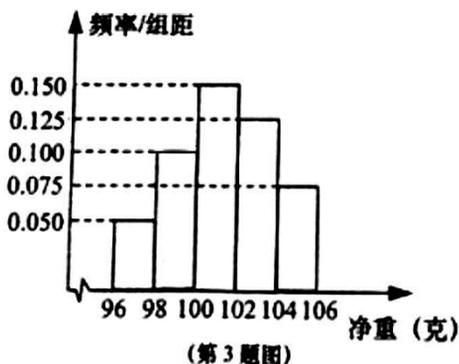


江苏省仪征中学 2020 届高三下学期数学周三限时训练 2

第 I 卷（必做题，共 160 分）

一、填空题

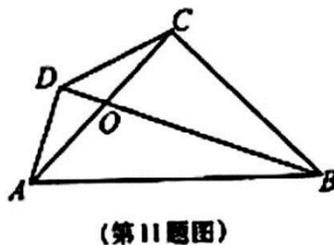
1. 设全集 $U=Z$, 集合 $A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{x \in Z \mid x^2 - x < 2\}$, $A \cap (\complement_U B) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 若复数 z 满足 $z+i = \frac{2+i}{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 某工厂为了了解一批产品的净重 (单位: 克) 情况, 从中随机抽测了 100 件产品的净重, 所得数据均在区间 $[96, 106]$ 中, 其频率分布直方图如图所示, 则在抽测的 100 件产品中, 净重在区间 $[100, 104]$ 上的产品件数是 .
4. 某医院欲从积极报名的甲、乙、丙、丁 4 名医生中选择 2 人去支援武汉抗击“新型冠状病毒”, 若每名医生被选择的机会均等, 则甲、乙 2 人中至少有 1 人被选择的概率为 .
5. 执行右边的伪代码后, 输出的结果是 .



```

I ← 1
S ← 0
While S < 27
    S ← S + 3I
    I ← I + 2
End While
Print I
    
```

(第 5 题图)



6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 设过右焦点 F_2 且与 x 轴垂直的直线 l 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点, 若 $\triangle F_1AB$ 是正三角形, 则双曲线 C 的离心率为 .
7. 已知函数 $f(x) = |\sin(\omega x + \varphi)| (\omega > 0)$, 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后, 所得图象与原函数图象重合, 则 ω 的最小值等于 .
8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{3}$, 且 $4S_3, 3S_4, 2S_5$ 成等差数列, 则满足不等式 $\frac{S_n}{a_n} > \frac{4039}{2020}$ 的 n 的最小值为 .

9. 在三棱锥 P—ABC 中, $AB \perp$ 平面 PAC, $PC=AB=2AC=2$, $PA=\sqrt{5}$, 则该三棱锥的外接球 O 的表面积为_____.

10. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y-5 \geq 0 \\ y-4 \leq 0 \end{cases}$, 若不等式 $mx^2y \leq 2x^3 + \frac{1}{8}y^3$ 恒成立, 则实数 m 的最大值是_____.

11. 如图, 在四边形 ABCD 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O. 已知 $AC=BC$, $AC \perp BC$, $AD \perp BD$, 且 O 是 AC 的中点, 若 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = 2$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的值为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 MN 在圆 C: $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 上运动, 且 $MN = 2\sqrt{3}$. 若直线 $l: kx - y + 3 = 0$ 上的任意一点 P 都满足 $PM^2 + PN^2 \geq 14$, 则实数 k 的取值范围是_____.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 2ax + a|, & x \leq 0 \\ \frac{e^x - ex}{x} + \frac{1}{3}a^2, & x > 0 \end{cases}$, 若存在实数 k , 使得函数 $y = f(x) - k$ 有 6 个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 CD 是边 AB 上的中线, 且 $CD=CA$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{\cos A}{\cos B}$ 的最小值为_____.

二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$.

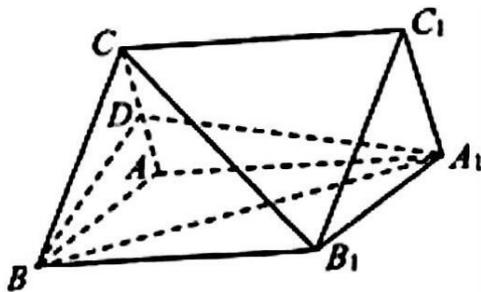
(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $a=2, c=3$, 求 $\cos(A - B)$ 的值

16. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, $AB=BB_1$, 且 $\angle ABB_1=60^\circ$; D 为 AC 的中点.

