寒假名师课程　高三数学

函数的单调性、奇偶性、周期性
（巩固练习19讲评）

扬州市新华中学　葛文明

问题解决

1. 函数 f(x)是定义在 **R** 上的奇函数，且 $f(-3)=2$，则 $f(0)+f(3)=$________.

【解析】$f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，则 $f(-0)=-f(0)$，$f(-3)=-f(3)$，所以 $f(0)=0$，$f(3)=-2$，则 $f(0)+f(3)=-2$.

问题解决

2．定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$满足：对任意 x_1，$x_2 \in [0,+\infty)(x_1 \neq x_2)$，有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ 恒成立，则 $f(-2)$，$f(1)$，$f(3)$由小到大的排列顺序是__________.

【解析】因为 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，则 $f(-2)=f(2)$. 又任意 x_1，$x_2 \in [0,+\infty)(x_1 \neq x_2)$，有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ 恒成立，则任意 $x_2>x_1 \geq 0$ 时，$f(x_2)-f(x_1)<0$，所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上是单调递减函数．所以 $f(3)<f(-2)<f(1)$.

问题解决

3．已知 f(x)是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=3^x+m$(m 为常数)，则 $f(-\log_3 5)$的值为________.

【解析】由 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，得 $f(0)=1+m=0$，于是 $m=-1$，所以 $f(-\log_3 5)=-f(\log_3 5)=-(3^{\log_3 5}-1)=-4$.

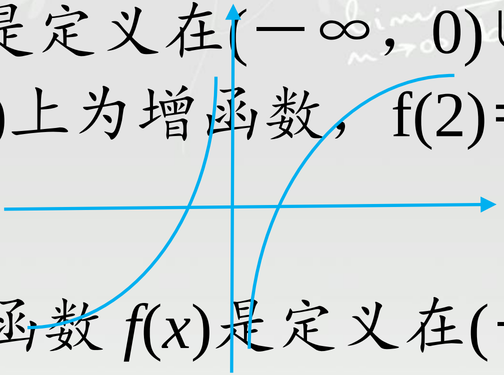
问题解决

4．已知偶函数 f(x)在[0，＋∞)上单调递减，f(2)＝0，若 f(x－1)＞0，则 x 的取值范围是__________.

【解析】因为 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，则 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$，所以 $f(x-1)>0$ 可化为 $f(|x-1|)>f(2)$，又 $f(x)$在[0，＋∞)上单调递减，所以$|x-1|<2$，解得$-1<x<3$.

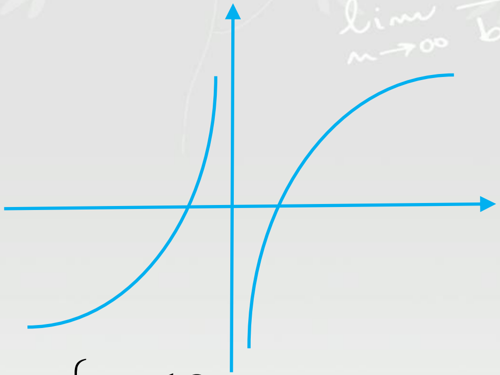
问题解决

5. 若函数 f(x)是定义在(－∞，0)∪(0，＋∞)上的奇函数，且 f(x)在(0，＋∞)上为增函数，f(2)＝0，则不等式 x·f(x)＜0 解集为__________.



【解析】因为函数 $f(x)$是定义在(－∞，0)∪(0，＋∞)上的奇函数，且 $f(x)$在(0，＋∞)上为增函数，$f(2)=0$，所以 $f(x)$在(－∞，0)上为增函数，$f(-2)=0$.由 $x\cdot f(x)<0$ 得 $\begin{cases} x<0, \\ f(x)>0, \end{cases}$

问题解决



或$\begin{cases} x>0, \\ f(x)<0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} x<0, \\ -2<x<0, \end{cases}$ 或$\begin{cases} x>0, \\ 0<x<2, \end{cases}$ 所以原不等式的解集为$(-2,\ 0)\cup(0,\ 2)$.

