○高考复习研究○

以微带面　精准教学*

——高三二轮复习课“立体几何中的作图问题”教学实录与感悟

蔡海涛

(福建省莆田第二中学,351131)

2019 年 4 月 2 日 - 4 日,福建省第三批高中数学基地学校研讨活动在厦门集美中学举行. 研讨的主题是解决高中数学教育教学实践中存在的重难点问题,提升教育质量. 会议期间,笔者应邀开设了一节高三微专题复习课“立体几何中的作图问题”. 现将这节课的教学过程、设计意图、课后感悟整理成文,以期抛砖引玉.

一、教学过程

1. 切入主题

师: 我们知道解决立体几何问题需要一定的空间想象能力,研究往往从图形开始,这就要求我们要有识图、作图、用图的能力. 作图问题就是定性几何图形的位置关系,而在立体几何中最重要的位置关系就是平行和垂直. 今天就和同学们一起来研究立体几何中涉及平行和垂直的作图问题.

设计意图　开门见山,直奔主题,提高课堂效率,符合高三数学复习课的特点,同时让学生感受学习这节课的必要性,提升学习的兴趣.

2. 平行问题

师: 请同学们看例 1,先考虑第 1 小题.

例 1　(人教 A 版必修 2 第 63 页 B 组第 1 题改编) 一三棱锥形木块如图 1 所示,点 P 在平面 VAC 内,D、E 分别为棱 AB、VB 中点.

(1) 过点 P 和直线 DE 将木块锯开,应该怎样画线?

(2) 过点 P 将木块锯开,使截面平行于直线 VB 和 AC,应怎样画线?

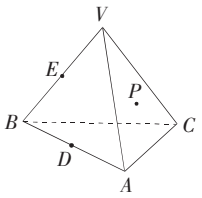

图 1

生 1: 点 P 和 DE 确定一个平面,连结 PD,PE,DE,即为所求画线.

师: P、D、E 三点共面,但题意要求的画线是画在如图 1 三棱锥(木块) 的表面上,所以实质上是要画出平面 PDE 与三棱锥表面的交线,直线 PD,PE 就不符合要求了. 那么我们该怎么画呢?

生 2: 过点 P 作 MN 平行于 VA,交 AC 于 M,交 VC 于 N,连结 DM、NE、ED,即为所求画线.

师: 回答正确,你是怎么想到的?

生 2: 首先注意到 DE 与平面 VAC 平行. 根据线面平行的性质,平面 PDE 与平面 VAC 的交线与直线 DE 平行,又因为 $DE \parallel VA$,所以作 VA 的平行线 MN,然后再连结 D、M、N、E 各点就好了.

师: 非常好,画两个平面的交线,常常要观察线面平行的关系,根据线面平行的性质,

* 本文系福建省基础教育课程教学研究课题“高中数学主干知识教学落实核心素养的研究——以函数、立几、数列为例”(课题编号: MJYKT2018 - 056) 研究成果.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

得到两平面的交线. 另外,同学们在过一点作已知直线的平行线时,要在同一个平面内作出,本题如过点 P 作 MN 平行 DE 就不合理了. 接下来请同学们看第 2 小题.

生 3: 过点 P 作 FG 平行 AC,交 VC 于 F,交 VA 于 G; 过点 G 作 GH 平行 VB,交 AB 于 H; 过点 H 作 HI 平行 AC,交 BC 于 I,连结 IF,则平面 $FGHI$ 即为所求.

教师投影例 1 的解答过程.

设计意图　引导学生初步感受立体几何中的作图问题,明确几何作图的每个环节都需要有理有据. 涉及平行关系的作图问题,一般根据平行的性质,来寻找求解问题的途径.

变式　如图 2,边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,BC 的中点. 将 $\triangle DAE$,$\triangle DCF$ 分别沿 DE,DF 折起,使 A,C 重合于点 P,如图 3. 在棱 PD 上找点 G,使得 PB // 平面 EFG,并说明理由.

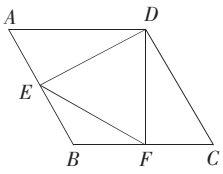

图 2

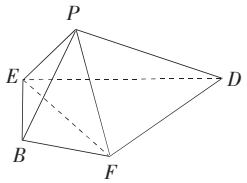

图 3

学生思考、练习后,教师投影生 4 的解答:

解　当 $\frac{PG}{GD}=\frac{1}{3}$ 时,PB // 平面 EFG. 证明如下:

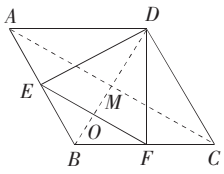

图 4

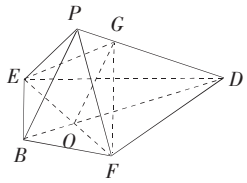

图 5

如图 4、5,在菱形 $ABCD$ 中,连结 AC,BD 设 $BD\cap EF=O$,$BD\cap AC=M$.

