提高解题能力从数学阅读开始

冯福华　董　涛
福建师范大学数学与统计学院（350007）

1 引言

近几年的数学高考卷中出现了一个新的趋势，加强了对统计内容的考查，阅读的篇幅加大，这说明高考对学生的数学阅读能力的要求在提高．在任子朝等[1]的调查研究中表明学生不能很好地接受新颖的题目，得分率普遍较低．提高学生的数学阅读能力首当其冲．

数学阅读的范围宽泛，比如教材的阅读，习题的阅读，课后资料的阅读等等．笔者这里主要讨论对数学解题中对题目的阅读．数学解题过程包括弄清题意、制定计划、执行计划和检验反思．对数学题目的阅读，主要在弄清题意阶段．弄清题意包括读题、部分的分析与探索．解题过程是否流畅，源头在于学生能否弄清题意．弄清题意就是弄清条件是什么、要解决的问题是什么和问题的实质是什么．包括解释、举例、分类、概括、推论、比较、区分要害、重新组织题意、弄清问题实质．

在数学阅读的过程中，元认知的参与必不可少，包括元认知知识和元认知技能．元认知知识如题目认识方面的知识、策略性知识等．元认知技能如监控与调节：注意到问题的所有条件了吗？条件是明显还是模糊？正确了解目标状态了吗？目标状态是明显还是模糊？是否评估了自己现有知识和问题的关系？学生在解题的过程中会遇到一些障碍，比如对考查的知识记忆模糊、对问题的类型不清楚、忽略关键字、思维定式等等．这些问题都来自学生没有养成一个良好阅读题目的习惯．学生总是在解题上受挫，学习数学的信心必将下降．

读懂题目是解题的前提，那么怎样的读题过程才是有益于解题的呢？下面就以 2019 年高考全国Ⅱ卷理科第 20 题为例进行分析．

2 题目的阅读理解过程

题目 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

（2）设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线．

2.1 分析题目的类型

首先看到一道题要能判断出题目的类型，每种类型的题目有基本的解法、必须满足的条件．有针对性地搜索关键信息，发掘隐含信息，能够帮助学生做出预见．

此题是一道典型的导数求单调性、零点的问题．其次对题干和问题进行解释．题目背景是由指数函数和分式函数复合构成的超越函数．由问题表征知要会对这两种类型的函数进行求导、注意定义域．清楚证明零点存在的方法以及对零点分布的情况作出判断，用数学符号语言将问题翻译过来理解．最后清楚问题的实质，证明一条公切线的存在即证明两条曲线上的两点构成的直线与两曲线都相切，即证明两切点在两曲线上的斜率与两切点求出的斜率相等．

2.2 把握题目目标、搜索关键信息

讨论函数的单调性，并证明有且仅有两个零点．零点问题需讨论函数的单调性，由单调性判断零点的个数．怎么判断在区间上有零点？由零点存在性定理：若在开区间内存在两点 a,b 使得 $f(a)<f(b)<0$，则可判断有零点．在有零点的情况下，进而分析有几个零点．“有且仅有”说明有零点而且只有两个零点，由第一步可知定义域由两部分构成 $(0,1)$，$(1,+\infty)$．由此作出猜测，函数要么分别在两个区间内单调且穿过 x 轴，要么只在某一个区间上有两个零点．证明“曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 的切线也是 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线”，即这条切线是一条公切线，在某点的切线可通过求导得到斜率，证明其斜率相等，借助图象帮助理解．可用条件：x_0 是 $f(x)$ 的零点即 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$．

2.3 挖掘隐含信息

数学语言有高度概括性和抽象性的特点．学生需要在自然语言、图象语言与符号语言中灵活的转

换．往往题目越简洁明显可用的条件就越少，需要挖掘其中隐含的条件．

此题中隐含的条件有定义域．函数由对数函数和分式函数复合组成，对数函数的定义域保证真数大于零，分式函数的定义域保证分母不为零．隐含的信息还有在点 A 处的斜率，需求出 $y=e^x$ 在某点的斜率，以及这条切线的斜率．若能证明这三个斜率是相等的，就可说明其切线是一条公切线．

