目　　录

序　　言

本书的大部分篇幅对读者的数学专门能力要求很低；他可以是一个现在刚开始接触数学的中学生，也可以是一个早就扔下数学，而且把许多过去懂得的东西都忘掉了的人。但是另一方面，除了第一章以外，这本书是数学的——换句话说，它精细地对一些相当抽象的概念进行了推理和说明。因此，我是准备让对这些材料感兴趣的读者化一点功夫的，他们要经常不断地自己把事情想透，有时还需要做一些布置的习题。在书的最后给出了其中一些习题的解答。但是读者在解题中的任何一个地方时间过长地停滞不前是没有好处的；很多想法在后面要重复，在看第一遍的时候，可能在一个地方卡住了，看第二遍的时候就懂了。作者的这个表达方式是受了数学的本性的限制所致。解释一个数学概念的全部关键性说明是不可能一次讲完的。

很多读者可能会怀疑，对人类来说，有没有可能谈论象“无限的用处”这样的似乎遥远的题目；但是，我们将会看到，随便两个人，只要他们知道整数

$$1，2，3，4，5，\cdots，$$

就能互相交谈“无限”，而且可谈的内容很丰富。

希耳伯特(D.Hilbert)曾经定义数学是“关于无限的科学”，我是用他定义时所作的说明的观点来写这本书的。一个有趣的数学定理与其它领域中的有趣的结果是不同的，因为除了它的内容是惊人的和美丽的以外，它还具有“无穷的形态”；它总是一个无限的结果之链的一部分。下面把我的

意思作一个说明：前五个奇数之和，1+3+5+7+9等于5乘5，这个事实固然是有趣而奇妙的；但是有一个定理说，对所有的n，前n个奇数之和是n^2，它才是数学。

有一个从哲学观点上可以称为“无限的意义”的论题，专业数学家声称，他们对此并不是内行，我这样说，希望读者会相信我。大多数数学家并不谈论这类问题，而且谈论的人也不同意这样提出问题，我想，这个事实证明了我的话。

最后，我要对玛森夫人表示特别的感激，她是布朗克斯科学中学的数学教师，她从我准备的大量材料中选取和编辑了这本专著中的材料。喜欢这本书的读者应该知道玛森夫人对本书起了极大的作用。我还要感谢斯特里泽尔小姐，她为这本书的大部分习题作了解答。

第一章 通俗的无限与数学的无限

沒有在数学科学领域工作过的人多半会怀疑无限有什么用处，如果“使用”某个东西的意思是取得对它的某种形式的控制的话。然而，恰好就是在这个意义上使用无限形成了数学家们的生涯。

其它职业也多少要用点无限。建筑师和工程师有他们的三角函数表、对数表和其它类似的表。但是他们不需要记住这些表是从某些适当的无穷级数的大量的项计算出来的（图1.1）。他们自由自在地画图，数学曲线和曲面的源泉是永不会枯竭的，但是他们不需要意识到无限。哲学家和神学家意识到无限，但是从数学家的观点看来，他们使用它还不如赞美它那么多。

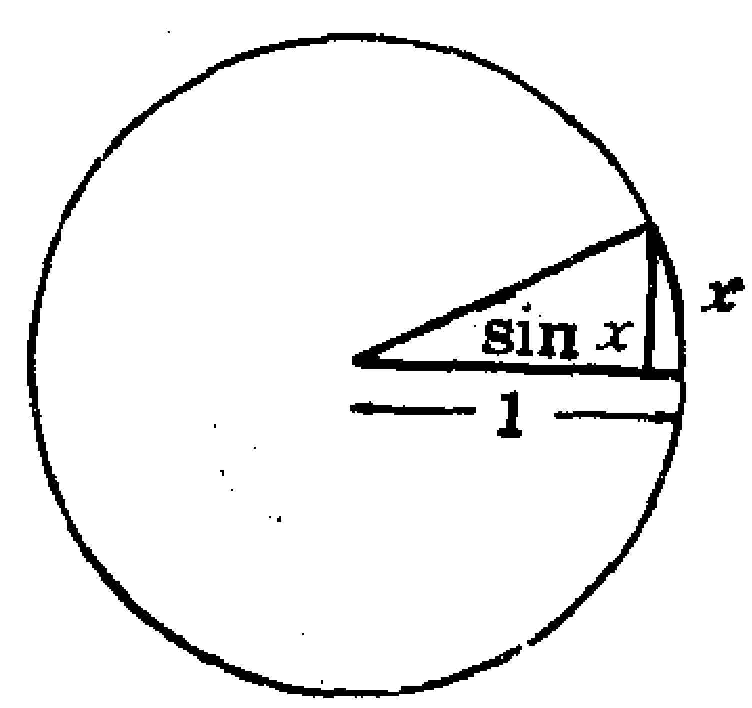


图1.1 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots$

数学家也赞美无限；伟大的希耳伯特[①]谈到它说，这个思想古往今来都最深地唤起了人的想象，他形容康托(G.Cantor)[②]的工作，把人引到无限的天堂，但是数学家还使用无限，并且，正如下面两章将表明的那样，他是世界上最大的无限收藏家——收藏了无限多批所有类型和大小的无限。它们是他的原料也是他的工具。

在转向数学以前，让我们化一点时间在某些通俗“日常

① D.希耳伯特(1862—1943)是二十世纪的数学权威之一。

② G.康托(1845—1918)创立了集合论。

的”无限的例子上，我们将会看到，它们和数学的无限的距离并不太远。我们从一句俗话开始：“总有两个可能”。让我们在这里把这两个可能叫做“零”和“一”。因为每次选择带来了两个新的可能性，这就启发了如图 1.2 表示的无限的图画。

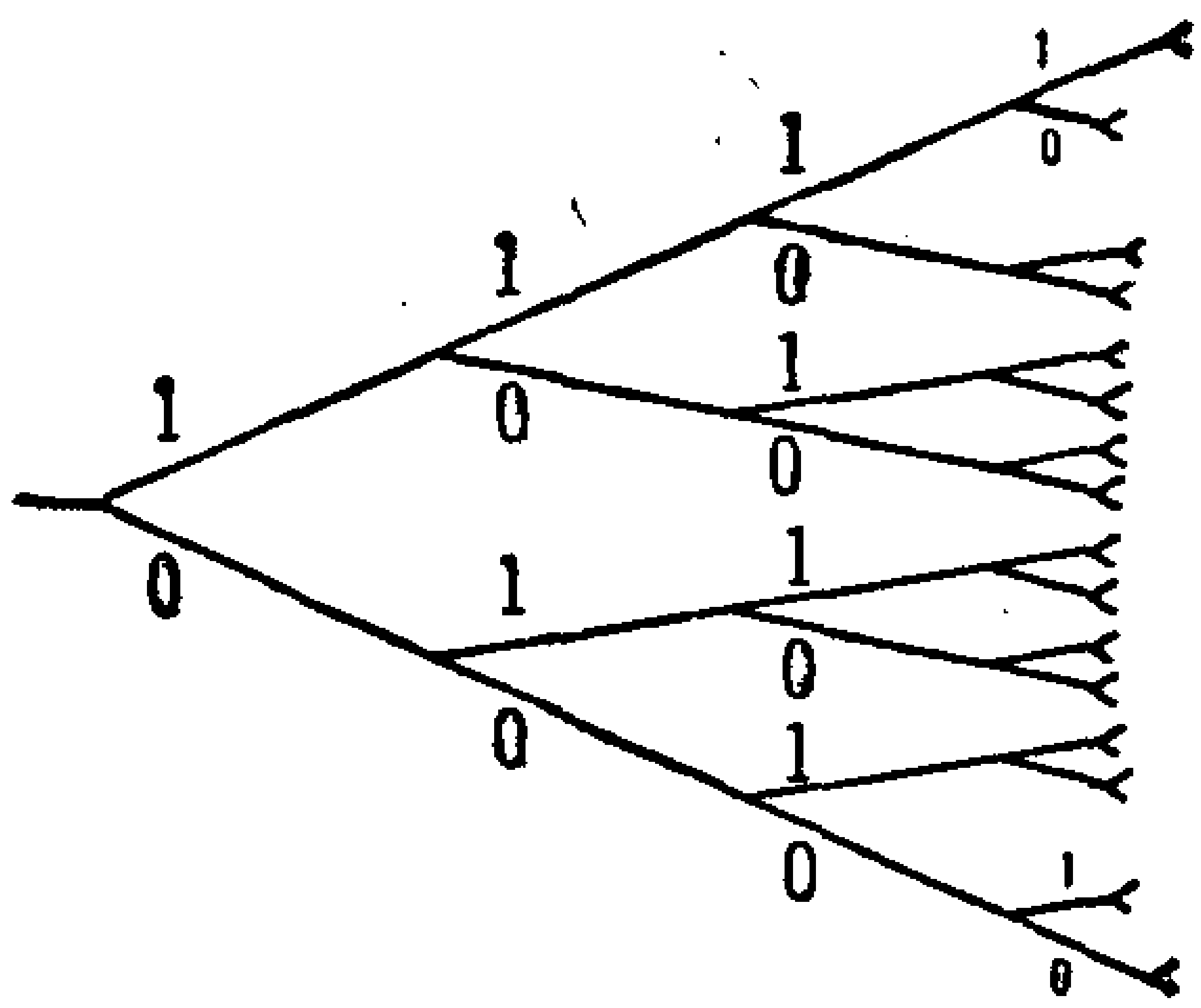


图1.2　总有两个可能

另外，很多人能想起在他们小时候有一种发酵苏打的盒子，在它上面他们看见了第一张无限的图画。在盒子上有一张画着盒子的画，在画上的盒子上又有一张画了同样盒子的画，这样继续下去。图 1.3

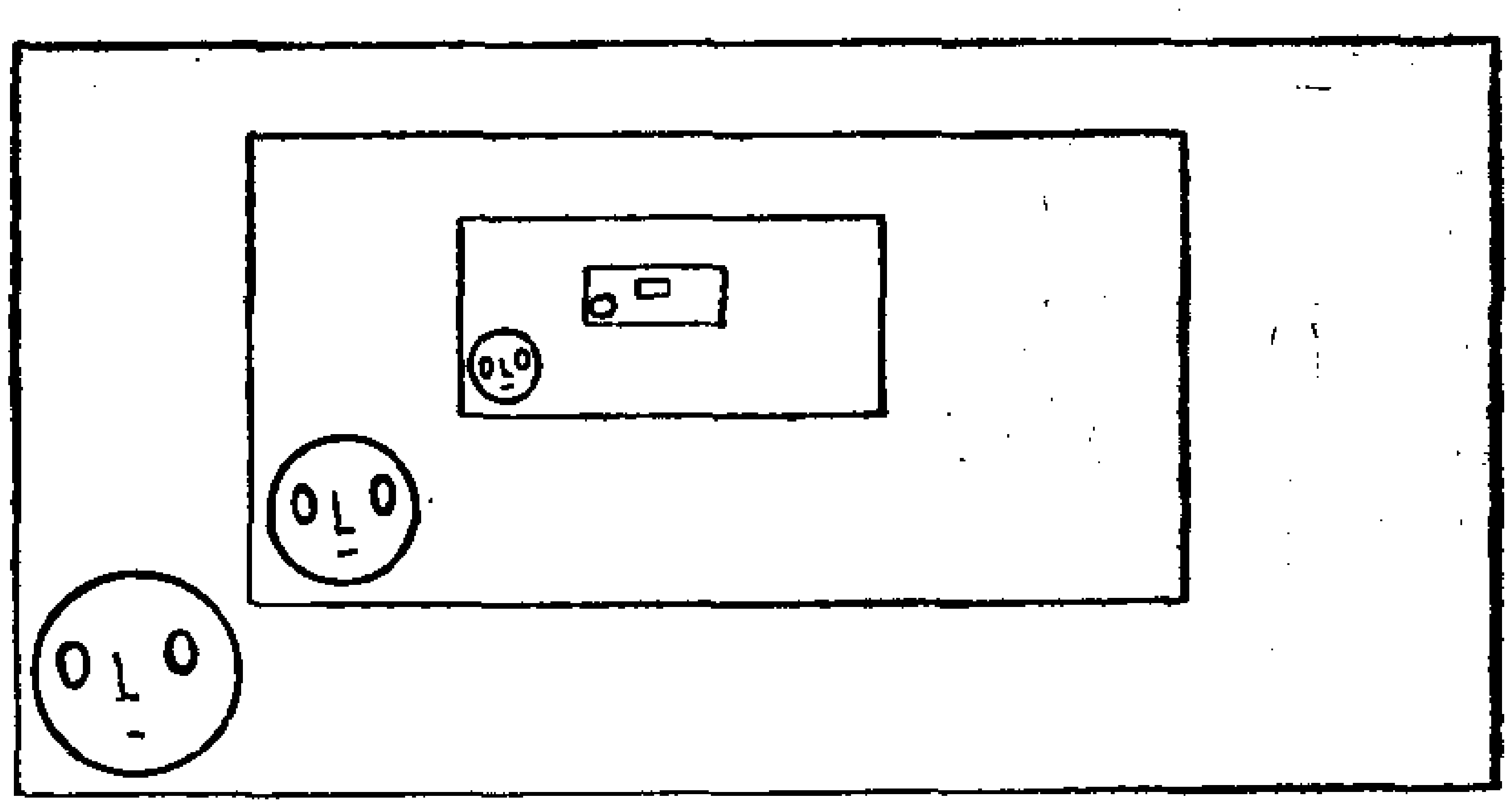


图1.3　无限的一个模拟

显现了这个盒子给人的印象。

还有特别为儿童设计的关于无限的启发性玩具。日本的工匠们做了木头的娃娃，打开来里面藏着一个类似的娃娃，在它里面又有一个娃娃，这样下去一连串有五、六个。

诗人们也用这个词，方式和数学里无限的形态相差不太多。朱丽叶关于她对罗密欧的爱情的诗行，“我给你的越多，我自己也越是富有。”夸大了基数无限大的一个特征性质；勃拉克的想象，“把无限握在你的手心里，把永恒装进一小时里。”相当于一个数学事实，那就是象手掌的“生命线”这样短的一个线段上，也有和无限长直线上一样多的点。在《安东尼与克莉奥佩特拉》里，爱诺巴勃斯将军形容克莉奥佩特拉：“年龄不能使她衰老，时间也不能使她减少媚态。”雨果形容莎士比亚：“天才是伸向无限的海岬。”

带着比较轻松的心情，罗斯坦的西拉诺·德·伯格拉克（Cyrano de Bergerac）用了一个数学归纳的滑稽方案，要到月球上去，它与其它一些方案一样异想天开：“我拿着一块强磁铁站在踏板上，我把磁铁向上扔，踏板跟了上去。我抓住磁铁再把它向上扔，踏板又跟了上去，一步步地重复，我登上了月球。”

芝诺（Zeno）①的一个形而上学的推理是非常有教益的，它推出结论说，物理运动是不可能的。他的话援引如下：“阿溪里斯②不能追上一只逃跑的乌龟，因为在他到达乌龟所在的地方所化的那段时间里，乌龟能够走开。然而，即使它等着他，阿溪里斯也必须首先到达他们之间一半路程的目标，并且，为了他能到达这个中点，他必须首先达到距离这个中点一半路程的目标，这样无限继续下去。从概念上，面临这样一个倒退，他甚至不可能开始，因此运动是不可能的。”芝诺的另一个漂亮的悖论试图说明空间和时间能无限分割。另一个悖论通常是这样援引的：“飞箭在每一时

① 爱利亚学派的哲学家，生活在公元前五世纪。

② 希腊的神行太保。——译者

刻是不动的。”这些悖论涉及到数学无限的重要应用，值得在这里讨论。尤其，因为飞箭悖论是关于运动的数学概念的一个简练的提法，所以更值得讨论。运动类似于一张时间表；更确切地说，它是一个把虚构的“空间”里的一个确定的点和虚构的“时间”的某一时刻对应起来的函数。从这个观点看来，箭在一个给定的时刻“不动”的说法的意思是，它的位置是确定的；这就给出了函数。定义运动的函数能象任何其它数学函数一样地构造出来，也就是说用一个适当的数值表、用一个公式、或者用一个递推的描述。

如果芝诺的乌龟在阿溪里斯前面一英尺的地方出发，运动了

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \text{ 英尺}$$

（它正好是一英尺）化了

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \text{ 秒}$$

（它正好是一秒），而阿溪里斯运动了

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \text{ 英尺}$$

（它正好是二英尺）化了

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots \text{ 秒}$$

（它正好是一秒），那末一秒钟后比赛结束。

在欧多克斯(Eudoxus,公元前350年)和阿基米德(Archimedes，公元前150年)的工作以前，这些无穷级数是不能理解的。在十七世纪，随着微积分的发展，无穷级数的逻辑必须

重新加以发现。这些级数大概并不是为“回答”芝诺的问题才需要的，但是它们在自己的土地上和他愉快地不期而遇了。

$$\cdots,\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$$

图 1.4

芝诺的第二个悖论的一些趣味来自直线上任意一对点之间有另外一个点这个事实。由它推出一个线段包含一个无限下降的序列，它是沒有最小项的，有次序的点的序列。图1.4里的例子说明了这一点；按从小到大次序排列的，形式是$1/n$的分数，沒有一项在所有其它项之前。在整数的集合里不存在相应的序列。多半芝诺关心的完全是应用数学家们面临的问题：数学是经验的理想化，这个经验不一定“在生活里眞实”。沒有比几何线段是无限可分的这一简单事实更明显的事实了，但是物质的线却不是这样的。当然，这个事实在芝诺的时代沒有象我们现在这样令人信服地确定下来。尽管如此，在我们的时代和在他的时代一样，数学上的线段都是作为处理物体(振动的弦、可变形的梁、刚体)的很多特殊问题的一个模型来使用的。首先，它作为时间连续统和一维空间连续统的模型来使用。在这个用法里，它统治了我们关于我们周围世界的概念。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=1$$

