递推法巧解一道2010年联赛加试题

龚新平
(上海市育才中学,201801)

在2010年全国高中数学联赛A卷加试题中出现了下面一道组合问题,标准答案中提供的解法是通过巧妙地构造转化从而加以解决,读后很让人折服!然而一般读者是很难想到的,本人尝试用两种不同的递推方法也轻松地解决了该问题,并在此过程中得到了几个简单的变式问题,供大家参考!

问题 一种密码锁的密码设置是在正n边形$A_1A_2\cdots A_n$的每一个顶点处赋值0和1两个数中的一个,同时在每个顶点处涂染红与蓝两种颜色之一,使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同,该种密码锁共有多少种不同的密码设置?

解法1 由题意可知顶点A_1有(1,红),(1,蓝),(0,红),(0,蓝)四种设置方法,设A_1为(1,红)时方法数为F_n,则总方法数为$4F_n$.当A_1为(1,红)时,每个点$A_2,A_3,\cdots,A_n$均有3种设置,但应排除A_n为(0,蓝)时的方法数G_n(如图1),此时考虑反向依次为点A_{n-1},$A_{n-2},\cdots,A_2$设置密码,只需从3^{n-2}种方法中排除A_2为(0,蓝)时的情况(因为A_1与A_2颜色与赋值均不相同),此时把A_2与A_n看成一个点,相当于给正$n-2$边形在A_2为(0,蓝)情况下设置密码,有F_{n-2}种方法,从而可建立递推式:$F_n=3^{n-1}-G_n$,$G_n=3^{n-2}-F_{n-2}$,即有$F_n=2\cdot3^{n-2}+F_{n-2}$,易知:$F_1=1,F_2=3$.

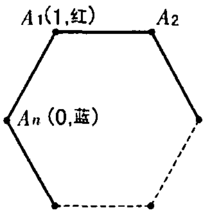

图 1

故当n为奇数时,$F_n=2\cdot3^{n-2}+2\cdot3^{n-4}+\cdots+2\cdot3^1+F_1=(3^n+3)/4$;当$n$为偶数时,$F_n=2\cdot3^{n-2}+2\cdot3^{n-4}+\cdots+2\cdot3^2+F_2=(3^n+3)/4$.

从而总有:$F_n=(3^n+(-1)^n+2)/4$,故符合题意的设置方法总数为$(3^n+(-1)^n+2)$.

解法2 由题意可知只需考虑A_1为(1,红)时的方法数为F_n,则总方法数为$4F_n$.当A_1为(1,红)时,点A_n分两类情况:

(1) A_n与A_1颜色与赋值有且只有一个相同,即A_n设置为(1,蓝)或(0,红),设此时方法数为Q_n;

(2) A_n与A_1颜色与赋值都相同,即A_n设置变为(1,红),设此时方法数为H_n,显然有$H_n=F_{n-1}$.

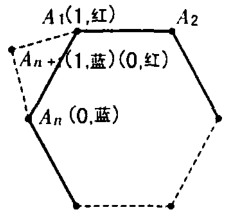

图 2

接下来考虑另外添加点A_{n+1}(如图2)时的方法数F_{n+1};对于(1)中的每种设置,A_{n+1}都有两种相应的设置满足,对于(2)中每种设置,A_{n+1}有三种相应的设置满足;对于不同的第三种情况:A_1(1,红),A_n(0,蓝),设该方法数为G_n,此时A_{n+1}有(1,蓝),(0,红)两种设置满足,故可建立递推式:$F_n=Q_n+H_n$,$F_{n+1}=2Q_n+3H_n+2G_n$,$G_n=3^{n-2}-F_{n-2}$,联立可得:$F_{n+1}=2F_n+F_{n-1}+2\cdot3^{n-2}-2F_{n-2}$,进一步变形,得

