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}).$$

直线 AD 的方程为: $y = k_1(x-2)$, 联立 $\begin{cases} y = k_1(x-2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 化为: $(1 +$

$$4k_1^2)x^2 - 16k_1^2x + 16k_1^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore 2x_D = \frac{16k_1^2 - 4}{1+4k_1^2}, \text{ 解得 } x_D = \frac{8k_1^2 - 2}{1+4k_1^2}, \quad y_D = \frac{-4k_1}{1+4k_1^2}, \text{ 可得 } D(\frac{8k_1^2 - 2}{1+4k_1^2}, \frac{-4k_1}{1+4k_1^2})$$

$$\therefore k_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{化为: } 1 - 16k_1^2k_2^2 + 2k_1 - 2k_2 + 8k_1k_2^2 - 8k_2k_1^2 = 0.$$

$$\therefore (k_1k_2 - \frac{1}{4})(4k_1k_2 + 4k_1 - 4k_2 + 1) = 0,$$

$$\therefore k_1k_2 = \frac{1}{4}.$$