图1.5 一个日常观察的数学提法：随着岁月的流逝，两个朋友——一个比另一个大四岁——看上去接近于同样的年龄

最后，让我们看两个日常生活里有数学情调的例子。随

便一个谁，但有一个比他大几岁的朋友，注意到岁月的流逝是怎样使两者年龄的差别逐渐淡薄。这里我们有了一个差是常数，但比值不是常数的一对变量的例子；在这个例子里，其比值趋近于1（图1.5）。

如果	如果
C表示化费	买一件毛衣化了8美元，
并且	并且
S表示卖价，	卖了12美元，
那末	那末
$\frac{S-C}{C}$是单位成本的利润，	$\frac{12-8}{8}=\frac{1}{2}$是按成本的利润，
和	和
$\frac{S-C}{S}$是单位卖价的利润。	$\frac{12-8}{12}=\frac{1}{3}$是按卖价的利润。

图 1.6

上一个例子（图1.6）是从商业里取来的。当一件商品用1美元买来并且卖2美元的时候，利润按买价计算有100%，但是按卖价计算只有50%。一件商品能用按买价的任意大的百分比的利润卖出，并且它能用按卖价的99%或者99.99%利润卖出，但是它在实际上和理论上都不能按卖价的100%利润卖出。读者应该弄明白这一点，因为它是一个很自然的例子，表明有时“极限”是永远达不到的，这可能会令人感到奇怪。也许在这个特殊问题里最容易的检验方式是试一些不同的卖价。

现在让我们转向在数学里无限的用处。把它们分成四类会有助于读者对它们的思考。

第一类用几何定理来说明：如果三角形的两边相等，那末底角相等（欧几里得(Euclid)书的第一册，命题5）。

证明　给定$AC=BC$①；参看图1.7。比较三角形 ABC 和读成 BAC 的自身，我们发现 $AC=BC$ 以及 $\angle ACB=\angle BCA$。因此，由欧几里得书的第一册命题 4，角 CAB 一定等于角CBA。

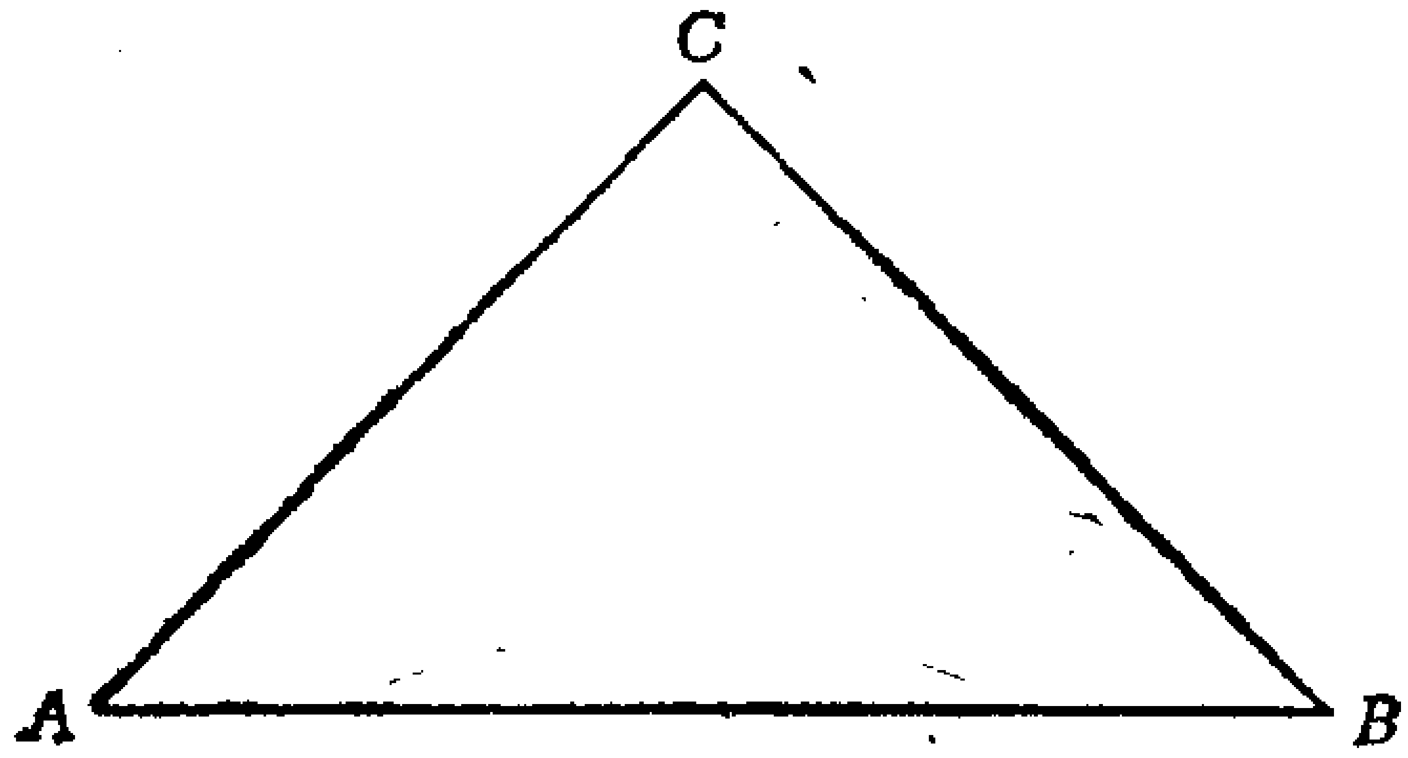


图 1.7

这个等腰三角形的底角相等的证明相当于把三角形叠放到它自身上，使A到B，B到A，C到C。

这个说法和证明依靠一个通常叫做“两边和夹角”的命题，或“s.a.s.”(它的意思是“边-角-边”)，根本没有提到无限。但是(所有形状和大小的)等腰三角形类是一个无限类，定理对它们中的每一个都成立。

第二类用一些“二项式系数”说明，毕达哥拉斯(Pythagoras)的信徒们和更早的一些文明国家已经知道了它们，但是因为巴斯卡(1620)用了数学归纳法讨论它们，所以把它们和他的名字联系起来了。我们回想一

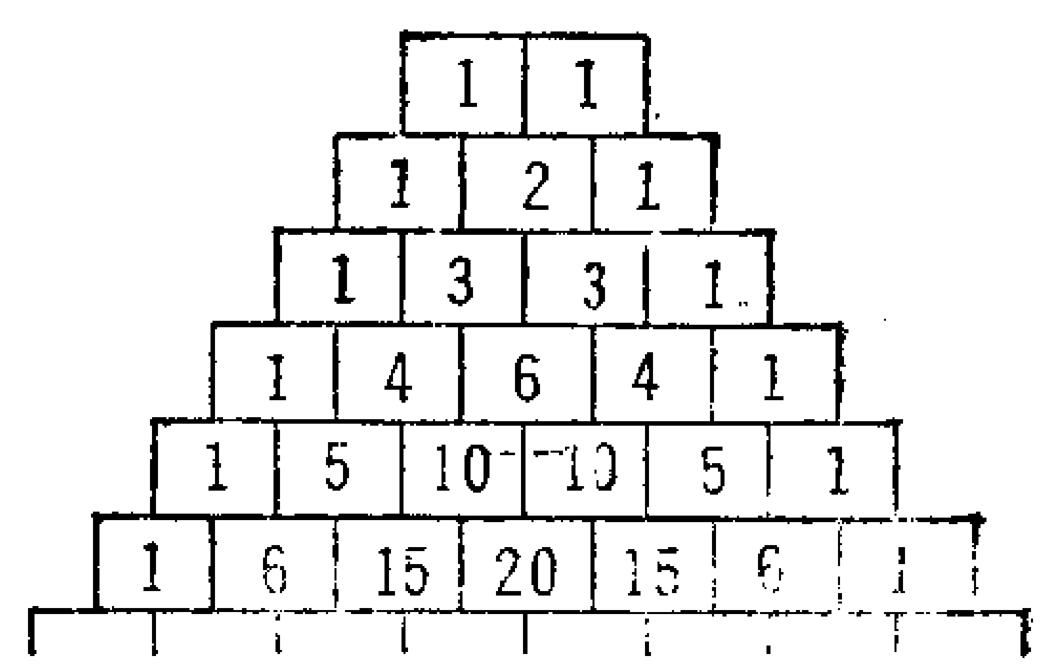


图1.8　巴斯卡三角形.这个阵的第 n 行给出了$(a+b)^n$ 的展开式里出现的系数

① $AC=BC$这个提法的意思是线段AC和BC的长度相等。在很多书里，点P到点 Q 的距离记作$\overline{PQ}$，但是为了排印上的方便在这本书里简单地用PQ表示。

下，二项式系数是二项式$a+b$自乘n次产生的系数(图1.8)。例如，当$n=3$，我们有

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

二项式系数是1,3,3,1。因为n可以是任意的正整数，所以确实有无限多种情况，每一种情况包含了要我们去计算的有限的一组数。

求一条给定的曲线上一点的切线的问题属于第三类。容易看出这个问题和一个无限过程相联系，因为一条直线和一条曲线的相切能够用曲线的任意一小段和直线的任意小线段来确定(图1.9)。结果是，解决这个问题的数学过程也解决了定义瞬时速度的物理问题；简短地说，瞬时速度就是在汽车的速度计上读出来的数。运动的速度和线的斜率是比值的极限(图1.10)。

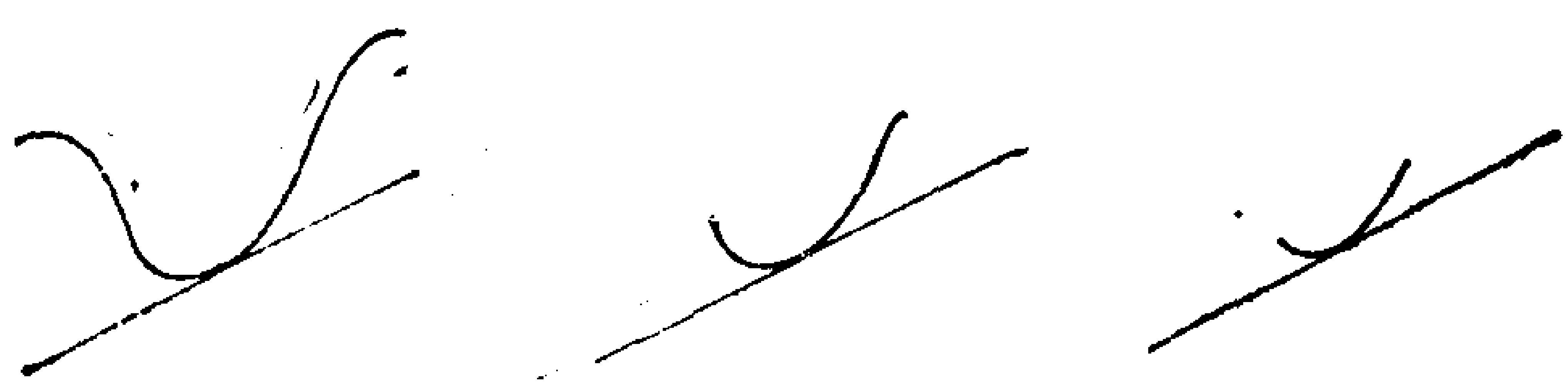


图1.9 在一点相切是一件局部的事情

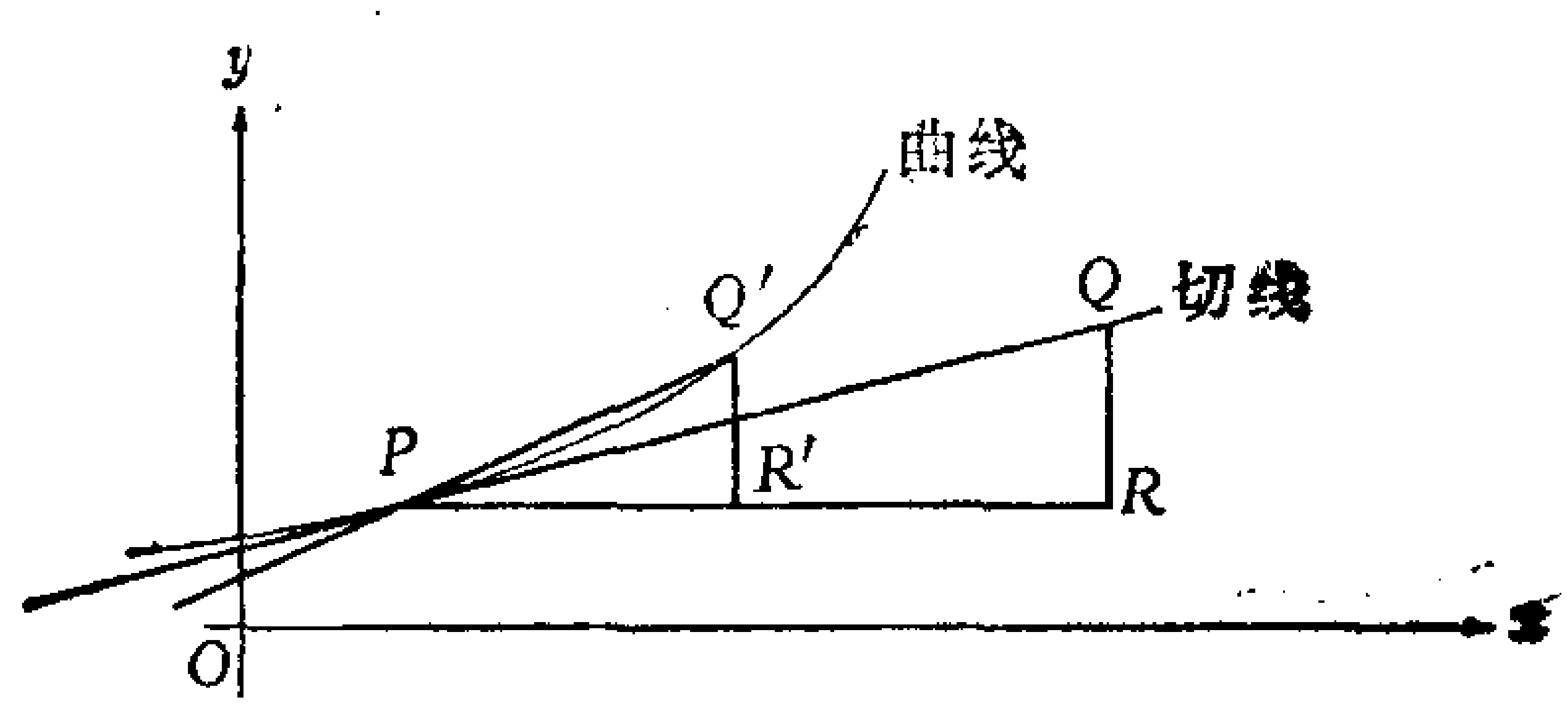


图1.10 切线的斜率(比值QR/PR)是当点Q'沿曲线趋近于P的时候弦的斜率(比值$Q'R'/PR'$)的极限

第四类属于抽象集合论，是关于无限大基数的。它引人注目地由一个悖论所说明，这个悖论说，看来在一个圆上能有比无限直线上更多的点。图1.11表明了这一点。直线上每一点与下半圆上对着的一点组成了一对。即使我们用圆上两点与直线上一点配对，也还剩下点(P和Q)。