$(F_{n+1}+F_n)=3(F_n+F_{n-1})-2(F_{n-1}+F_{n-2})+2\cdot3^{n-2}$,若令$T_n=F_{n+1}+F_n$,则$(T_n-3^n)=3(T_{n-1}-3^{n-1})-2(T_{n-2}-3^{n-2})$,再令$S_n=T_n-3^n$,得$S_n=3S_{n-1}-2S_{n-2}$,由其特征方法$x^2-3x+2=0$的两根分别为1,2可设$S_n=\alpha+\beta\cdot2^n$,易

自学成才的数学大师华罗庚

郑　良
(安徽省灵璧第一中学, 234200)

华罗庚是我国数学界的泰斗,美国《科学》杂志曾发表文章说:"华罗庚形成了中国的数学";是世界著名数学家,被列为芝加哥科学技术博物馆中当今世界 88 位数学伟人之一,美国著名数学史家贝特曼著文称:"华罗庚是中国的爱因斯坦,足够成为全世界所有著名科学院院士".在 2009 年 9 月 10 日,当选"100 位新中国成立以来感动中国人物"之一.尽管他谢世多年,但是他的事迹、学问、品质和精神却影响着一代又一代人.

华罗庚(1910 - 1985),江苏金坛人.从小酷爱数学,在初中时曾一度因顽皮数学不及格,数学老师王维克发现其思维敏捷,解题方法独特,尽心尽力地栽培他.华罗庚幸遇良师,学习变得积极主动,钻研数学的兴趣也越来越浓.在恩师的鼓励和帮助下,他在数学王国里努力地探索,接触了微积分,更与数论结下了不解之缘.在初中毕业后考取了上海中华职业学校,但因家境贫困,不得不放弃还差一学期就毕业的机会,辍学回到金坛一边帮助父亲料理杂货铺,一边自学数学.

1928 年,在校长王维克的照顾下,华罗庚在金坛中学担任学校会计、庶务员兼教初中补习班的数学.1929 年冬天,他得了严重的伤寒症,经过近半年的治理,病虽好了,但左腿的关节却受到严重损害,落下了终身残疾,走路要借助手杖.由于王维克的辞职,华罗庚虽保住了会计工作,但不能继续教补习班的教学,这样他有更多的时间在昏暗的煤油灯下勤

知 $F_1=1,F_2=3,F_3=7$,故有 $S_1=S_2=1$,进而 $\alpha=1,\beta=0$,即 $S_n\equiv1$,故 $F_{n+1}+F_n=3^n+1$.

若设 $F_{n+1}-(\lambda\cdot3^{n+1}+t)=-(F_n-(\lambda\cdot3^n+t))$,取 $\lambda=1/4,t=1/2$,则 $F_n-(\frac{1}{4}\cdot3^n+\frac{1}{2})=(F_1-(\frac{1}{4}\cdot3+\frac{1}{2}))(-1)^{n-1}$,而 $F_1=1$,故得 $F_n=(3^n+(-1)^n+2)/4$,故符合题意的设置方法总数为 $(3^n+(-1)^n+2)$.

由上面解法 2 不难得出下面三个变式问题:

变式 1　同前问题中的条件,若使得某条指定边的两个顶点颜色与赋值有仅有一个相同,其余任意相邻两个顶点数字或颜色中至少有一个相同,问共有多少种不同的密码设置?

解　不同的密码设置方法数为 $X_n=4Q_n=4(F_n-F_{n-1})=2(3^{n-1}+(-1)^n)$.

变式 2　同前问题中的条件,若使得某条指定边的两个顶点颜色与赋值均相同,其余任意相邻两个顶点数字或颜色中至少一个相同,共有多少种不同的密码设置?

解　不同的密码设置方法数为 $Y_n=4H_n=4F_{n-1}=(3^{n-1}+(-1)^{n-1}+2)$.

变式 3　同前问题中的条件,若使得有仅有一条边的两个顶点颜色与赋值均不相同,其余任意相邻两个顶点数字或颜色中至少有一个相同,问共有多少种不同的密码设置?

解　不同的密码设置方法数为 $Z_n=C_n^1\cdot4G_n=4n(3^{n-2}-F_{n-2})=n(3^{n-1}+(-1)^{n-1}-2)$.

(收稿日期:2010 - 11 - 01)