问题解决

$\left(\frac{1-4^x}{2^x}\right)' = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^x\right]'$，$(a^x)' = a^x \ln a$

6．已知函数 $f(x)=\sin x-x+\frac{1-4^x}{2^x}$，则关于 x 的不等式 $f(1-x^2)+f(5x-7)<0$ 的解集为________．

【解析】 $f'(x)=\cos x-1-\ln 2(2^{-x}+2^x)\leqslant \cos x-1-2\ln 2<0$

则函数 $f(x)$在 **R** 上是单调减函数．

又 $f(-x)=-\sin x+x+\frac{1-4^{-x}}{2^{-x}}=-\left(\sin x-x+\frac{1-4^x}{2^x}\right)=-f(x)$，

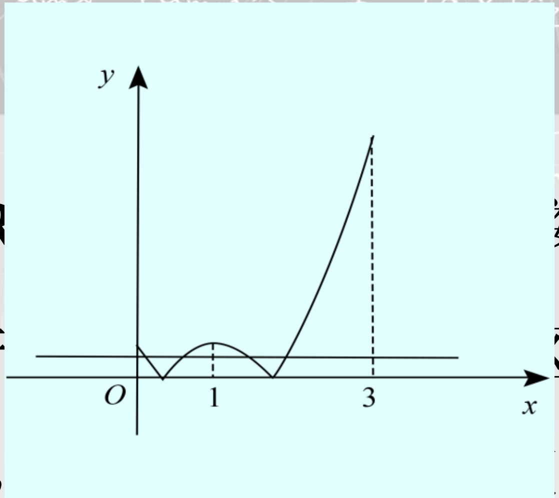
则函数 $f(x)$是奇函数，所以 $f(1-x^2)+f(5x-7)<0$ 可化为 $f(1-x^2)<-f(5x-7)=f(7-5x)$，即 $1-x^2>7-5x$，解得 $2<x<3$.所以，不等式 $f(1-x^2)+f(5x-7)<0$ 的解集为$(2,3)$.

问题解决

7.已知 f(x)是定义在 **R** 数，当 $x\in[0,3)$时，

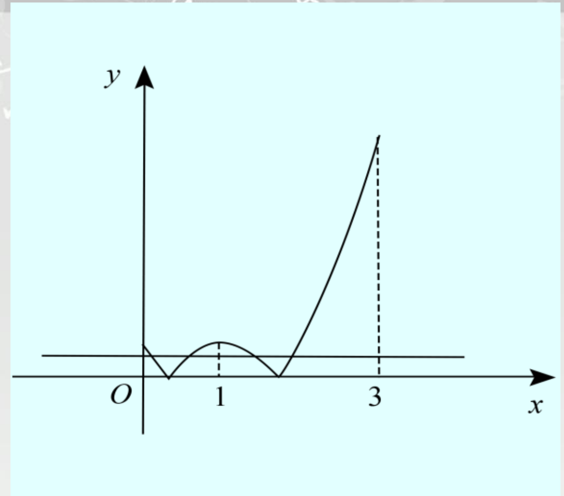
$f(x)=\left|x^2-2x+\frac{1}{2}\right|$，若 区间[−3，4]上有

10 个零点(互不相同)， 围是________.



【解析】作出函数 $f(x)=\left|x^2-2x+\frac{1}{2}\right|$，$x\in[0，3)$的图象，可见 $f(0)=\frac{1}{2}$，当 $x=1$ 时，$f(x)_{极大}=\frac{1}{2}$，$f(3)=\frac{7}{2}$，方程 $f(x)-a=0$ 在[−3，4]上有 10 个零点，即函数 $y=f(x)$与直线 $y=a$ 在

问题解决



[－3，4]上有 10 个公共点，由于函数 f(x)的周期为 3，因此直线 y＝a 与函数 $f(x)=\left|x^2-2x+\frac{1}{2}\right|$，x∈[0，3)的公共点数为 4，则有 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

问题解决

8.已知函数 $f(x)=ln\frac{x+1}{x-1}$.

(1)判断函数 f(x)的奇偶性，并给出证明；

(2)解不等式：$f(x^2+x+3)+f(-2x^2+4x-7)>0$.