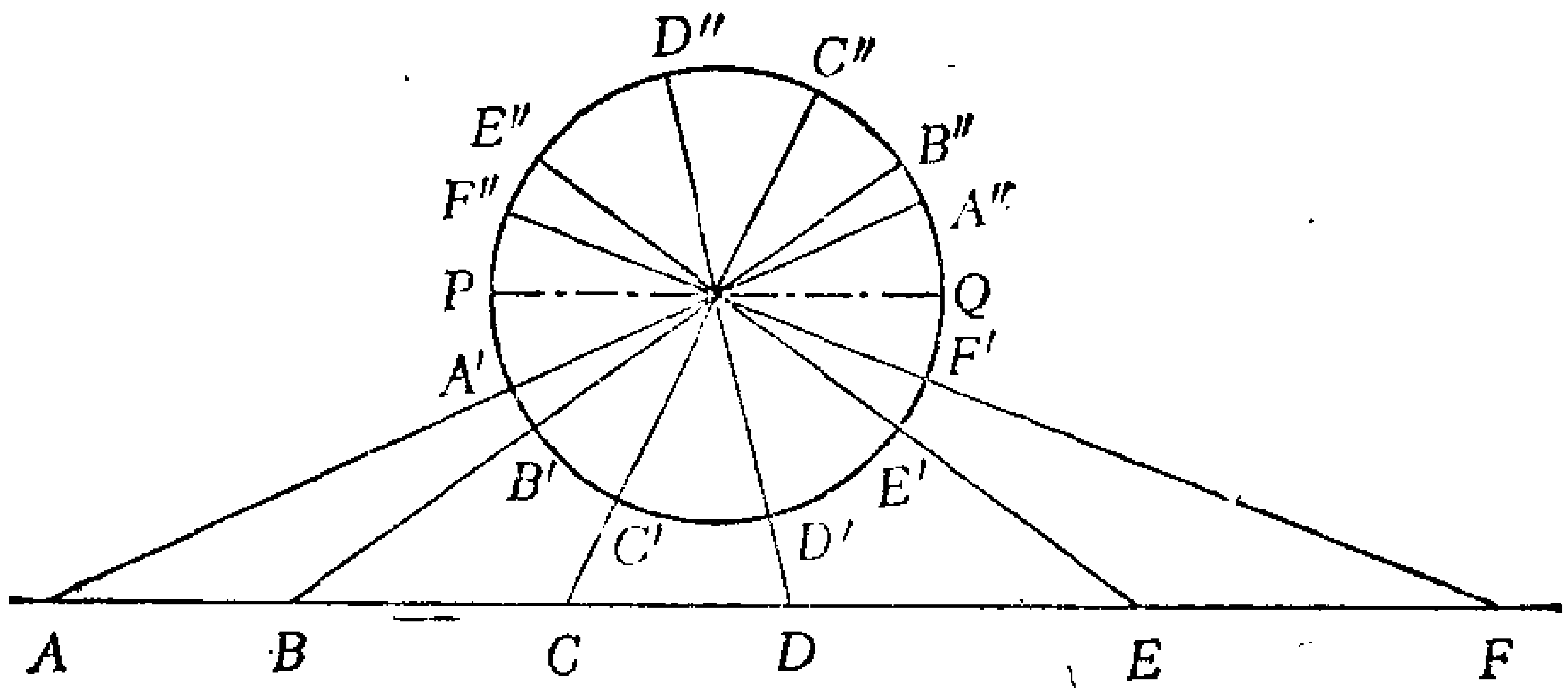


图 1.11

整个这本书都将讨论在上述各种情况下怎样把握无限，但是仍然能够简短地描述如下：为了把握第一种类型，我们用单个的代表性对象；因为它没有什么特殊性，它同等地适用于所有对象。第二种类型的问题通常象第一种那样把握，但是有时套用一些模式来处理，如数学归纳法，或者本质上等价的"无限减少原理"，也等价于"第一整数原理"，我们以后将会看到这些。

第三类包含了多种多样的与"极限"概念相联系的无限过程。我们将只研究一个过程，它引出某些图形长度的定义；随后这个过程引出无穷级数的和的定义。

虽然无穷级数的求和与定义(计算)给定闭曲线所围面积的问题密切联系，但是，我们将不处理面积问题以及前面提到的切线问题。请读者参看一本好的微积分书，也可参看柯

郎德、罗宾斯著的《近代数学概观》一书。

第四类问题需要一种新型的数学推理的发明并等待着康托的天才。康托使用的论证是平常的数“数”过程的简单推广，但是他大胆地使用它们——把它们直接用到无限集合上去。也许他最大的一个发现就是有不同的基数的无限大这一事实，特别地，一条线段上点的集合是所有整数的集合所无可比拟的“丰富”的无限大。这个以及他在其它方面的工作将在第二章和第六章接触到。

通过某种途径，无限的最后一种形态已经合并到数学里使用无限的主流里去了，这本书将会涉及到这个问题。

第二章　从自然数到$\sqrt{2}$

这一章的主体由一长串小节组成，每一节都是与某一个特殊的无限集合、无限过程，或者是掌握无限的观点或技巧有关。我们试图尽可能地把它们每一个分别地处理；然而，第一节还是从三个无限开始！

2.1　自然数

站在无限的队列最前面的，是与众不同的平常的数。我们从一个已经构造好了的无限集合开始，在至少有一个这样的集合之前，我们既不能构造无限集合，也不能证明关于它们的任何重要事实。这样一个集合是存在的，它就是平常的数：1，2，3，4，5，6，…等等。经常把这些叫做自然数，关于它们，我们直截了当地假定下面的事实：

a）在每一个自然数的后面有另一个自然数紧接着，使得这个过程无止境地继续下去。

b）沒有重复；每一个数与前面所有的数不相同。

c）从1开始，沿着后继者的路线，每次数一个，任何一个整数都可以经过有限次数到。

2.2　序列的讨论

因为自然数集合里所有的数不可能在有限时间里写出来，所以我们要用"…"，就是说用省略号或重复号，通常只点三点；它们对应着象"等等"或"云云"或"依此类推"之类的词。在数学里，把它们放在几项的一个短序列之后，意思是所指出的集合沒有完，而且这个序列按照一个显而易

见的方案构造下去。下面的例子说明了这个意思；读者可以动手在每种情形下添几项在后面。

1，4，7，10，13，…；

5，3，5，3，5，3，…；

5，3，7，4，10，6，14，…；

1，1，2，3，5，8，13，21，34，…；

3，6，9，12，15，…；

3，9，27，81，243，…；

60，3600，216000，12960000，…；

2，3，5，7，12，17，29，41，70，99，…；

$2,\ \sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ 2+\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \cdots;$

1，6，12，20，30，42，…；

1，2，6，24，120，720，5040，40320，…。

我们关于使用重复号的讨论相当于序列概念的一个定义。这个概念对下面的所有内容是这样的重要，因此有必要让读者得到它的一个明确的定义。

根据定义，所有序列都是从基本序列

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots \tag{1}$$

中把每一个数换成某一个对象而导出来的。因此，例如

i) $a_1, a_2, a_3, \cdots$是一个不同字母的序列；

ii) $a, b, c, a, b, c, \cdots$是一个字母的周期性序列；

iii) $1, 1, 1, \cdots$是一个1的序列；

iv) $\sqrt{6}, \sqrt{24}, \sqrt{60}, \sqrt{120}, \sqrt{210}, \cdots$是一个正平方根的序列。

因为序列是无限的，所以只有当我们有了一个规则，它告诉我们怎样把(1)里的每一个数换成适当的对象时，我们才能确实知道这个序列究竟是什么。在情况 i)，ii)，iii) 中，从

前面三项以及用重复号，这个规则就表现得很清楚了。在情况iv)，读者会发现可以用这个规则来计算各项：一般项是三个连贯的整数的乘积的平方根，在连贯的整数中，第一个整数等于这一项的序数本身．因此iv)的第五项是$\sqrt{5\cdot6\cdot7}$。这个规则可以用一个方便的公式表示出来。设n是我们要求的那一项的序数，并且让我们把这一项叫做a_n(读作："a下标n")。这样

$$a_n=\sqrt{n(n+1)(n+2)}\,.$$

然而，这绝不是一个明显的公式，而且还可以用很多其他的公式得到前面这五项，但后面的项不一样。所以，为了真正知道iv)里面的序列是什么意思，我们需要上面的明显的规则。至于这个规则是用语言来表达还是用一个漂亮的公式来表达，这是不重要的。

我们能够用符号把我们的讨论总结成

$$a_n=f(n),$$

这里a_n表示一个序列的第n项，就是说，代替(1)里数n的那个对象，而符号$f(n)$表示寻找a_n的规则，它既可以写成公式也可以用语言来表达。

这样，在情况i)到iii)：

i) $$f(n)=a_n,\qquad n=1,2,3,\cdots;$$

ii) $$f(n)=\begin{cases}a, & n=1,4,7,\cdots,\\ b, & n=2,5,8,\cdots,\\ c, & n=3,6,9,\cdots;\end{cases}$$

iii) $$f(n)=1,\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

在有些例子里，这些点子有其他的含义。例如我们可以写"在我们的十进制中用的十个数字是0,1,2,…,9"。在这里这些点子沒有指明一个无限集合；它们仅仅代表数3,4,5,6,

7,8的缩写。数学家常常用点子表示一个序列沒有完，而根据某一方案构造，这时方案本身的详细内容幷不重要。因此，在这个意义下，

$$\sqrt{2}=1.414\cdots \quad 或 \quad \pi=3.14159\cdots$$

意思是$\sqrt{2}$和π(念作“pai”)是无限小数，它们的前几位数是所表示的那样。以后，读者是能够从上下文说出点子的含义的。

习　题

评论下面“…”的用处：

2.1　独奏（唱），二重奏（唱），三重奏（唱），四重奏（唱），…。

2.2　一垒打，二垒打，三垒打，本垒打，…。

2.3　双胞胎，三胞胎，四胞胎，…。

2.4　星期一，星期二，星期三，星期四，星期五，…。

2.5　$M, T, W, T, F, S, S, M, T, W, \cdots$。

2.3　基数和序数

自然数的集合是我们的队列中的第一名，它和这个队列里下面两个无限集合有关。这三个无限集合是：

a）整数的总体：

一，二，三，四，五，六，…；

b）每一个数和它的后继者联系起来的“规则”的一个汇集：

一加一是二，二加一是三，三加一是四，…；

c）序数的群体：

第一，第二，第三，第四，第五，第六，…。

一旦把集合a)给了我们，b)就是一个观察的记录。我们作了一些这样的记录，而且相信a)的所有成员都是这样的。因为这些规则是这样的显而易见地不断重复，所以我们可以把全体a)一览无余，尽管我们只能用眼睛看见它们中间的几个。集合c)让我们意识到整数的自然次序，在某种程度上，它提示我们怎样去把握这些整数。

2.4 算术序列

扩充自然数0, 1, 2, 3, 4, …是从通常的整数序列前面加零而得到的。我们也把它们叫做非负整数，或简单地叫做整数。

如果我们从零开始，然后每隔一个写一个，我们得到偶数序列：

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots;$$

如果我们从1开始，然后每隔一个写一个，我们得到奇数序列：

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots.$$

稍作思索我们就会承认，每个自然数属于这两个集合中的一个(不会是两个)：每个数或者是偶数，或者是奇数。稍微详尽一点地阐明这件事对我们是有用的：每一个整数或者可以表示成某个整数的二倍，或者可以表示成比某个整数的二倍多一的形式。我们用方便的字母来代表语言，写成：每一个整数是下面的形式

$$n=2q \quad 或 \quad n=1+2q,$$

这里 q 是一个整数。

用相仿的方式每三个数一次，我们发现每一个整数是下面的形式之一

$$n=3q \quad 或 \quad n=1+3q \quad 或 \quad n=2+3q,$$

在这里 q 是一个整数。

习 题

2.6 这就相当于说有三个互相不重叠的无限集合，每一个整数在其中一个里面(也只在一个里面)；把这些集合表示出来。

一般而言，如果 B 表示任意一个非零整数，我们可以把所有整数分成 B 个不同的类：

$$\begin{array}{lllll}
0, & B, & 2B, & 3B, \cdots, \\
1, & 1+B, & 1+2B, & 1+3B, \cdots, \\
2, & 2+B, & 2+2B, & 2+3B, \cdots, \\
\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \quad \cdots, \\
B-1, & (B-1)+B, & (B-1)+2B, & (B-1)+3B, \cdots;
\end{array}$$

把最后一行写得简练一些

$$B-1, \ 2B-1, \ 3B-1, \cdots.$$

因此譬如 B 表示 5，我们得到五(= B)类：

$$\begin{array}{l}
0, \ 5, \ 10, \ 15, \ \cdots, \\
1, \ 6, \ 11, \ 16, \ \cdots, \\
2, \ 7, \ 12, \ 17, \ \cdots, \\
3, \ 8, \ 13, \ 18, \ \cdots, \\
4, \ 9, \ 14, \ 19, \ \cdots.
\end{array}$$

在有些应用的场合，这些不同的类叫做模 B 同余类；在用 B 除的除法里，它们和余数对应。

我们可以把上面表格的内容表示成：每一个整数 n 是下面的形式

$$n = qB + r,$$

这里 q 和 r 是整数；q 是乘数(商，如果我们想着除法的话)，r 是余数，它取有限集合0, 1, 2, 3, …, $B-1$里的一个值。

这是算术中最重要的公式；在 $r=0$ 的情形，B叫做 n 的一个因子。(在这个定义里，q 的值是不重要的。)

在 $B=10$的情形，余数正好对应了数字0, 1, 2, 3, …, 9。

习　　题

2.7　证明 n 和$n+1$没有公共因子，换句话说，如果一个整数 $q(\neq 0, 1)$可以整除整数 n，它就不能整除$n+1$。

2.5　位置记数法

我们现在接触到位置记数法，它是我们写扩充数的方法。常用的格式是十进制(印度-阿拉伯记数法)，它可以按下面的层次加以说明：

一千九百六十；

一个千，九个百，六个十，没有个位数；

一，九，六，零；

1, 9, 6, 0；

1960。

它有这些优越性(并不限于基数是十)：

a) 有各种大小的单位，对所有的用途都很方便；

b) 把相继的单位用简单的规则结合起来；

c) 对于数是一种经济而增长得很快的表示法；

d) 固定的数字集合。

因为只有数字和它们的相对位置出现在写下来的数里，所以如果恰当地考虑到位置，所有算术运算必须要能用数字

表示出来。六十进制系统在古代的巴比伦用过。在十三世纪，印度-阿拉伯十进制系统主要由比萨的莱昂纳多（Leonardo）推广到欧洲，他也叫做斐波那契(Fibonacci)①。当他在非洲进行商务旅行时学会了这种记数法，并写了一本数学教科书《算盘书》，于1202年出版，再版于1228年，流传了好几个世纪。

把算术的技巧用符号加以公式化是代数的开始。乘法分配律可以用一个方程表示出来。下面是方程和它的一个实例：

$$a\cdot(b+c+d)=a\cdot b+a\cdot c+a\cdot d.$$

例如

$$\begin{aligned}4321\times567&=4321\times(500+60+7)\\&=4321\times500+4321\times60+4321\times7.\end{aligned}$$

为了把位置记数法用好，必须懂得乘法表——至少要到“十乘十”。虽然我们所有的人都懂得这个表，但是我们中间没有多少人曾经象下面那样精密地观察过它。这个表如图2.1所表示的那样。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

图 2.1

表中所划的线提醒我们这个表是一套越来越大的乘法表的集锦，1-1表、2-2表、3-3表等等。

希腊几何学家把图 2.2 中的拐角形，或角形框架叫做磬折形（gnomons），它们在下面的例子中也是

① 斐波那契的意思是“好运的儿子”。

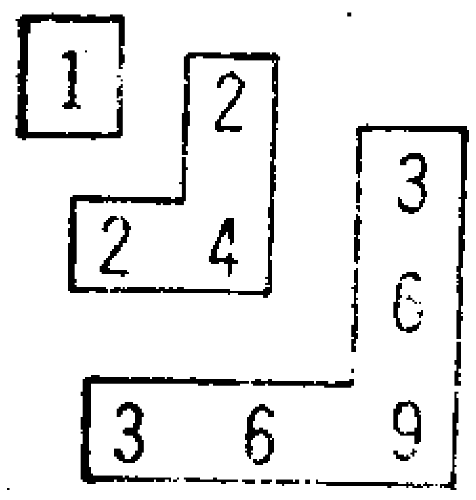


图　2.2

很重要的。

大约早于公元前 500 年，人们已经注意到在每一个下磬折形里，所有整数的和是一个完全三次方。因此：

$$1 = 1^3,$$

$$2 + 4 + 2 = 8 = 2^3,$$

$$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27 = 3^3,\ \cdots.$$

在任何一个方形表中的整数之和，不管是2-2的还是3-3的，等等，都是一个完全平方。因此：

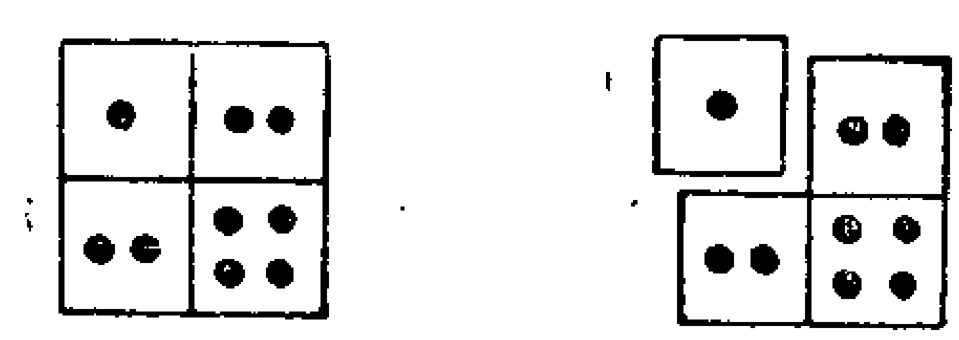
$$1 = 1^2,$$

$$1 + 2 + 2 + 4 = 9 = 3^2,$$

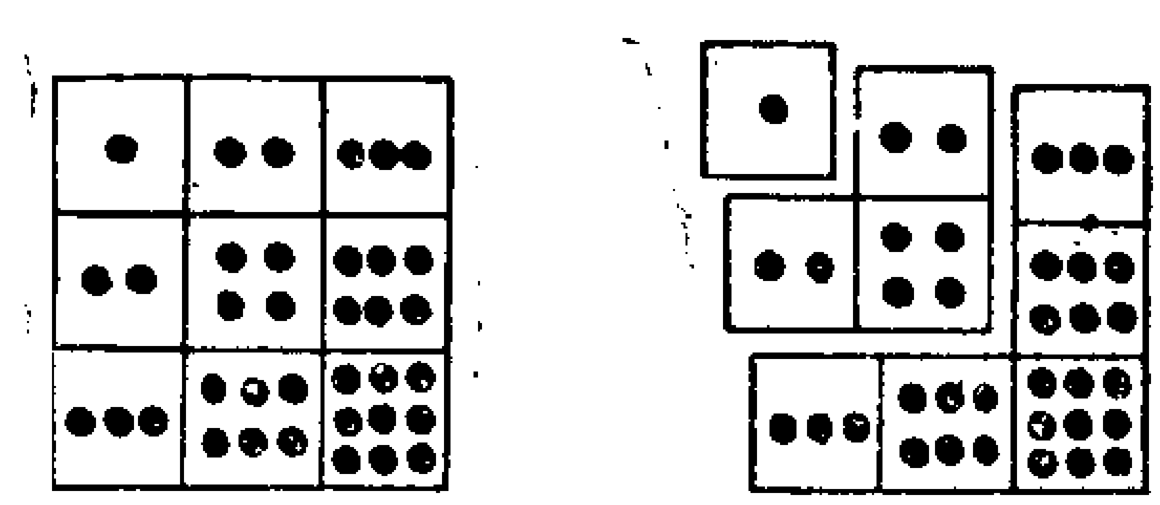
$$1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9 = 36 = 6^2,\ \cdots.$$

这个表还描绘了一个双重分配律的图形，如图 2.3 所表示的那样。

对于这张 10-10 表，这些事实的证明只不过是验算一些简单的和与积。很自然地要问，在 k 是任意一个正整数的情况下，这些相应的事实能不能对所有的 k-k 乘法表加以证明。



$$(1+2)^2 = 1^3 + 2^3 = 1(1+2) + 2(1+2)$$



$$\begin{aligned}(1+2+3)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 \\ &= 1(1+2+3) + 2(1+2+3) \\ &\quad + 3(1+2+3)\end{aligned}$$

图　2.3

习　　题

2.8　验证对一个12-12表或者 15-15的表来说，类似的事实也是对的。你能发现什么归纳方案或一般原理吗?