(1) 求证: $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD ;

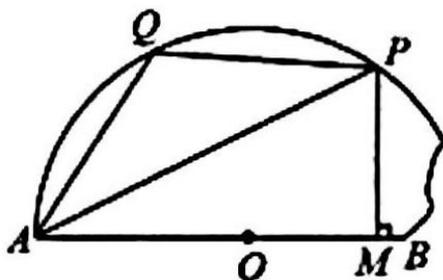
(2) 求证: $AB \perp B_1C$.



17. 现有一块废弃的半圆形钢板，其右下角一小部分因生锈无法使用，其形状如图所示，

已知该钢板的圆心为 O ，线段 AOB 为其下沿，且 $OA=2\text{m}$ ， $OB=\sqrt{2}\text{m}$ 。现欲从中截取一个四边形 $AMPQ$ ，其要求如下：点 P, Q 均在圆弧上， AP 平分 $\angle QAB$ ，且 $PM \perp OB$ ，垂足 M 在边 OB 上。设 $\angle QAB = \theta$ ，四边形 $AMPQ$ 的面积为 $S(\theta)\text{m}^2$ 。

- (1) 求 $S(\theta)$ 关于 θ 的函数解析式，并写出其定义域；
- (2) 当 $\cos \theta$ 为何值时，四边形 $AMPQ$ 的面积最大？

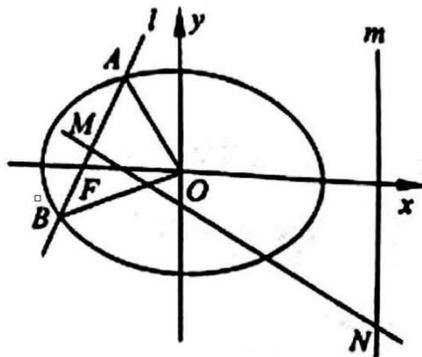


18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2，

且经过点 $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，过左焦点 F 且不与 x 轴重合的直线 l 与椭圆 C 交于点 A, B 两点。

- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 若直线 OA, OB, AB 的斜率之和为 0，求直线 l 的方程；
- (3) 设弦 AB 的垂直平分线分别与直线 l ，椭圆 C 的右准线 m 交于点 M, N ，求 $\frac{|MN|}{|AB|}$

的最小值。



19. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} - 1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数.

(1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在定义域上恰有两个不同的零点, 求实数 a 的取值范围;

(3) 设函数 $g(x) = e^x + \frac{1}{x} - f(x)$ 在区间 $(0, e^{-a})$ 上存在极值, 求证: $a^{-1} + e^{-a} > a + 1$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$.

(1) 若 $\frac{4S_n - 1}{a_n} = 2n + 1$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . ① 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等差

数列; ② 若不等式 $T_n + \frac{\lambda}{a_n} \geq 3$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 求实数 λ 的最小值;

(2) 若 $a_n > 0$, 且 $S_{n+1} \geq 2a_{n+1}$, 是否存在正整数 k , 使得无穷数列 $b_{k+1}, b_{k+2}, b_{k+3}, \dots$ 成公差不为 0 的等差数列? 若存在, 给出数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式; 若不存在, 请说明理由.

第 II 卷 (附加题, 共 40 分)

21. 【选做题】本题包括 A, B 两小题, 每小题 10 分共计 20 分, 解答时应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

A. 选修 4—2: 矩阵与变换

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 C, 使得 $AC = B$.

B. 选修 4—4: 坐标系与参数方程

在极坐标系中, 求直线 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho \in \mathbb{R}$) 被曲线 $\rho = 4\sin(\theta + \frac{\pi}{6})$ 所截得的弦长.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上一点 $M(\sqrt{2}, m)$ 到准线的距离与到原点 O 的距离相等.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 过不在 y 轴上的点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA, PB , 切点分别为 A, B , 若 $OP \perp AB$, 求证: 直线 AB 过定点.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 1$, 且 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n - 1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 的最小值;

(2) 求证: $\sum_{k=1}^n a_k > \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 2$.