2.4 联想与匹配

看到问题若可直接利用公式、定理、法则进行解决则不需要联想，若在读题的过程中对题目感到陌生则要在脑海里进行搜索相同或相近的图式，根据图式分析问题．

此题并不是一道新颖题，在 2016 年的全国理数 2 中填空题第 16 就考过．填空题是已知这条公切线，求公切线中的参数问题．而此题是要证明存在一条公切线，问题的本质都是考查导数的几何意义，基本方法是设点求斜率，只是问法不一样．

2.5 监控与反思

整个读题的流程下来，要对各个环节进行监控．检查各个环节有没有偏离方向，及时进行调整，一步步完善对题目的理解．完整地读题之后，要对读题过程进行反思．题目的分析是否正确？条件都利用了吗？这样想会走弯路吗？拟定的计划执行起来会不会有困难？无论在读题中、解题中、解题后反思都是非常重要的环节，只有不断地反思才能在各个环节中少犯错误从而逐渐完善解题．

3 数学阅读的教学策略

数学语言的高度概括性和抽象性，使得数学阅读有别于一般阅读．数学阅读是一个需要不断假设、验证、想象、推理的过程．学生往往不注重数学阅读，尤其忽略对教材阅读．学生认为只要会模仿做题就行了．但实际情况是学生在做题的过程中也屡屡受挫，有思路但过程不完整，过程完整但结果不对，没有一个正确的解题过程．数学解题实质是考查学生对数学概念、命题的掌握情况．教师在教学的过程中要使用适当的教学策略进行数学阅读，例如从理解的几个方面，如解释、分类、比较、举例、说明入手，帮助学生提高数学阅读的效率．

3.1 元认知策略

元认知策略包括计划策略、监测策略、调整策略．实践研究表明，阅读的元认知策略是最有效的策略．在进行数学阅读教学的最初，制定好阅读计划，明确目标，选择可行的方法．在阅读的过程中，时刻提醒自己选择的目标是否正确，选择的信息对自己要解决的问题是否有帮助，有没有走弯路，能够识别出哪些地方需要泛读而哪些地方需要精读，在精读的时候要读出哪些东西．在阅读的后期，对阅读过程中可行和不可行之处作出反馈，搜集信息对后期阅读进行调整，排除障碍优化策略．

例如在本题的阅读时，首先明确目标是导数的证明题，题目简短需要挖掘的信息多，需要对题干和问题进行细致的分析．其次在精细阅读时，找出有关的信息，如定义域是什么，怎么证明其有两个零点，回忆关于零点存在证明的方法，这些都可以写在题干旁．第二小问中看出问题的本质—求切线的问题实质是求斜率的问题，也即导数的几何意义．例如：“已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$，若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．”从题干入手，由元认知策略的指导发现可以与二次函数进行类比，脑海里出现与二次函数有关的图式．求 a 的取值范围其实质还是讨论函数的单调性，已知有两个零点是对讨论进行了限制，即在满足有两个零点的情况下求出 a 的范围才是正解，一个零点、三个零点、无零点等都不符合要舍去．读完之后反思读题过程中出现的问题，进行修改．

3.2 指导策略

数学阅读过程中遇到阻碍，教师可以提示学生，帮助学生继续读下去．在教学中教师先对教学计划作出预判，判断学生在哪些地方会想不通，比如概念混淆不清、悟错题意、忽略条件，这时教师要做怎样的提示．比如是粗略地给点提示还是进行详细的示范，可根据阅读的内容进行选择．教师在对学生进行读题示范时，要示范对题分类．对题目进行解释即可把题目从文字语言转化成用符号语言表示或者用图象表示．在遇到不熟悉的表达时可让其与原有认知进行比较，在学生的最近发展区进行激活．

教师可将题目转换成学生熟悉的表达方式，例如本题的第一小问改成“证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点”．读题分析时教师可给出提示求零点问题即求函数的单调性，由单调性讨论有没有零点，即将这个问题换一种说法就是第（1）问的说法．同样地，

“已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 有两个零点，求 a 的取值范围”．看似不熟悉，实则是同样的问题，都是讨论函数的单调性．