尽管位置记数法具有上述优点，它还有一个相当麻烦的弱点，如下面的例子所表示的那样

$$99999+1=100000;$$

加一个单位可以使很多位发生非常可观的变化。所有的计算机设计必须考虑到这一点，也许每一个人都看见过当一辆汽车的行程达到10000英里时，里程表上的表面是怎样同时变化的。

在有小数的时候，经常把一个数换成另一个数，999.99美元使人感到它是一个比1000美元更有吸引力的价格。我们还注意到1.000 000和0.999 999尽管看上去有本质的区别，其实它们只差0.000 001，下面我们还要用到这一点。因此

1.000	和0.999	差0.001；
1.000 000	和0.999 999	差0.000 001；
1.000 000 000	和0.999 999 999	差0.000 000 001。

在十进制记数法里，用小数0.1,0.01,0.001,…表示一个单位的十分之一、百分之一、千分之一、…，这一点使我们不仅能表示任意大的数，而且能表示任意小的数。然而，可能是巴比伦人最早发现的（早于公元前2100年），有一些非常有用的数不能用这种记数法表示。这一发现是与“小”的数，如1/3,1/6,1/7,…等相联系的，但是它并不真正依赖于大小，而只是依赖于形式；因此10/3,100/3,…同样不能用小数记号表示。有限小数系统的这一不足之处产生了严重的数学问题。人们看到序列0.3,0.33,0.333,0.3333,…代表了小于1/3而且趋近于1/3的数；很清楚，没有有限的小数能表示1/3。然而，从这些类似的考虑得出的结论是，一个符号是

$$0.33333\cdots$$

的无限小数必然表示1/3，在这个记号里面，所有的位置都填上 3，当然，这个结论的前提是这个记号确有某种含义。

在基数10的情况下，启用无限小数是达到所有数的精确表示法的唯一途径。然而，从实际写数的观点或者把它们贮存到计算机的“存贮器”里的观点，就有必要牺牲精确性而使用舍入手段。对一个手头的问题，在所有有意义的地方都实行舍入，并且指定误差范围，就能达到需要的精确度。最常用的舍入方案是让留下的误差不超过保留的最后位的 1/2 个单位(下一位置的 5 个单位)；所有这些都表示在图2.4中。

整数	倒数				
	普通分数	三个小数位	五个小数位	七个小数位	巴比伦格式
1	$\frac{1}{1}$	1.000	1.00000	1.0000000	$\frac{60}{60}$
2	$\frac{1}{2}$	0.500	0.50000	0.5000000	$\frac{30}{60}$
3	$\frac{1}{3}$	0.333	0.33333	0.3333333	$\frac{20}{60}$
4	$\frac{1}{4}$	0.250	0.25000	0.2500000	$\frac{15}{60}$
5	$\frac{1}{5}$	0.200	0.20000	0.2000000	$\frac{12}{60}$
6	$\frac{1}{6}$	0.167	0.16667	0.1666667	$\frac{10}{60}$
7	$\frac{1}{7}$	0.143	0.14286	0.1428571	$\frac{8}{60}+\frac{34}{3600}+\frac{17}{216000}+\cdots$
8	$\frac{1}{8}$	0.125	0.12500	0.1250000	$\frac{7}{60}+\frac{30}{3600}$
9	$\frac{1}{9}$	0.111	0.11111	0.1111111	$\frac{6}{60}+\frac{40}{3600}$
10	$\frac{1}{10}$	0.100	0.10000	0.1000000	$\frac{6}{60}$

图2.4 前十个整数的倒数一览表，表示成三、五、七个小数位

如果两个数的乘积是1，那末它们中间的每一个都叫做另一个的倒数。因此，因为1/10乘10是1，所以1/10是10的倒数，并且10是1/10的倒数。用公式表示，如果字母m作为某一个数，r是它的倒数，写成

$$r\cdot m=1,\quad 并且\quad r=\frac{1}{m},\quad 并且\quad m=\frac{1}{r}.$$

因为0(零)在乘数里起了一个非常特殊的作用，并且对所有的a，$0\cdot a=0$，由它推出$0\cdot a$不可能同时又等于1。所以0没有倒数。

习　题

2.9　说明1/7引出一个无限小数，展开以后是循环的，也就是重复的(循环节的长度是六)。类似地1/9，1/11，1/99是循环的而且必然是无限的。你能不能证明，有限小数对应的分数的分母都是一些数2和一些数5的乘积($2^m\cdot5^n$)？

2.10　你能鉴别符号0.909090909…和0.0909090909…吗？如果它们都是数，你把它们"加"起来将会产生什么结果？你期望得到什么？在接受无限小数作为表达数的方式以前，这个数1的无限小数形式是必须澄清的少量问题之一。

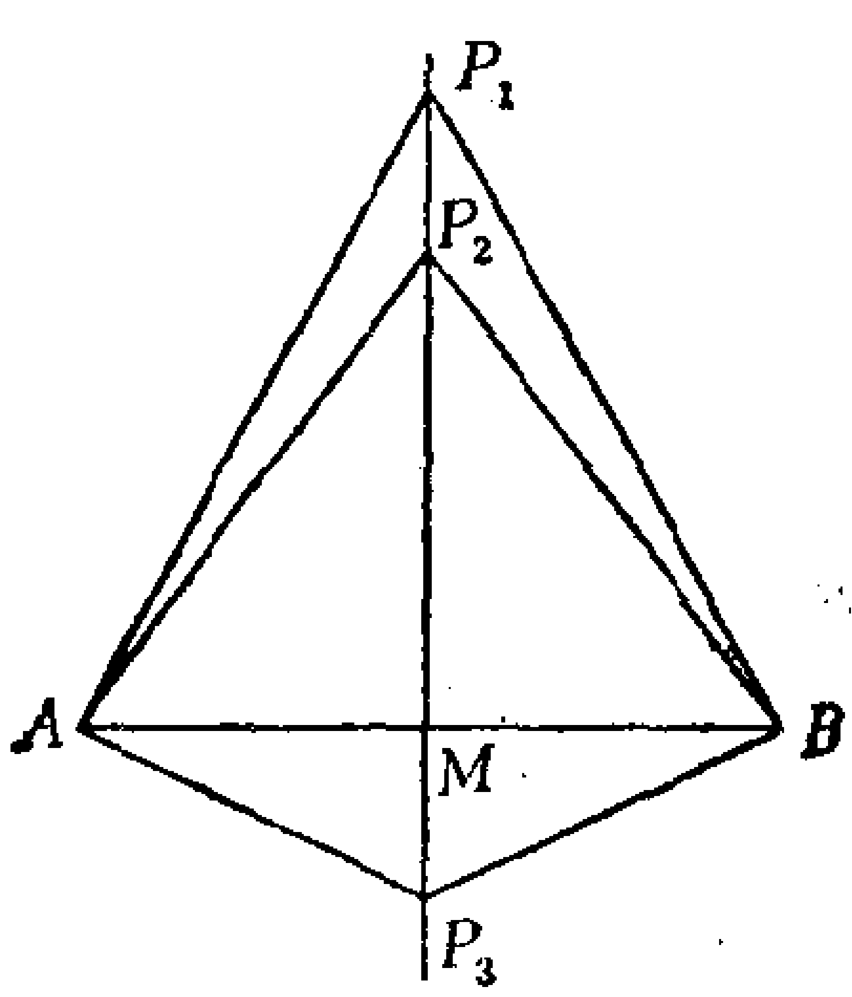


图　2.5

2.11　用倒数表(见图2.4)把除法变成乘法。

2.6　在几何里的无限

欧几里得几何富有无限性。

一些初等的平面几何定理可以解释成关于无限集合的定理。

定理 1 设 AB 表示一线段。平面上与 A, B 等距离的所有点的轨迹是一条通过线段 AB 中点 M，并且和它垂直的直线(图2.5)。

定理 2 如果一个三角形已经确定次序的三边依次等于第二个三角形已经确定次序的三边，那末第一个三角形的每一个角等于第二个三角形对应的角。

定理 1 中的“轨迹”一词就是“集合”的另一说法：在现在的情况下，它是平面上使距离 AP = 距离 BP 的点 P 的集合。其中字母 P 不是用作一个特定的点，而是任意一个与 A, B 等距离的点的名称。这些点的集合是一个无限集合，这个定理说明这些点充满了一条直线。它还说新的直线与原来的那条直线垂直，并且两者相交于线段 AB 的唯一中点 M 处。这条新的直线叫做线段 AB 的垂直平分线。你们会看到这样一个事实，求 AB 的中点 M 的一个方法就是去作这条垂直平分线。

如果你取一个点 P，使 $AP = PB$，并且把 P 和线段 AB 的中点 M 联起来，就得到了两个三角形 APM 和 BPM；你会看出

$$AP = BP, \qquad AM = BM, \qquad PM = PM.$$

现在如果你考察定理 2，就会看出它可以用在这个情形，并且告诉你 $\angle AMP = \angle BMP$。因为这两个角的和是平角 $(180°)$，所以 AMP 和 BMP 是直角 $(90°)$。这意味着直线 PM 和直线 AB 垂直，不管你从 $AP = PB$ 的无限集合中选取的是哪一点 P，总是这个结果。

这些并没有结束定理 1 的证明(你可以很容易地完成其余部分)，但是它完成了我们想干的事。就是说，它证明了有

关无限集合的每一个点的一些事情，而沒有用无限过程。其实，在证明里沒有必要意识到叫做P的点的集合是一个无限集合这个事实。

但是我们确实需要两个重要的工具。第一，我们用了变量的概念。如字母P就是变量，因为我们是这样使用它的。在我们的证明里，字母A, B和字母M不是变量。字母A和B在证明中始终都表示两个确定不变的点。字母M是在证明的过程里产生的。假如我们愿意，我们可以声称这个点是我们命名的，但是AB上只有一个中点，M的意思永远是这个中点。

但是在我们开始着手证明的时候，我们就意识到可以有很多不同的点，譬如说P_1, P_2, P_3等，使得

$$AP_1 = P_1B, \qquad AP_2 = P_2B, \qquad AP_3 = P_3B$$

等。当我们用单一的字母P代表它们的某一个时，我们发现，我们所能证明的事实对它们中的每一个都对。其实我们已经施展了一个很大的技巧。同一个字母P，现在既代表点P_1，又代表点P_2，还代表点P_3等，一次又一次地对于我们的无限集合的所有的点，证明了同样类型的事实。以这样方式使用的字母P叫做几何变量，或者就叫变量。

如果P是线段AB的垂直平分线上的一个变点，那么长度AP也是一个变量，因为它能涉及到很多不同长度中的任意一个。同样，长度PB也是一个变量。假如写

$$AP = PB,$$

我们就得到了一类变量之间的方程。希腊数学家们相当正规地使用它，并且它和我们的近代解析几何是一致的。

我们需要用变量来实现包含无限集合的证明，但是这还不是我们使用的全部工具。我们还用了上述定理2。上面说

过，它用在三角形 APM 和 BPM 上。但是这些三角形是可变的，它们随着 P 的不同选取而变，而且它们的全体是一个无限集合。幸亏，定理 2 包含了这个可能性的无限集合。

我们能得出的结论是，几何定理确实是关于无限集合的。但是证明不一定包含无限过程，因为用了变量，它使我们用一次论证就证明了一个事实的无限集合。

2.7 算术在几何里的回响

欧几里得说："如果给了一条直线 L 和线段 $P'Q'$，就可能用一个和 $P'Q'$ 相等的线段 PQ 无限次地（沿着两个方向）划分 L。" 线段的终点作为下一个线段的起点。

用这样的方式向右（或向左）作的点的序列正好和所有整数的集合一一对应。整数可以看成是序数（就是说，作为有次序的点的标记，譬如说从左到右），也可以看成是基数（就是说，表示从开始算的那个点起，在直线上已经划分了多少个单位 PQ）；参看图 2.6。当然，两个方向的序列分别对应于正整数和负整数。

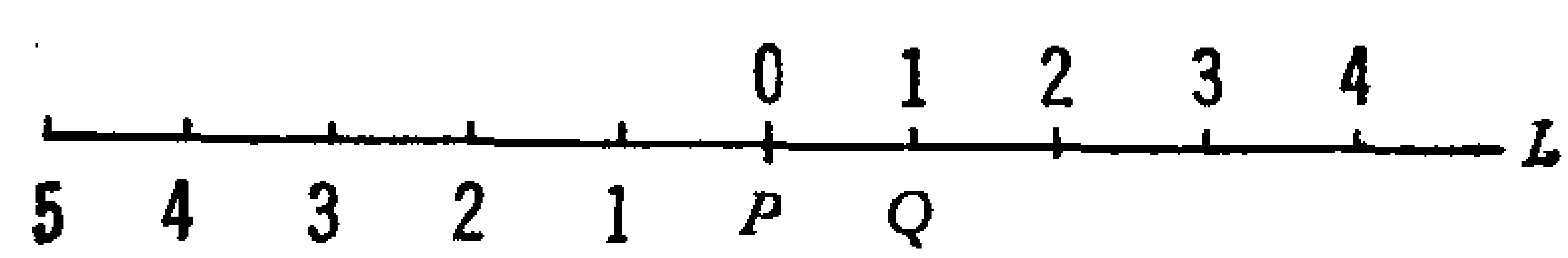


图 2.6

有些历史学家认为欧几里得写的第一本几何书并不意味着几何的开始，而是意味着只处理那些依赖于直尺和圆规作图的定理。欧几里得的大部分公理确实是依据这样的作图来陈述的。从这个观点来说，上面的公理只不过是断言，如果一个人用圆规量 $P'Q'$，然后在直线 L 上选择一点 P 作为中

心，他就能够把圆规转动找到他要的Q点；他还能选取Q作为中心，转动圆规再找一点，这样一下一下地沿着直线前进。

习　　题

2.12　给了一个圆规但是没有直尺，又给了两个点P和Q，说明你能找到一点R，它在过PQ的直线上，使$QR=PQ$，再说明怎样只用圆规作一个点的序列，它们在一条直线上(图2.7)。