又 E,F 分别是 AB,BC 的中点,所以 $\frac{BO}{OD}=\frac{1}{3}$. 连结 OG. 由 $\frac{PG}{GD}=\frac{BO}{OD}=\frac{1}{3}$,知 PB // OG.

因为 $OG\subset$ 平面 EFG,$PB\not\subset$ 平面 EFG,所以 PB // 平面 EFG.

师: 答案正确,书写规范,真棒! 对于 $\frac{PG}{GD}=\frac{1}{3}$ 这个关系式,你是如何想到的?(提问生 4)

生 4: 先假设 PB // 平面 EFG,则可根据线面平行的性质,直线 PB 必与过 PB 的平面与平面 EFG 的交线平行. 连结 BD,发现两平面的交线即为 OG; 然后在 $\triangle BPD$ 中,由 $\frac{PG}{GD}=\frac{BO}{OD}$,即得到 G 点的位置.

师: 对于探究性问题,一般是先假设结论成立,通过这个结论来发现性质,确定几何图形的特征.

设计意图　通过例 1 及例 1 变式,分析这两道题中立几作图平行问题的共性,都是从平行关系的性质入手,确定几何图形的位置关系,然后再作出图形.

3. 垂直问题

师: 请同学们看例 2,先完成第(1)问.

例 2　如图 6,长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=16$,$BC=10$,$AA_1=8$,点 E,F 分别在 A_1B_1,D_1C_1 上,$A_1E=D_1F=4$,面 A_1C_1 上有一点 O.

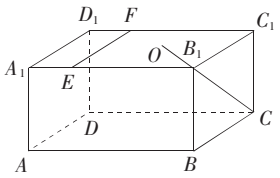

图 6

(1)(人教 A 版必修二 78 页 B 组第 1 题改编) 经过点 O 在平面 A_1C_1 上画一条直线与直线 CO 垂直;

(2)(2015 年高考全国Ⅱ卷·理 19) 过点 E,F 的平面 α 与此长方体的面相交,交线围成一个正方形,在图中画出这个正方形(不必说

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

出画法和理由).

生5:在(1)问中,连结OC_1,在面A_1C_1上,过点O作一直线与OC_1垂直,即为所求.

师:(追问)你是如何利用已有的垂直关系作图的?

生5:首先发现$CC_1 \perp$平面A_1C_1,所以所求直线必与平面CC_1O垂直,因此只需在面A_1C_1上作OC_1垂线即可.

师:非常好.对于垂直关系的作图,与平行关系的作图类似,也是先去寻找原有的位置关系,再利用性质解题.这道题关键就是要发现$CC_1 \perp$平面A_1C_1,然后去构造垂直(过点O作一直线与OC_1垂直),从而得到新的线面垂直关系(所求直线垂直平面CC_1O),再得到所求直线垂直CO.

设计意图　例2的解题策略是寻找已有线面垂直关系,构造线线垂直,得到新的线面垂直关系.这种方法也是经过平面α外一定点P向平面α内一条定直线AB引垂线的常用方法.即先经过P点作平面$PO \perp \alpha$于O,再过O作$OH \perp AB$于H,连结PH,为所求该模型,即三垂线定理的模型.

(片刻后)投影生6例2第(2)的解答:

解　(2)交线围成正方形$EHGF$,如图7.

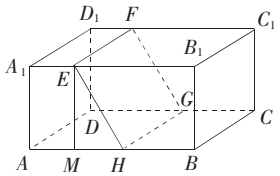

图7

师:(追问)你确定你所画的图形是正方形?点H在什么位置?

生6:因为平面AC // 平面A_1C_1,平面AB_1 // 平面DC_1,所以平面α与此长方体的面相交的交线围成的四边形为平行四边形,又EF垂直平面AB_1,所以该平行四边形为矩形.因此只需考虑$EF = EH = 10$,即满足题意在矩形ABB_1A_1中,可求得$AH = 10$.

师:很好.作长方体截面,要充分利用平行垂直关系,先判断截面图形的形状确定位置关系再确定长度(角度).

设计意图　涉及垂直关系问题的作图,引导学生观察已有的垂直关系,通过在某个平面作线线垂直,得到新的线线垂直或线面垂直,即一般通过线面垂直与线线垂直关系的互相转化来处理.

4. 巩固提升

练习　(2019年福州市高三质检·文19)如图8,四棱锥$E-ABCD$,平面$ABCD \perp$平面ABE,四边形$ABCD$为矩形,$AD = 6$,$AB = 5$,$BE = 3$,F为CE上的点,且$BF \perp$平面ACE.