【解析】(1)函数 $f(x)$是奇函数，证明如下：由$\frac{x+1}{x-1}>0$，得

$x<-1$ 或 $x>1$，函数 $f(x)$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

问题解决

8.已知函数 $f(x)=ln\frac{x+1}{x-1}$.

(1)判断函数 f(x)的奇偶性，并给出证明；

(2)解不等式：$f(x^2+x+3)+f(-2x^2+4x-7)>0$.

$$f(-x)=\ln\frac{-x+1}{-x-1}=\ln\frac{x-1}{x+1}=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=-\ln\frac{x+1}{x-1}=-f(x),$$

所以函数 $f(x)$是奇函数.

(2)任取 x_1，$x_2\in(1，+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\ln\frac{x_1+1}{x_1-1}$

$$-\ln\frac{x_2+1}{x_2-1}=\ln\frac{(x_1+1)\cdot(x_2-1)}{(x_1-1)\cdot(x_2+1)}=\ln\frac{x_1\cdot x_2+x_2-x_1-1}{x_1\cdot x_2+x_1-x_2-1},$$

问题解决

因为 $x_2>x_1>1$，所以 $x_1\cdot x_2+x_2-x_1-1>0$，$x_1\cdot x_2+x_1-x_2-1>0$，且$(x_1\cdot x_2+x_2-x_1-1)-(x_1\cdot x_2+x_1-x_2-1)=2(x_2-x_1)>0$，则$\dfrac{x_1\cdot x_2+x_2-x_1-1}{x_1\cdot x_2+x_1-x_2-1}>1$，所以 $f(x_1)-f(x_2)=\ln\dfrac{x_1\cdot x_2+x_2-x_1-1}{x_1\cdot x_2+x_1-x_2-1}>0$，则函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减函数．

问题解决

因为函数 $f(x)$是奇函数，所以 $f(x^2+x+3)+f(-2x^2+4x-7)>0$ 可化为：$f(x^2+x+3)>-f(-2x^2+4x-7)=f(2x^2-4x+7)$，

又 $x^2+x+3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>1, 2x^2-4x+7=2(x-1)^2+5>1$，

函数 $f(x)$在$(1，+\infty)$单调递减，所以 $x^2+x+3<2x^2-4x+7$，

解得 $x<1$ 或 $x>4$，则原不等式的解集为

$(-\infty，1)\cup(4，+\infty)$.

问题解决

9.已知二次函数 $f(x)=ax^2-4x+c$ 的值域为$[0，+\infty)$.

(1)判断此函数的奇偶性，并说明理由；

(2)求出 $f(x)$在$[1，+\infty)$上的最小值 $g(a)$，并求 $g(a)$的值域.

【解析】(1)由二次函数 $f(x)=ax^2-4x+c$ 的值域为$[0,+\infty)$,

得 $a>0$ 且$\dfrac{4ac-16}{4a}=0$，解得 $ac=4$.$\because f(1)=a+c-4$，$f(-1)=a+c+4$，$a>0$ 且 $c>0$，从而 $f(-1)\neq f(1)$，$f(-1)\neq -f(1)$，

$\therefore$此函数是非奇非偶函数.

问题解决

(2) $f(x)=ax^2-4x+c$，又 $a>0$，$x_0=\frac{2}{a}$，$x\in[1，+\infty)$．当 $x_0=\frac{2}{a}\geqslant 1$，即 $0<a\leqslant 2$ 时，最小值 $g(a)=f(x_0)=0$.当 $x_0=\frac{2}{a}<1$，即 $a>2$ 时，最小值 $g(a)=f(1)=a+c-4=a+\frac{4}{a}-4$.

问题解决

综上，最小值 $g(a)=\begin{cases}0，0<a\leqslant 2，\\ a+\dfrac{4}{a}-4，a>2，\end{cases}$

当 $0<a\leqslant 2$ 时，最小值 $g(a)=0$；当 $a>2$ 时，最小值 $g(a)=a+\dfrac{4}{a}-4\in(0，+\infty)$，综上 $y=g(a)$的值域为$[0，+\infty)$.

知识探源

谢谢聆听！