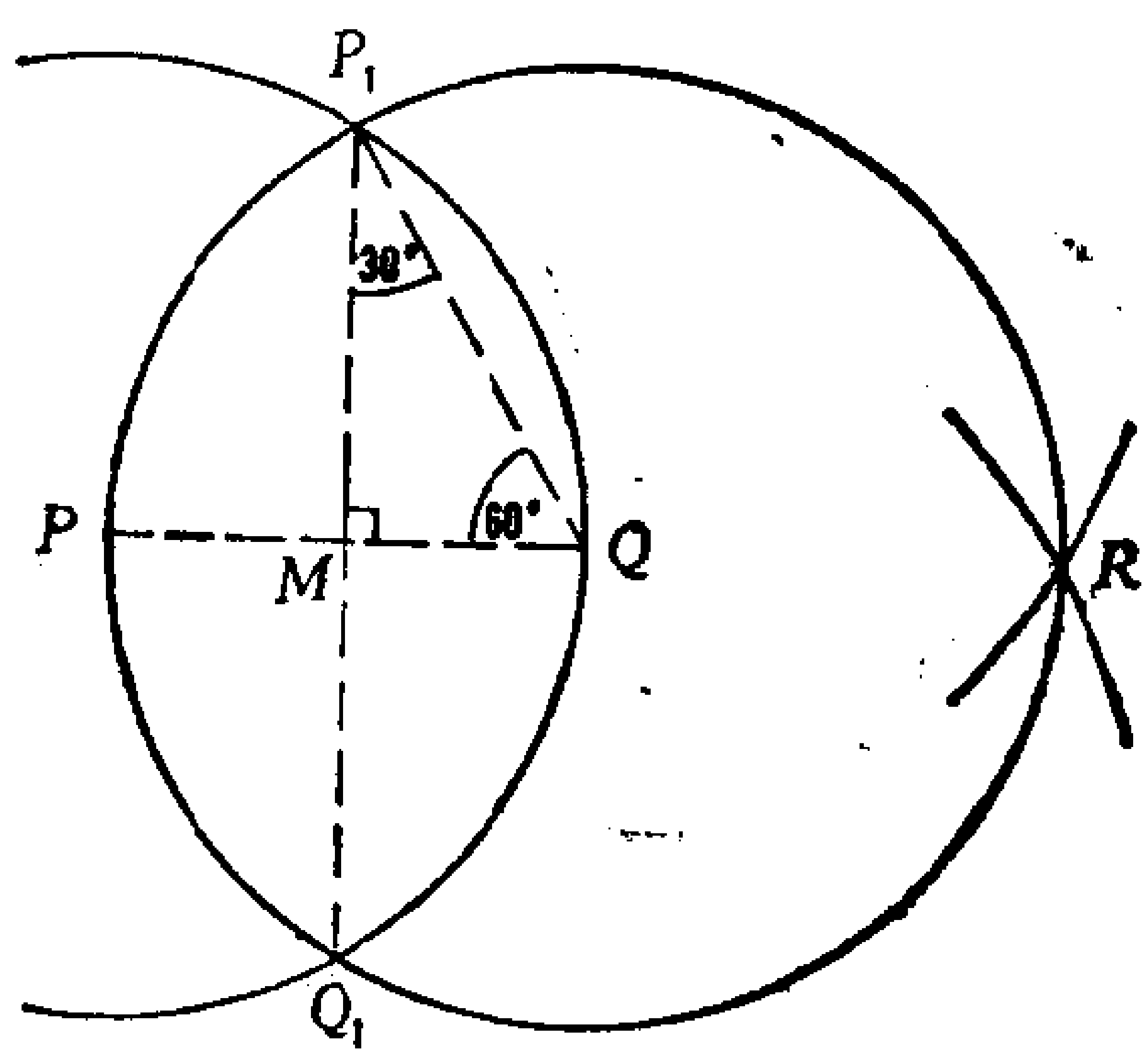


图　2.7

2.13　假如你没有圆规而有一把直尺，它只比PQ长一点。你能在每个方向无限地延长PQ吗？

2.14　解释挖隧道的人怎么能照直穿过一座山而开出一条路来。

2.8　无限序列的几何解释

欧几里得断言每条线段可以(用直尺和圆规)平分，并且产生一对(相等的)线段。因为它们中的每一个又可以平分，而每次平分又产生线段，如此下去，得出的结论是一条线段

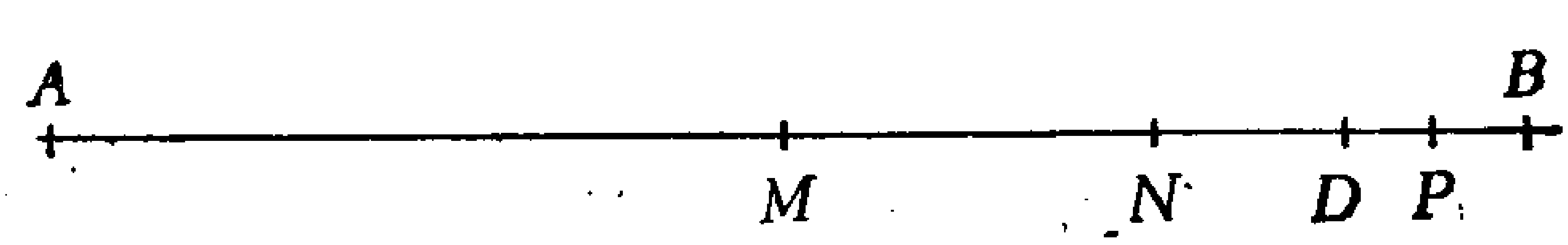


图　2.8

包含无限多个点。为了证实这一点，只要规定一个明确的无穷无尽的平分过程的方案就行了。

图2.8表明了一个特别简单的方案：每一次平分两个新的线段中右边的那一个。当然，在整个作图的时候，沒有达到B，但是现在那个(阿溪里斯的任务)不是目标。然而，很清楚，随着一次一次地平分下去，相继的中点趋近于B；有意思的是，每一个有规则的方案，只要它是通过不断地平分而得到一个无限集合，都有这样一个性质：相继的中点实实在在地趋近于线段上的某一个点。

习　题

2.15　继续图2.9所示的作图，决定相继的中点趋近于线段上哪一个点。

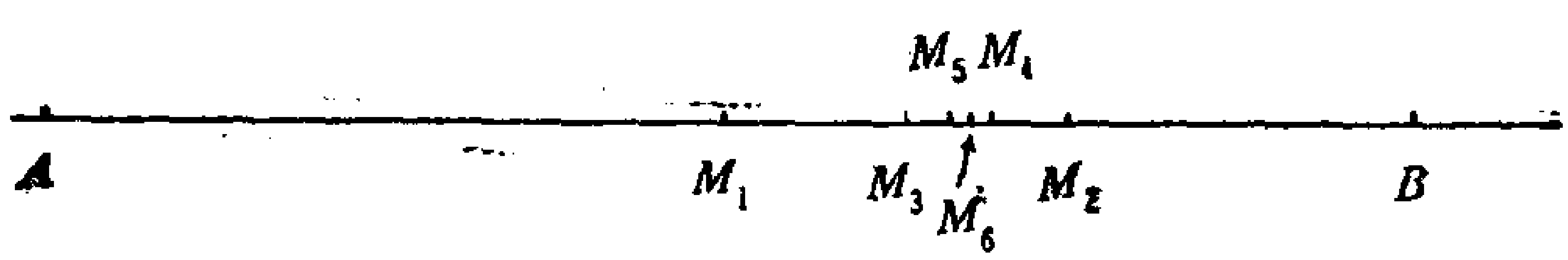


图　2.9

2.16　用三等分，每次取中间的区间，弄明白作出来的点的序列趋近于线段的中点。

如果图2.8的线段AB表示一个长度是1的区间，那末上述的平分使人信服地表明了

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1.$$

画一个图形(见图2.10)，不断地作十等分，第十个永远再细分，它表明

$$0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009+\cdots=1,$$

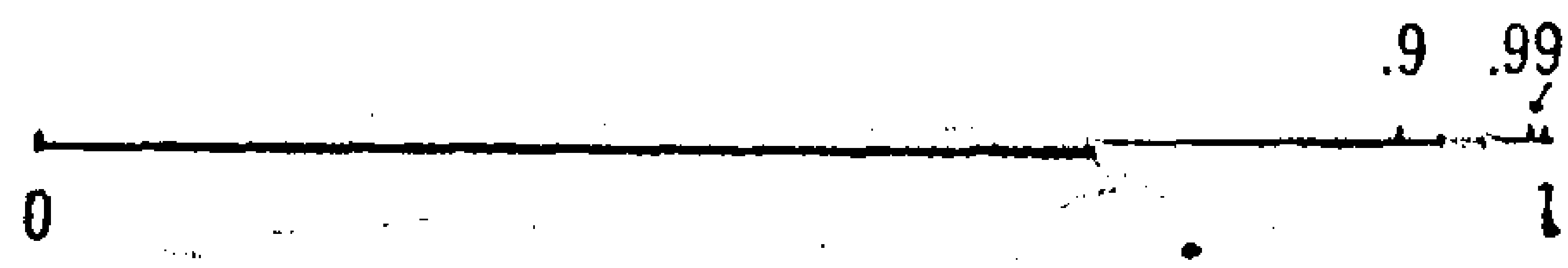


图 2.10

就是说，

$$1=0.999\,999\,9\cdots.$$

我们后面还要更充分地讨论这一点。

习　　题

作图和考虑：

2.17　$0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots.$

2.18　$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\cdots.$

2.19　$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots.$

2.9　耗尽法

阿基米德在试图求抛物线上的一个弓形面积的时候，计算了级数

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}. \qquad (2)$$

他完善了欧多克斯发明的耗尽法，而且把它应用到了一个无限的过程上。他对等式(2)的证明说明了：有些事情从一个观点看来晦涩难解，但从另一个观点看来却可以是平淡无奇的。他说："我们把一个线段分成四个相等的部分，我们拿一份，扔掉两份，还剩一份。这时三段已经分掉了，我们拿了已经分配部分的 1/3。然后我们把剩下的一段拿来，再把它

分成四个线段，保留一个，扔掉两个，这样又有一个留下。在这一步以后，还是很清楚，我们拿了全部已经分配部分的1/3。下面我们又把剩下的一段分成四个相等的线段，拿一个，扔掉两个，剩下一个。在我们继续这个过程的时候，我们总是正好拿了已经分掉的1/3，而只有一个越来越小的线段剩了下来以备再分配。”这就是上面的方程的意思。在眞正作图的时候，最好把我们要加上的长度互相邻接地排着（图2.11）。

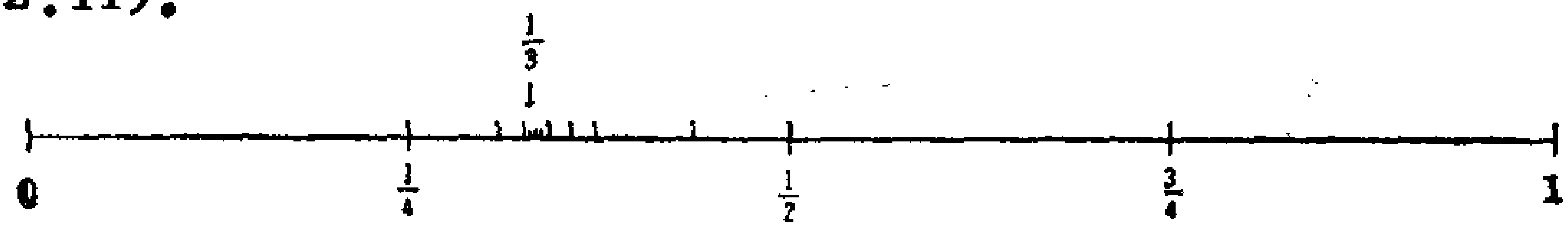


图 2.11

这个方法把全部近代极限论都包括进去了，我们在第三章还要更充分地讨论它。目前，每一个人都会承认，它表明了怎么能猜出答案是1/3；也会承认，如果有一个答案是正确的话，那就是1/3。其次，上面的讨论表明当取级数越来越多的项的时候，得到的和与1/3相差越来越小。第三，这个事实恰好对应了把无穷级数的和定义为极限的近代方式，因此当我们接触到这个定义的时候，阿基米德的证明将显得完全有效。

习　题

2.20　用耗尽法猜测和证明你的答案：

a)　$\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots=?$

b)　$\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}+\cdots=?$

c) $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots=?$

同样类型的讨论可以用到诸如

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots$$

的级数。在这里，一个线段分成了五段，留下两段，两段继续分，扔掉一段；我们拿了已经分配部分的2/3，由此导致很容易猜测的答案。

习　题

2.21　用阿基米德方法，相当一般地证明，对任意的一对使 m 小于 $n/2$ 的整数 m 和 n，有

$$\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^2+\left(\frac{m}{n}\right)^3+\cdots=\frac{m}{n-m}.$$

用字母 r 代替比值 m/n，我们可以把习题 2.21 中公式的左端写成

$$r+r^2+r^3+\cdots=?\ .$$

你发现怎样去得到用 r 表示的右端了吗？如果你能够而且已经解答了习题2.21，那末你就已经在比值 r 是有理数并且小于1/2的情况下，用欧多克斯-阿基米德方法得到了无穷几何级数所有项之和的著名公式的证明。然而，这个公式的很多证明对于绝对值小于 1 的任意 r 都是有效的。

最后，把你的解答改成

$$1+r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r},$$

并且观察到

$$a+ar+ar^2+\cdots=\frac{a}{1-r}.$$

在这个公式里能够 $a=0$ 吗？在原始方法里能 $r=1$ 或者 r 能超过 1 吗，就是说，能 $m=n$ 或者 $m>n$ 吗？（符号“$>$”读作“大于”。）

2.10 2的平方根

公式

$$\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3+\cdots=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

是荒谬的，稍微想一下就会明白这一点。右边是负的；左边如果是什么的话，那就是“无限大”。尽管它形式上是对的，即

$$r+r^2+r^3+\cdots=\frac{r}{1-r},$$

但是它违反了 r 要小于 1 的限制。另一方面，$\sqrt{2}/2$小于1，并且公式

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

是对的，它等于正数$\sqrt{2}/(2-\sqrt{2})$。但是上一节中给的那种证明沒有证明这一点，因为那个方法只有当级数里的数是整数的比值的时候才可行。

我们首先来说明确有象$\sqrt{2}$这样的一个数，方法是证明

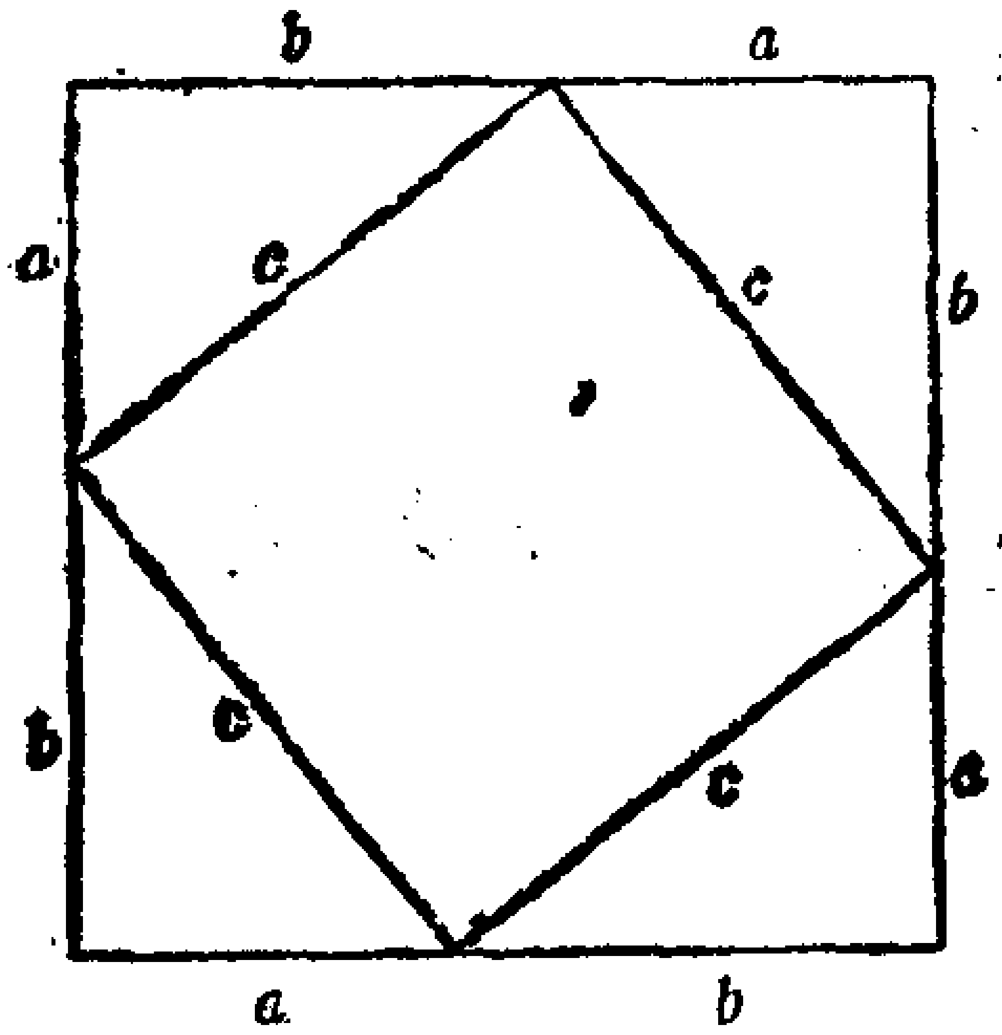


图2.12 内部的正方形和四个三角形拼成了大正方形

$\sqrt{2}$代表了单位正方形的对角线的长度。我们用证明毕达哥拉斯定理的方法来做到这一点。然后我们要说明$\sqrt{2}$不是任意一对整数的比值。

下面毕达哥拉斯定理的证明属于"看"的类型（就是说，当观察者看一个图形时，可以看出来；参看图2.12）：

$$c^2+4\left(\frac{1}{2}ab\right)=(a+b)^2=a^2+b^2+4\left(\frac{1}{2}ab\right);$$

把这个等式的两端都减去$4\left(\frac{1}{2}ab\right)$，我们得到

$$c^2=a^2+b^2.$$

最后，如果$a=b=1$，我们得到

$$c^2=1+1,\quad c=\sqrt{2};$$

这是单位正方形的对角线的长。

下面给出的$\sqrt{2}$不是两个整数的比值的证明是一个所谓"间接"证明，归谬法(反证法)。

如果$\sqrt{2}$能表示成两个整数的比值，譬如说是p/q，那末我们能把p/q选成一个(在所有等价的分数里)分母尽可能最小的分数。

我们知道(见图2.13)1小于$\sqrt{2}$，就是说

$$1<\sqrt{2};$$

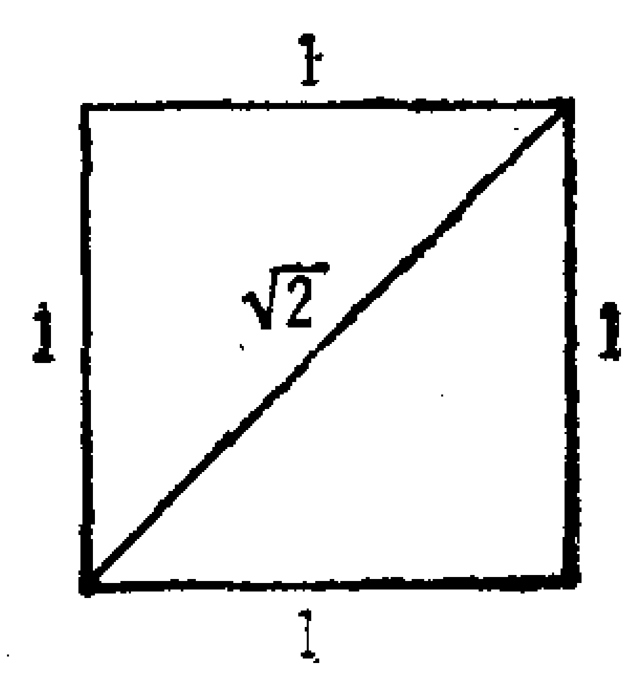


图 2.13

把这个不等式用$\sqrt{2}$乘，我们又知道

$$\sqrt{2}<2.$$

现在，如果

$$\frac{p}{q}=\sqrt{2}, \quad \text{那末} \quad p=\sqrt{2}\cdot q.$$

因此p/q大于1但小于2；就是说，p大于q但小于$2q$，因此$p-q$是正数而且小于q。

下面，把$p=\sqrt{2}\cdot q$自乘，我们有

$$p^2=2q^2,$$

减去pq得

$$p^2-pq=2q^2-pq \quad \text{或者} \quad p(p-q)=q(2q-p),$$

所以

$$\frac{p}{q}=\frac{2q-p}{p-q}.$$

但是右边是一个p/q的表达式，它的分母小于q，这是一个矛盾。

习　　题

2.22　把$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$作为无理数讨论同样类型的证明。它们是无理数吗？并证明。（提示：在研究$p=\sqrt{5}\cdot q$的时候，注意$p-2q$小于q，因为$\sqrt{5}$小于3。）