透过现象看到问题的本质，学生在读题时要善于将不熟悉的问题转化为自己的语言去理解，善于将问题进行归类，可以由一道题学会解决一类题．绝大多数情况下可以借助图象来帮助理解题意，边画边理解，如点在图象上时怎么用数学符号表示，尽可能地把已知条件在图上标出．教师边读题边写下关键信息，对每一个信息进行自我解释，这个条件对解题是什么作用，如果是有用条件说出其用处，支撑这一步的理由是什么；如果遗漏条件说出为什么会遗漏，哪方面知识有欠缺，不停地进行自我解释．学生在以后的学习中按照教师的做法学会自我解释，不断说出每一解题步骤存在的理由，发现自己空缺的知识，不断地填补空缺．

3.3 问、思、说策略

数学学习中少不了多问、多思考、多表达．苏霍姆林斯基说：“让学生变聪明的方法，不是补课，不是增加作业量，而是阅读、阅读、再阅读．”数学的教学也是语言的教学，通过数学阅读提高自学能力．带着问题阅读，在阅读中思考，在阅读后进行表述．数学阅读培养学生发现和提出问题的能力，培养学生的逻辑推理能力，学会数学阅读将使学生终生受益．学生可以用出声思考法进行阅读，在阅读时多问为什么要这样写，自己的理解是什么，自己可不可以将其进行改编．思考该题考查的知识点是什么，概念是否清晰，此处有没有陷阱，以前犯过错误的吗？考虑全面了吗？以前有见过类似的题型吗？自己是怎么去处理的，涉及到了哪些数学思想方法，能用什么方法去解决．

经过前面两个步骤，学生已经在头脑中构建了思路，可以两个学生为一组，一个学生向另一个学生说出自己的思路，在这个过程中另一个学生要对他的说法给出评价．也可以让学生向教师和同学说出自己的思路，在说的过程中教师根据学生所述给出建议，对可行的思路给予肯定，对不恰当的思路让学生之间进行讨论或者提出修改建议．这样做不仅使学生可以发现自己的不足之处，教师也可以从中获得新的想法，可以碰撞出新的思想火花．

参考文献

[1]任子朝，陈昂，赵轩．加强数学阅读能力考查 展现逻辑思维功底[J]．数学通报，2018（6）：8-13

[2]董涛．初中数学教学融入数学文化的途径与策略[J]．福建基础教育研究，2020（5）：58-61

[3] L．W．安德森等．皮连生主译．学习、教学和评估的分类学 布卢姆教育目标分类学修订版（减缩版）[M]．上海：华东师范大学出版社，2008

[4]候坤英．让读书成为学生的一种习惯[J]．现代教育，2013（18）：84

浅析函数凹凸性的一类应用

李志廉　　福建省莆田第六中学（351111）

1 函数凹凸性的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对 I 中的任意两点 $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$，和任意 $\lambda\in(0,1)$，都有 $f(\lambda x_1)+f((1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是区间 I 上的凹函数．

我们亦可以取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，这与上述定义是等价的．如果把“$<$”换成“$>$”，函数 $f(x)$ 是凸函数．

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，且二阶可导，如果 $f''(x)\geq 0$（仅允许存在孤立的零点），则称 $f(x)$ 是区间 I 上的凹函数．

如果把“$\geq$”换成“$\leq$”就是凸函数．

2 函数凹凸性的几何解析

解析 1 设曲线 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对曲线 $f(x)$ 上任意两点 A, B，弦 AB 始终位于曲线 $f(x)$ 的上方，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的凹函数．

解析 2 设曲线 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对曲线 $f(x)$ 上任意点 A，曲线在点 A 处的切线始终位于曲线 $f(x)$ 的下方，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的凹函数．

如果把“上方”与“下方”对调，函数 $f(x)$ 就是凸函数．如下图 1 为凹函数，图 2 为凸函数．

上述的定义与几何解析是等价关系，且函数 $f(x)$ 为凹函数 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 为增函数 $\Leftrightarrow$ $f''(x)\geq 0$（仅允