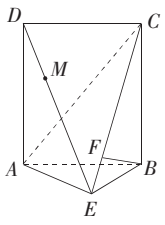

图8

(1)求证:$AE \perp BE$;(略)

(2)设M在线段DE上,且满足$EM = 2MD$,试在线段AB上确定一点N,使得MN // 平面BCE,并求MN的长.

学生练习过程略.

设计意图　通过练习,进一步提升同学们立几作图的能力,引导学生归纳平行与垂直的作图的一般方法.作图方法的多样性可引导学生多角度思考问题.

5. 归纳总结

师:请同学们交流总结下本节课的学习心得.

生交流总结:通过本节课的学习,我们体会到立体几何中如何更好地识图、作图、用图,如何利用平行、垂直的性质去解决涉及平行、垂直的作图问题,在作图中提升空间想象能力,书写中提升推理论证能力.

二、教学感悟

1. 微专题究竟微在哪?

高三二轮专题复习中,教师通常围绕热点问题开展微专题复习.“微专题”的“微”要

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

立足学生的学情(学生哪个模块哪个类型题目比较薄弱?为什么比较薄弱?),要求切口小、针对性强. 只有“微”到点上,才能做到精准教学,复习高效[1]. 本节课围绕“立体几何中的作图问题”设计教学,利用平行和垂直两种关系的作图,讲明作图的原理,培养模型意识,涵盖了立体几何中线线、线面、面面平行垂直关系的转化,培养了空间想象、推理论证等能力,发展了数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算的数学学科核心素养,起到了以微带面的效果.

2. 高三复习应回归教材

在高考中,立体几何的作图题多次出现,如2018 年全国Ⅲ卷文科第 19 题,2016 年全国Ⅰ卷文科第 18 题;2016 年四川卷理科第 18 题;2013 年福建卷理科第 19 题;2013 年福建卷文科第 18 题;2013 年湖北卷理科第 19 题;2013 年四川卷理科第 19 题,文科第 19 题;2013 年安徽卷理科第 15 题、文科第 15 题;2009 年安徽卷理科第 18 题;2002 年全国卷文科第 22 题等. 这些作图题蕴含着空间想象,推理论证,考查了立体几何中最重要的两项基本功. 所以说高三立体几何的备考一定要落在“基础”上,要回归教材. 基于此,笔者在例题的选择上,都是以课本的例题为母题,然后再进行变式. 通过变式,可以发现很多高考题都是源于教材,希望以此来引发学生和听课教师对回归教材的思考,让师生在备考时真正做到回归教材,聚集高考.

参考文献

[1] 王岳. 以微知广 以点带面——高三二轮复习课“多元变量问题处理方法研究”的教学实录与感悟[J]. 中学数学月刊,2018(11):31-34.

(上接第 17 页)

$2\sqrt{a^2\cdot\frac{b^2+1}{2}}$,所以 $a\sqrt{1+b^2}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

方法 3　令 $a=\cos\theta$,$b=\sqrt{2}\sin\theta$,则

$$a\sqrt{1+b^2}=\cos\theta\cdot\sqrt{1+\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{\cos^2\theta(1+\sin^2\theta)}$$
$$=\sqrt{(1-\sin^2\theta)(1+\sin^2\theta)}.$$

方法 4　方程 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$ 从形的角度可以看成一个椭圆,而所求的式子也只要找到它的几何意义即可.

说明　方法 1 采用消元的思想,将所求式子变为只含有一个变量 a 的函数. 题中还用到一个技巧,处理根式的问题,可把 a 放到根号里面,也可以对式子 $a\sqrt{1+b^2}$ 平方. 方法 2 也是常见思路,利用基本不等式求最值,但技巧性比较强,因为大部分学生对基本不等式的逆用 $xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}$ 不熟练,那样需要创造和“$x+y$”的定值,所以需要在等式 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$ 两边同时加$\frac{1}{2}$. 方法 3 使用椭圆的参数方程把变量 x,y 转为只用一个变量 θ 表示,简化运算. 方法 4 使用线性规划即式子的几何意义求解,但 $a\sqrt{1+b^2}$ 不具备任何几何意义.

在高三教学中,加强推理训练,每一步怎么想到的,用了什么知识?什么方法?都要做到步步有根据. 例题讲解可以一题多解,一法多用,一题多变,积极构造运算程序,提高运算能力.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S],北京:人民教育出版社. 2018. 1.

[2] 杨宇. 高中数学教学中运用化归思想的案例分析[D]. 天津:天津师范大学,2012.

[3] 朱艳宇,何亮. 中学数学教学中数学文化教育初探[J]. 林区教学 2016,(3):76-77.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net