2.23　研究$p=\sqrt{7}q$，注意$p-2q$小于q。

2.24　说明从$\sqrt{2}$是无理数容易推出$\sqrt{8}$是无理数。

2.25　研究$p=\sqrt{n}\cdot q$，设有一个整数k，使

$$k^2<n<(k+1)^2.$$

说明如果一个整数不是整数的平方，那末它也不是一个分数

的平方。

2.26 说明仅当$\sqrt{s}$是一个整数的时候，$2\sqrt{s}$才是一个整数。

2.11 计算2的平方根

让我们用两个逼近$\sqrt{2}$的迭代作法来结束本章。在代数里为了解二次方程我们需要象这样的数；如需要$\sqrt{2}$来解方程

$$x^2=2.$$

这个数可能被一个受好奇心所驱使的人梦想过，当他注视着平方的序列

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,$$
$$100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, \cdots$$

并注意到，看来沒有任何一个数正好是前面某一个数的两倍那么大。49和25这一对比较接近，但是沒有一个整数的平方是另一个整数平方的两倍，这是一个事实；就是说

$$m^2=2n^2$$

不可能有任何一对整数解。但它是能由实数解出来的。

求数$\sqrt{2}$的值这一问题有着极其古老的历史。诺格包尔(Neugebauer)教授，数学史权威之一，告诉我们，古代巴比伦人用他们的六十进制记数法给了一个估计(1;24,51,10)，相当于我们的十进制记数法中的1.414213…，天文学家托勒密(Ptolemy)2000年以后用了这个估计。他还指出一个到现在还在用着的逼近$\sqrt{2}$的方法(我们下面给的第一个)可能就是古代巴比伦人用过的；记载里暗示了这一点，但不十分明确。

这个方法基于下面的观察。设$a=\sqrt{2}$，那末

$$\frac{2}{a}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=a,$$

所以

$$a+\frac{2}{a}=2a \quad \text{或者} \quad \frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)=a.$$

如果我们知道$\sqrt{2}$的正确值，我们能把这个值与2除以这个值的商相加，把所得到的和取一半，就重新得到了这个值。现在这个方法是：

第一步。取一个正的估计值，譬如取1作为第一次近似。

接下去的步骤：把整数2除以这个在上一步中得到的估计值。然后把这个商与你刚用过的估计值的和的一半作为一个新的估计值。

同样，一般的步骤可以用代数的记号写成：设a表示上一步得到的$\sqrt{2}$的估计值。那末新的估计值是

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right).$$

我们还能把上述步骤写成一个迭代公式：

第一步 $\qquad a_1=1,$

第k步 $\qquad a_k=\frac{1}{2}\left(a_{k-1}+\frac{2}{a_{k-1}}\right),\quad k=2,3,4,\cdots.$

有意思的是看一下前面几个$\sqrt{2}$的近似值是什么。我们从1开始。下一个我们得到$(1+2)/2=3/2$。这个估计值给出下一个

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{6}\right)=\frac{17}{12}.$$

第 4 步，$k=4$，我们得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right)=\frac{577}{408}.$$

这个估计值1.414215…很惊人地接近眞值。再接近一点的值将是1.4142140。

很清楚，我们用这个方法得到了一个估计值的无限序列，但是至少可以想象经过一些步骤以后我们找到了一个分数，它的平方是 2 。如果这件事确实发生了，过程会继续，但是它不断地给出同样的答案。然而，这件事没有发生；它不可能发生，因为正如我们在上一节中所看到的，$\sqrt{2}$ 不是一个有理数（不是两个整数的比值）。这个事实大约在公元前500年确实被证明了，可能是由毕达哥拉斯本人证明的。有记载说，他认为$\sqrt{2}$的“无理性”是一个从哲学背景上看最不愉快的事实，因为它表明世界不是象他所希望的那样单纯和谐。据推测，他曾经命令把这个事实在他的哲学研究集体的范围中保密，还有一个传说，说至少有一个他的学生由于散布了这个坏消息而被杀。

毕达哥拉斯把他自己和我们引导到面临一个严重的问题。几何材料说，作为 2 的平方根，有这样一个数，它甚至说这是一个实践上最重要的数，对木工和其他工艺都如此。但是这个数确实不是一个整数，并且如果它也不是一个整数的比值，那末它是什么样的数呢，怎样去写它呢？

当今，这些问题已不难回答，这本小书也迟早会回答它们。当我们要说到$\sqrt{2}$的时候，可以随便给它一个名字，只要别人能认识就行。例如，可以叫它“对角线”，或者“单位

正方形的对角线"，或者"2的平方根"(因为还有一个负根，如果想到也许会发生误解，我们可能还要加上"正的那一个")；或者现在简单地用它的标准名称$\sqrt{2}$；(这样就用不着加上"正的那一个"，因为这个符号把这个意思包括进去了，根据定义，$\sqrt{2}$就是表示正根)。

当然，如果真正地要用$\sqrt{2}$——例如我们制造一些方的物品——这时名称本身是不够用的。但是在这个情况下，我们知道我们的工作必须要有多么高的精确度，因而也就知道$\sqrt{2}$需要取几位小数。然后可以在平方根表里查它，有五位的表也有十五位的表。今天一个计算机可以在一个下午给我们几千位。如果既没有机器又没有表，但有充分多的纸张，那么我们要多少位，上面的迭代作法就可以给我们多少位，只要作足够多步就行。

如果在这个格式里a和$2/a$中的一个小于$\sqrt{2}$，那末另外一个就大于$\sqrt{2}$。例如，$a<\sqrt{2}$蕴涵了

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 和 \quad \frac{2}{a}>\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

你能很快地验证17/12比$\sqrt{2}$稍大一点，24/17稍小一点，17/12大约是1.417，24/17大约是1.413；如果这些数里一个偏小，另一个偏大，那末它们的和的一半(它是1.415)必然在最后一位准确到两个单位。对于一个特定的工作来说，这也许已经足够好了也许还不够，但是它表明了数学家认为是满意的事情：一个估计值和一个给出了可能的误差范围的控制。

我们再给另一个求$\sqrt{2}$的近似值的方法，它和十进制记数法是如此紧密地联系在一起，因此它会帮助我们在以后理

解一个实数的意思是什么($\sqrt{2}$是一个实数；所有的有理数也都是实数)。

第一步　取一对连贯的整数1和2。把它们乘以10（得到10和20），并且插进九个连贯的整数；你得到了

10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，20。

在这些数里，有一对连贯的数使得第一个的平方的第一位是1，第二个的平方的第一位是2。找出这一对连贯的整数。每一个除以10就给了你一个$\sqrt{2}$的近似值(第一个稍小一点，第二个稍大一点)。

接下去的步骤　把上一步得到的一对连贯的整数乘以10并且插入9个连贯的整数。在这十一个整数中有一对连贯的整数，使得第一个数的平方的第一位是1，第二个数的平方的第一位是2。找出这一对。每个整数除以10的适当幂次，就又给了你一个$\sqrt{2}$的近似值(第一个稍小一点，第二个稍大一点)。

为了看一看这是怎么做的，我们把上面第一次的十一个整数的平方算出来，它们是

100，121，144，169，196，225，256，289，…，400；

很明显，我们要的是196和225的平方根，就是连贯的一对(14，15)。

下一步给了140，150，并且从它们得到

140，141，142，143，144，145，
146，147，148，149，150。

根据求平方我们发现$(141)^2=19881$和$(142)^2=20164$，因此所要的连贯的一对是(141，142)，对应的近似值是1.41和1.42。读者如果再往下做几步就会聪明起来。他会发现，每

一步计算时都能利用上一步的计算，把他的工作系统化得几乎成为一件乐事。此外，他还会发现，每一步都给出一个改进了的答案；就是说多了一位精确小数。不仅如此，这个方法表明（对第一个方法来说，同样的事实也是对的，但不那么容易看出来）如果需要 n 位小数，那末只要连续算 n 步总是可以得到它的。

习　　题

2.27　证明下面的规则：为了用12.5乘一个数，可把小数点向右移两位，然后用 8 除。

2.28　一个给定的数的根数定义如下：把这个数所有各位数加起来；如果结果大于 9，再把这个和的所有各位数加起来；继续下去直到得到一个小于10的结果；这就是给定数的根数。证明一个数与它的根数属于模 3 同余类。因此，一个数可被 3 整除，当且仅当它的根数可以被 3 整除。

2.29　只用 0 和 1，(a) 作一个有非常长的循环节的小数；(b) 系统地作一个小数的序列，每一个比前一个的循环节长；(c) 作一个无限的，不循环的小数。

第三章　从$\sqrt{2}$到无限

3.1　不可约的量

$\sqrt{2}$是无理数看来违背常理，就象下面所表明的那样：给我们两个不相等的长度，并且告诉我们："把它们分成相等长度的小段，随便多少段都行，但是它们必须全都同样长！"可惊的是这个任务有时候不能完成。如果两段是27和33，或者$27\sqrt{2}$和$33\sqrt{2}$，这项工作是容易的。但是如果长度是1和$\sqrt{2}$，这个问题是无解的。

你可以得到近似解，但是得不到精确解。$\sqrt{2}$是无理数说明两个给定的长度不一定是可约的；也就是说，可以不存在一个单位长度，使得每一个给定的长度都是单位长度的整数倍。但是为了比较两个长度，人们总是用同一把尺来量它们。这使得长度的"不可约"听上去好象长度的"不可比较"，这是非常混乱的。事实上，确实意味着需要一个无限过程。

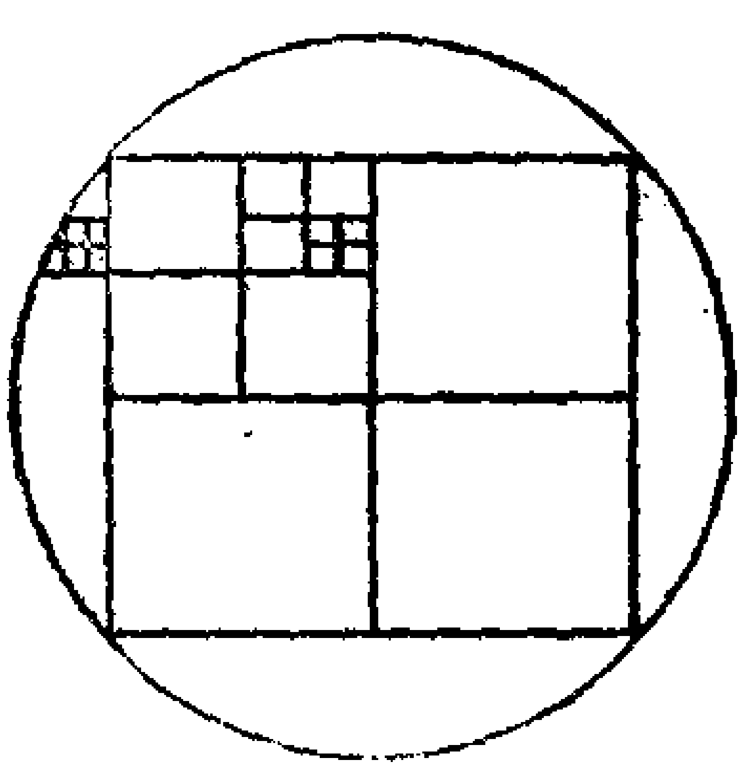


图　3.1

希腊数学家们意识到计算圆的周长和面积的问题同样导致一个无限的过程，因为不存在一个不管多么小的正方形，把它重复若干次以后，恰好能把一个圆的面积填满。这两个形状的本性不允许做到这一点；参看图3.1。

因此数学家们知道不可约与不可比较之间的区别，但是他们惊奇地看到这个问题和直线段联系起来了，和长方形的

面积也联系起来了，就象下一个图所表示的那样。

图3.2里的长方形的面积是二平方英尺。第一个2英尺长，1英尺宽；第二个3/2英尺长，4/3英尺宽；第三个（内部的图）是一个正方形，每边长$\sqrt{2}$英尺。

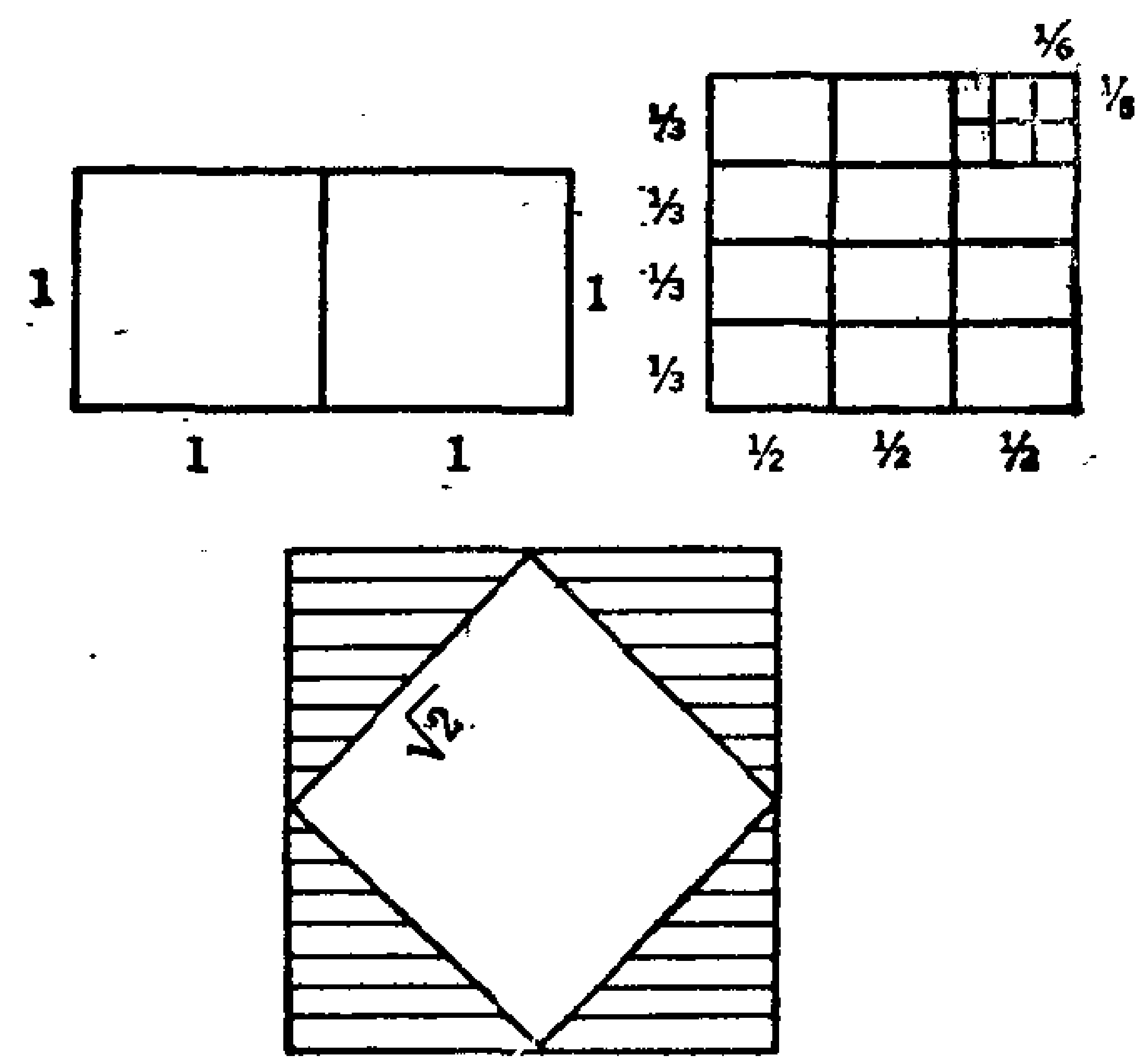


图 3.2

容易看出，第一个包含了两个单位正方形，第二个包含了72个小正方形（每一个是1/6乘1/6）。第一个也可以分成72个（1/6乘1/6）正方形。从第三个图形看不出任何理由，为什么沒有这样一个小正方形，把它重复若干次以后，能恰好既把沒有阴影的面积塡满，又把大的面积塡满。但是这就是$\sqrt{2}$是无理数所产生的后果。

希腊的数学家们确认了$\sqrt{2}$是无理数以后，他们能够习惯于这个事实。但是依然有麻烦的事情，因为希腊人开始沒有想到这个可能性，在他们过去的证明里沒有允许发生这样的事情。很多证明，特别是在关于面积和比例的理论里，在它们所允许的范围内是正确的，却忽略了后来所谓的“不可

约情形"。(直到最近五十年前，中学几何教科书才以细心地处理不可约情形为其特色。)在第六章会给一个非常清楚的例子，它表明一个定理在不可约情形要分开来处理。

正确的证明要求有一个恰当的极限理论。这一点由欧多克斯弥补了(公元前350年)；他提出了一个一般的原理，现在叫做欧多克斯原理。它的一个特殊形式是阿基米德公理，我们现在知道它太笼统了，但是它对所有欧多克斯熟悉的几何形状都是适用的。欧多克斯原理是：如果A和B是给定的同一几何类(长度、面积或者体积)的两个量，那末永远存在一个整数，譬如说m，使得m乘A大于B。

在他的原理的基础上，他给了一个实现极限过程的方法，后来称其为**耗尽法**。在2.9节里给出了这个方法的一个例子。

几世纪以后，正是阿基米德用了欧多克斯的工作去计算了一大批与弯曲图形(球和圆柱、抛物柱和一些抛物体、螺线)有关的体积、面积和长度。他的成就传了一代又一代，从一个国家到另一个国家(在大约公元500年离开欧洲，过了几个世纪后，大约在公元1400年又传回来了)。这个令人鼓舞的新代数方法的一般性，掩盖了藏在背后的严密的思想；直到十九世纪它才被重新发现。

欧多克斯的断言等价于：给定两个(同一类型的)几何对象，大小各是A和B，那末有某一个整数q，使得

$$A=qB+R.$$

在这里R是一个同一类型的量，小于B。把B作为一个变量来处理，并且对B取越来越小的单位，就得到越来越小的剩余R，因此得到了对A的值的越来越好的近似。

一些几何量必须用无限过程来计算的这一事实引出了反

问题：怎么能知道一个给定的无限过程确实导出一个数？欧多克斯在发现实数系统的同时，发明了一个恰当的极限理论。戴德金(Dedekind)在十九世纪七十年代重新发现了它。

习　　题

3.1　研究下面的定理：给定三角形 ABC 和平行于底边 BC 的线段 $B'C'$。那末比值 $AB':B'B$ 和 $AC':C'C$ 相等。

虚线表明在 $AB':B'B=3:2$ 的特殊情形下，怎样能证明这个定理。带点的角是相等的（图3.3）。

把证明推广到

$$AB':B'B=m:n$$

的情形，在这里 m 和 n 是正整数。如果 $m=\sqrt{2}$ 和 $n=1$ 将会怎样？

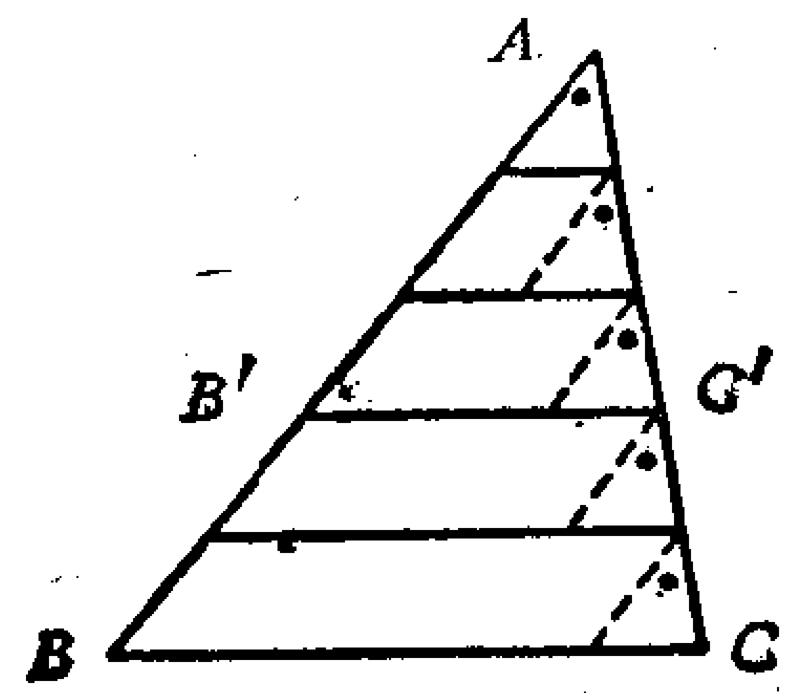


图 3.3

3.2　倒数和其他数量关系的几何作图

每个边长是 x 和 y，而且乘积 $xy=1$ 的长方形具有1个平方单位的面积。如果 x 是给定的长度，我们可以用一个如图3.4那样的简单的作图来求 y。首先记：

$$y=\frac{1}{x},\qquad \text{或者更好一些}\quad \frac{y}{1}=\frac{1}{x},$$

把最后一个方程解释成两个比值之间的相等关系，它们属于相似三角形 OPB 和 OQA，其中 $OP=x$，并且 $OB=1$；$AO=1$，并且 $OQ=y$。AQ 平行于 BP。

作图时，$x=OP$ 是给定的，正方形 $AOBC$ 一旦固定以后

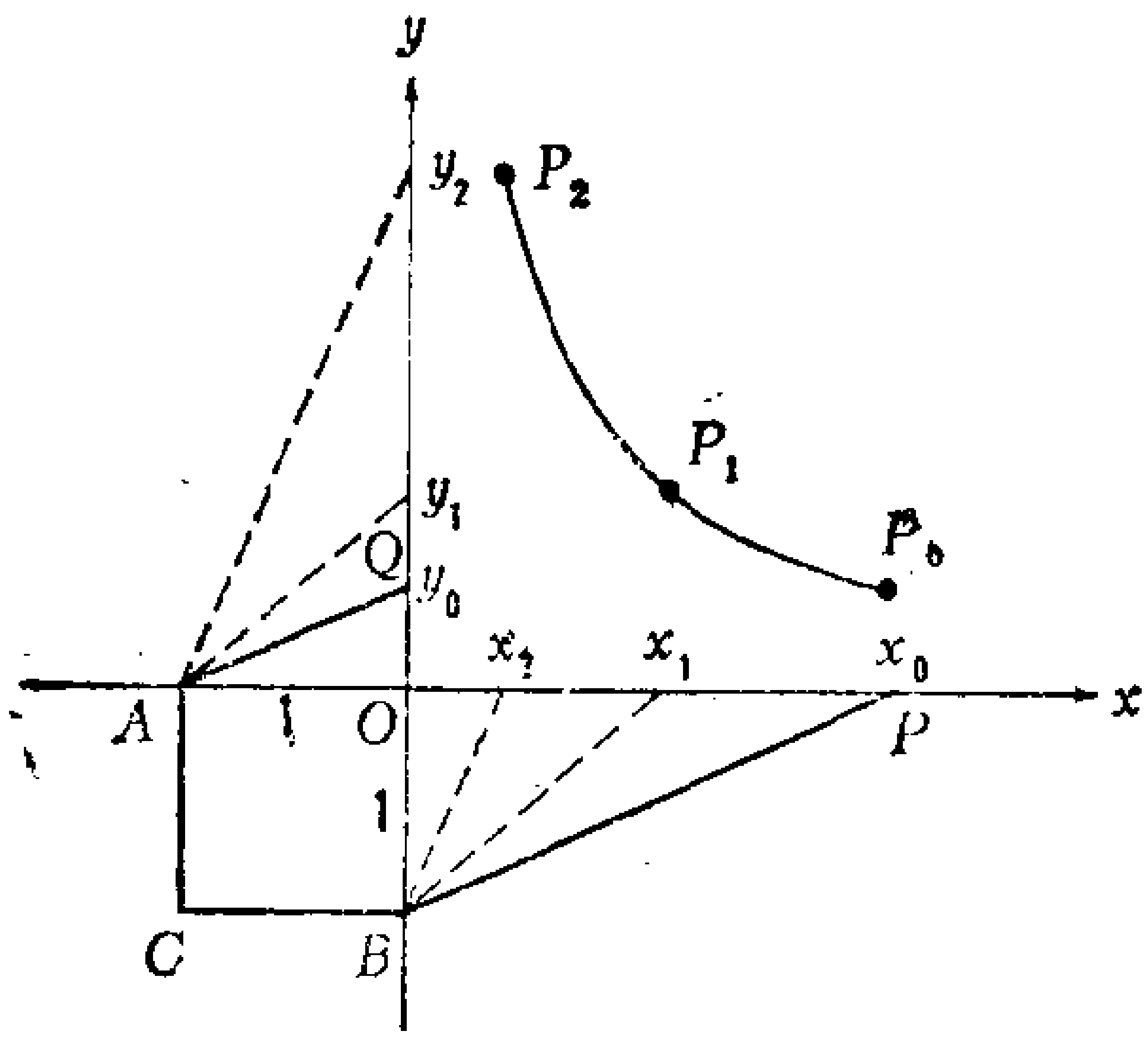


图 3.4

再也不变。画出 BP 或者仅仅想象它，并且作平行线AQ，得到OQ作为y。如果对很多给定的不同长度$x_0, x_1, x_2, \cdots$，作长度 $y_0, y_1, y_2, \cdots$，然后用得到的数对（x_k，y_k）作为点P_k 的坐标，就可以把它们用一条曲线联起来（当画了足够多的点以后，就使人确信画出来的图3.5）。

用一把直尺就可将此图变成倒数表，它可以用来确定每一个数 x 的倒数$1/x$。

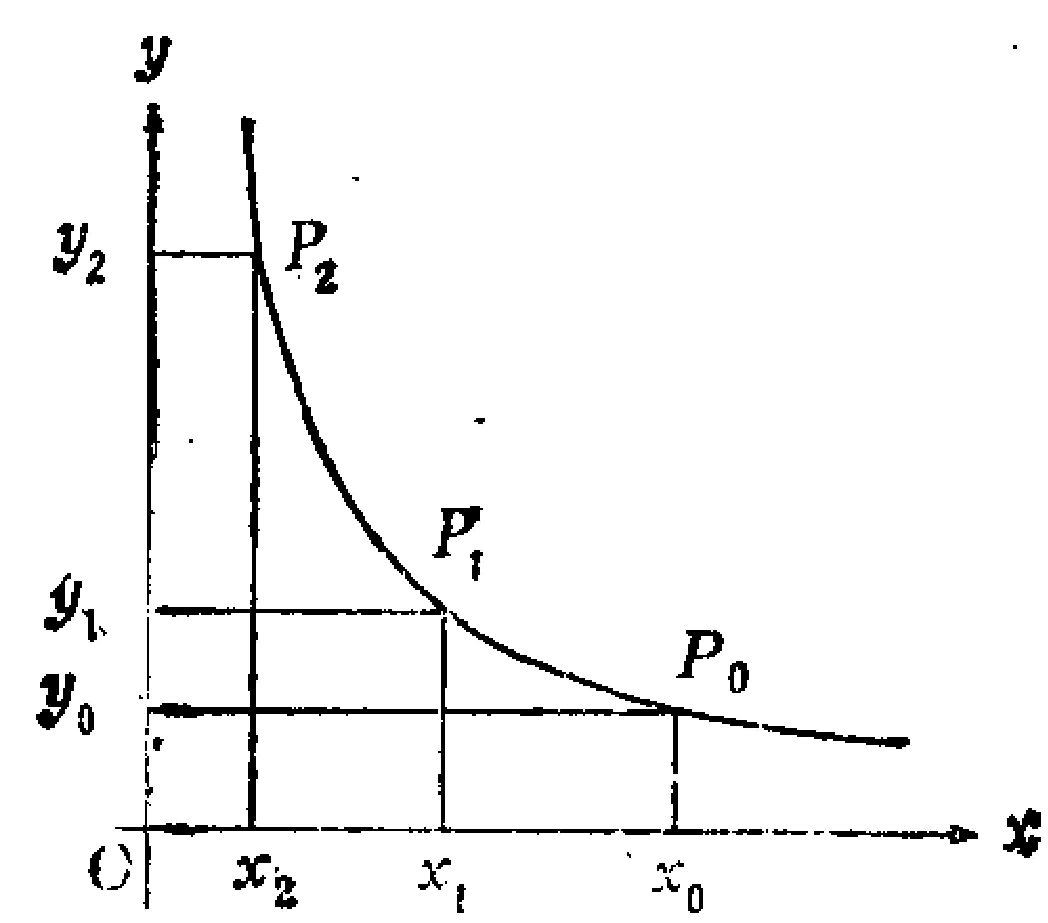


图3.5 $xy=1$或者$y=1/x$

习　　题

3.2　有没有一个单位面积的长方形，它的一边长度为零？

3.3　分析图3.6指出的

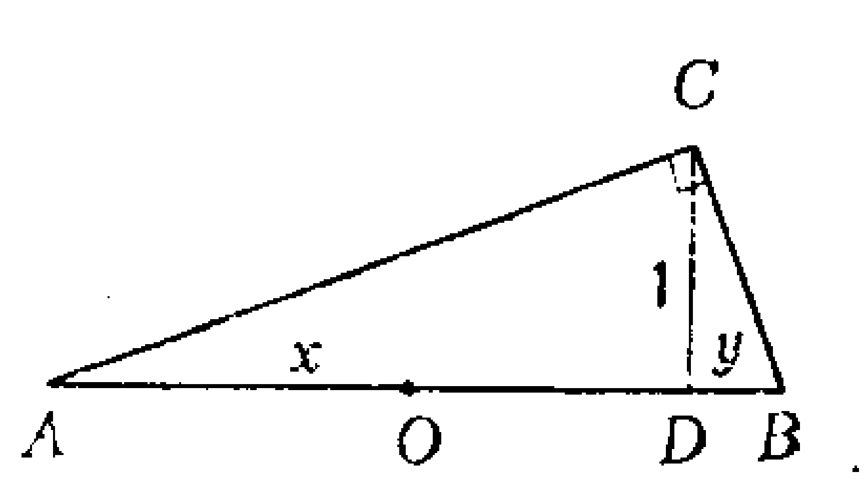


图 3.6

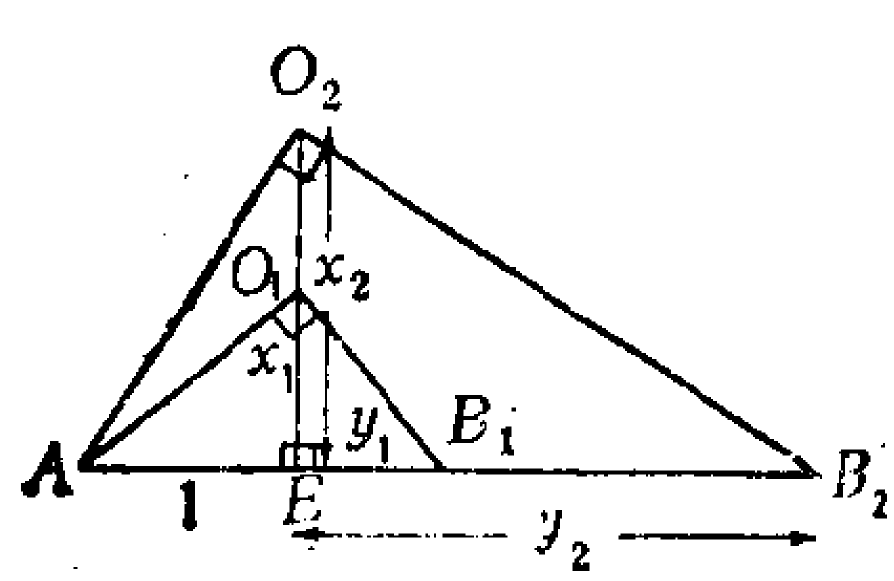


图 3.7

求给定数 x 的倒数 $y=1/x$ 的过程。

3.4 把抛物线 $y=x^2$ 解释为

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{1},$$

从而给出它的作图的详细过程(图3.7)；然后利用图3.8(在O点是直角)来描点联线作出曲线 $y=x^2$。

3.5 曲线 $y=x^2$ 的这个作图法和下面问题的关系是什么：给定任意一个长度 x，是不是永远能找到 $\sqrt{x}$？把这个问题和上面的作图法联系起来。

3.6 一般而言，不可能用有限步只包含直尺和圆规的作图求立方根，这是一个事实。但是可以画大量的"立方数"，由此画出曲线 $y=x^3$。怎么能用这条曲线近似地求立方根？

3.7 作 $y=x^2$，并读出

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

利用 $x^2=1-x$，就是 $x^2=y=y'=1-x$ 的形式，用这条曲线和一把直尺求解 $x^2+x-1=0$(图3.9)。

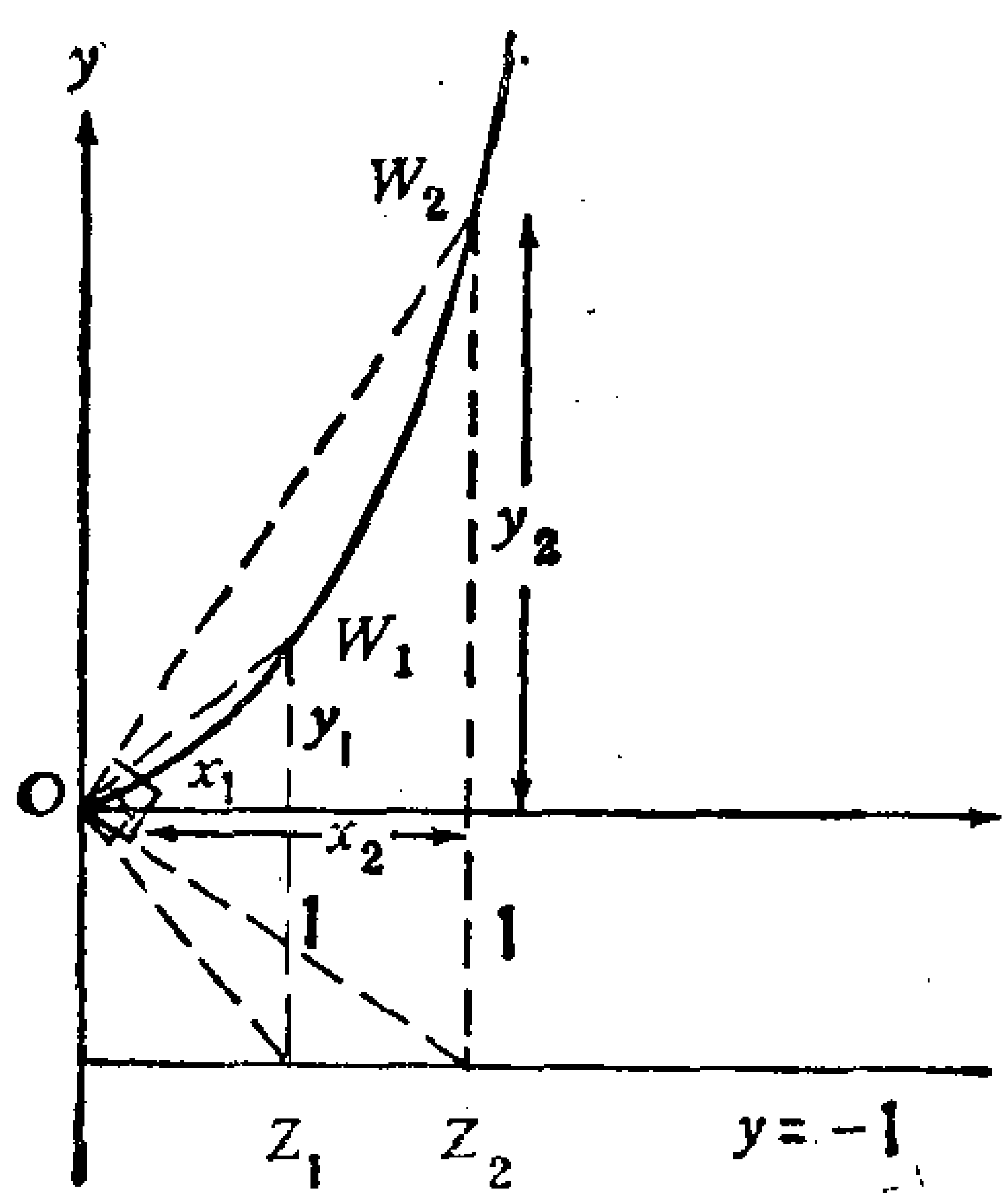


图 3.8

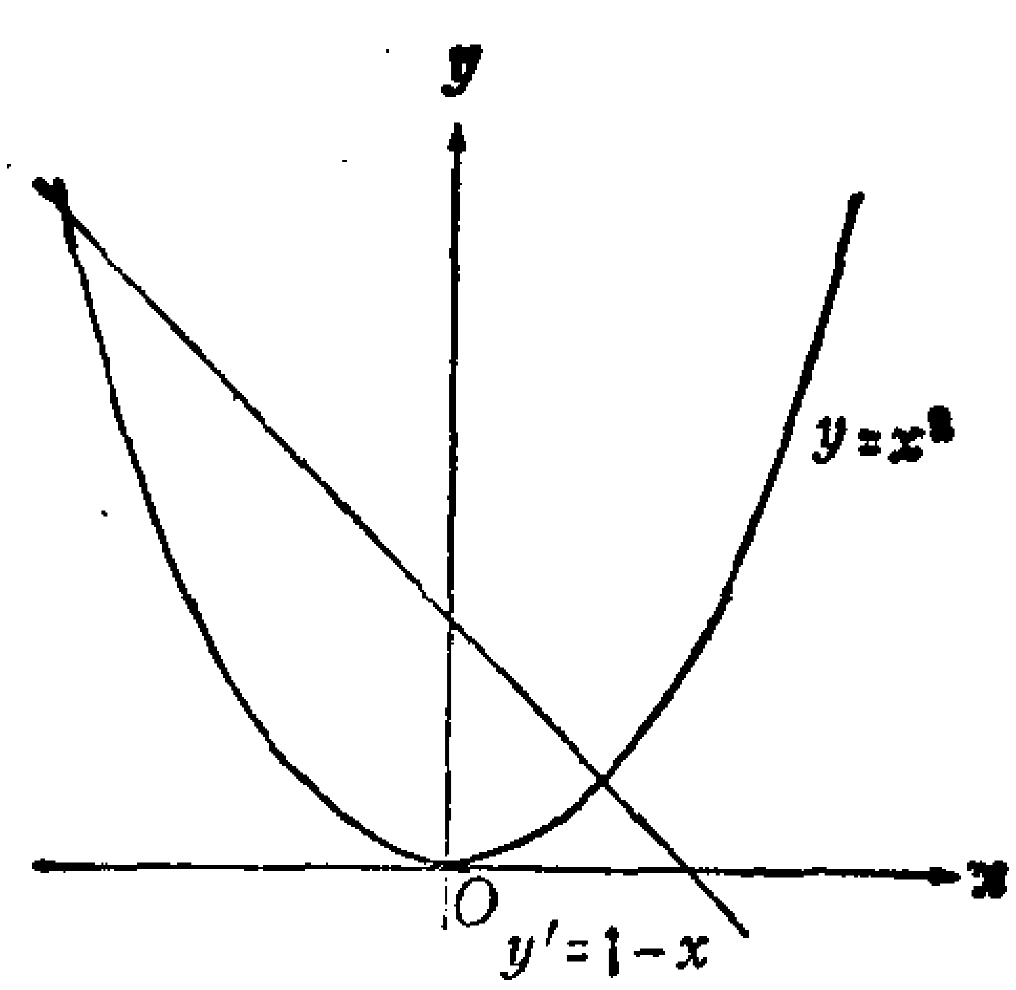


图 3.9

3.3 平方无理数的旋涡

在序列 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \cdots$ 中，有一些明显地是整数，因此是有理数，例如

$$\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}.$$

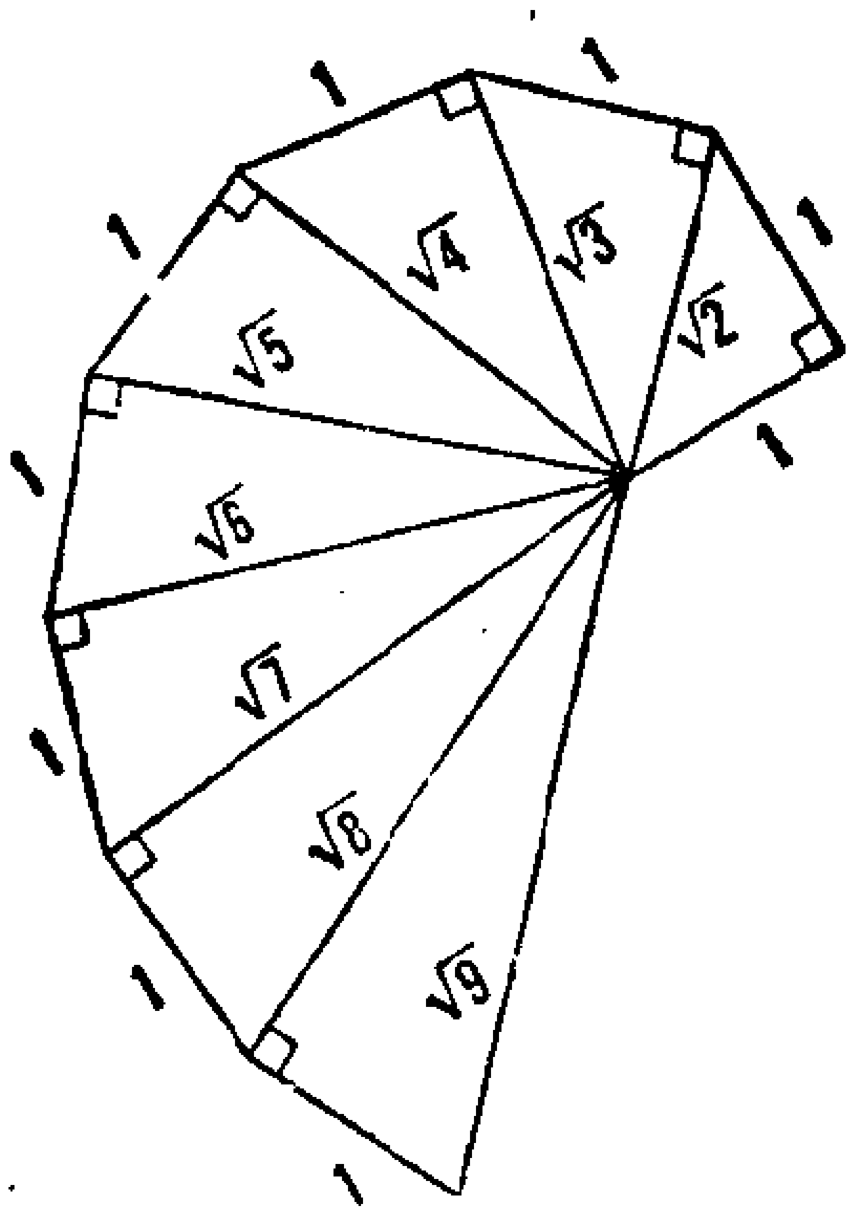


图3.10 无理数的旋涡

不难证明，只有这些“平方数”才是有理数。图3.10指出怎样从1开始，归纳地作直角三角形，就能作出它们的全体。

习 题

3.8 继续作图直到你能猜出来当 n 变得越来越大时，量 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 会怎么样为止。当然，序列的每一项比前一项大，而且每一项与它前面一项的差永远大于零。

3.9 你能把恒等式 $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ 用到上面的问题来帮助你证明你的猜想吗？提示：如果你用得正确，右端项等于1.

3.10 预测当 n 越来越大时，$\sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})$ 的变化趋势.

3.4 极限点的图解

图3.11所表示的曲线引出了一个关于极限的想法，它和这本书里任何的其他例子的思路都不一样。它是由与苏格拉

底同时代的（公元前450年）希比亚斯（Hippias）作出来的，他用这个解决了测量圆面积的问题。它叫“方化曲线”，这个名字是从它把圆“变方”的事实推演出来的。

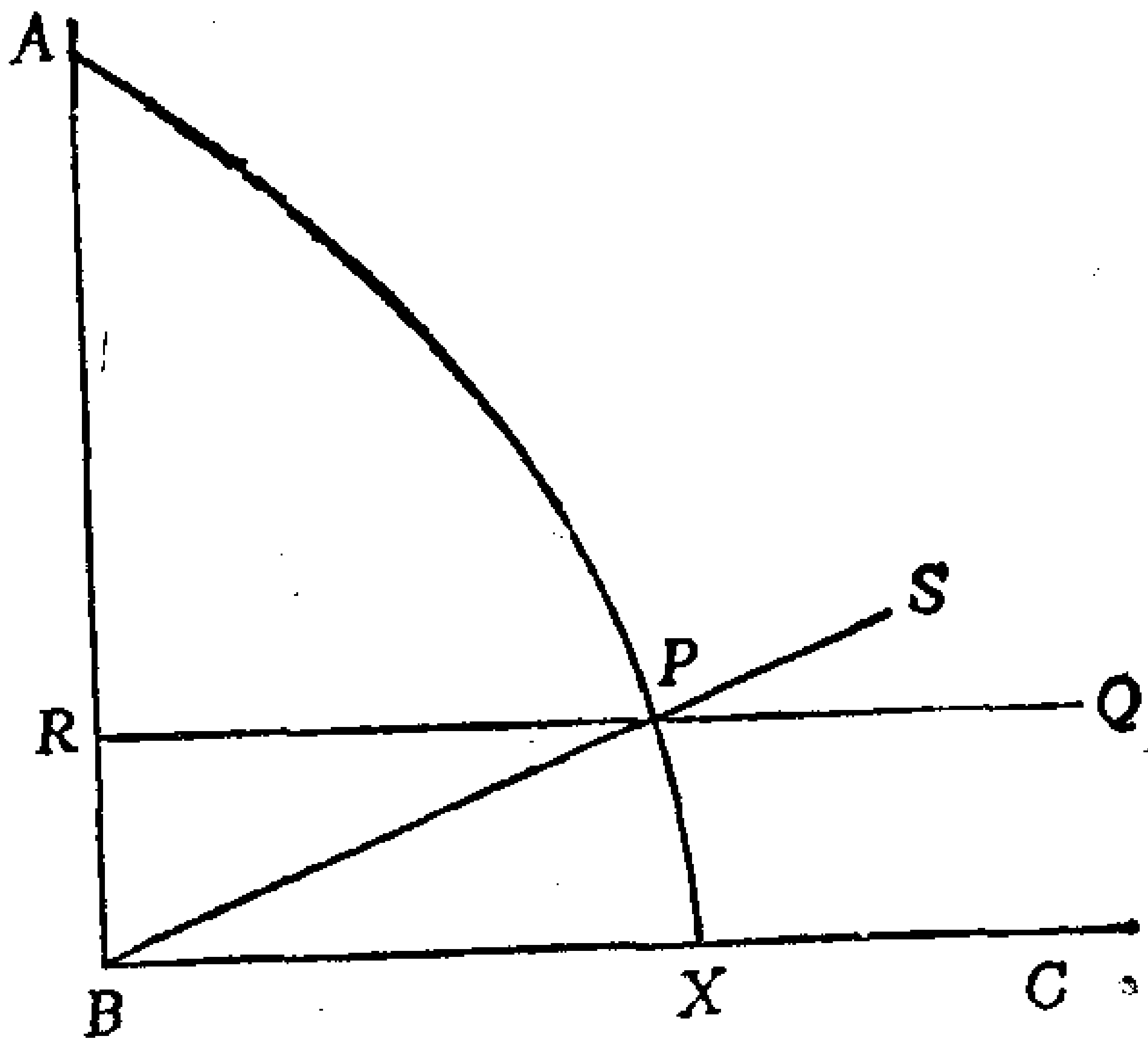


图8.11 希比亚斯的方化曲线

这里我们要从一个完全不同的角度来运用这条曲线；即要考察方化曲线上的一个点和其它点相联系的特殊方式。但是首先要描述这条曲线是怎样作出来的。

在图8.11中方化曲线表示为弧 AX。它是点 P 的轨迹，求法如下：给定直角 ABC 以及长度是 AB 的线段；点 P 是两条直线的交点，它们是通过 B 的“径向”线 BS 和平行于 BC 的水平线 RQ，这两条直线的画法是使得比例式

$$\angle CBS:\angle CBA = BR:BA$$

成立。当然，角要用同一角度单位来度量，长也要用同一长度单位来度量，因此方程的每一边是一个“纯”数（沒有单位）。可以方便地把 BA 选作长度单位，把直角 CBA 选作角度单位，叫做四分之一周角。如果我们这样做，方程就是

$\angle CBS$中四分之一周角的个数

$=BR$中单位长度的个数。

为了作这条曲线，首先平分角ABC和线段 AB。这样确定了方化曲线上一点，我们把它叫做 $P_{1/2}$（读作“P下标二分之一”）。其次把每个得到的线段沿 AB平分，同样平分得

到的角 $ABP_{1/2}$ 和 $P_{1/2}BC$，并且得到两个点 $P_{1/4}$ 和 $P_{3/4}$（见图3.12）。再次平分这四个新的角和四个新的线段，把水平和径向线正确地对应起来确定了四个新点，$P_{1/8}$，$P_{3/8}$，$P_{5/8}$，$P_{7/8}$（从最下面沿逆时针方向排列）。很清楚，只要你愿意，你可以去找越来越多的点。在真正进行作图的时候，到

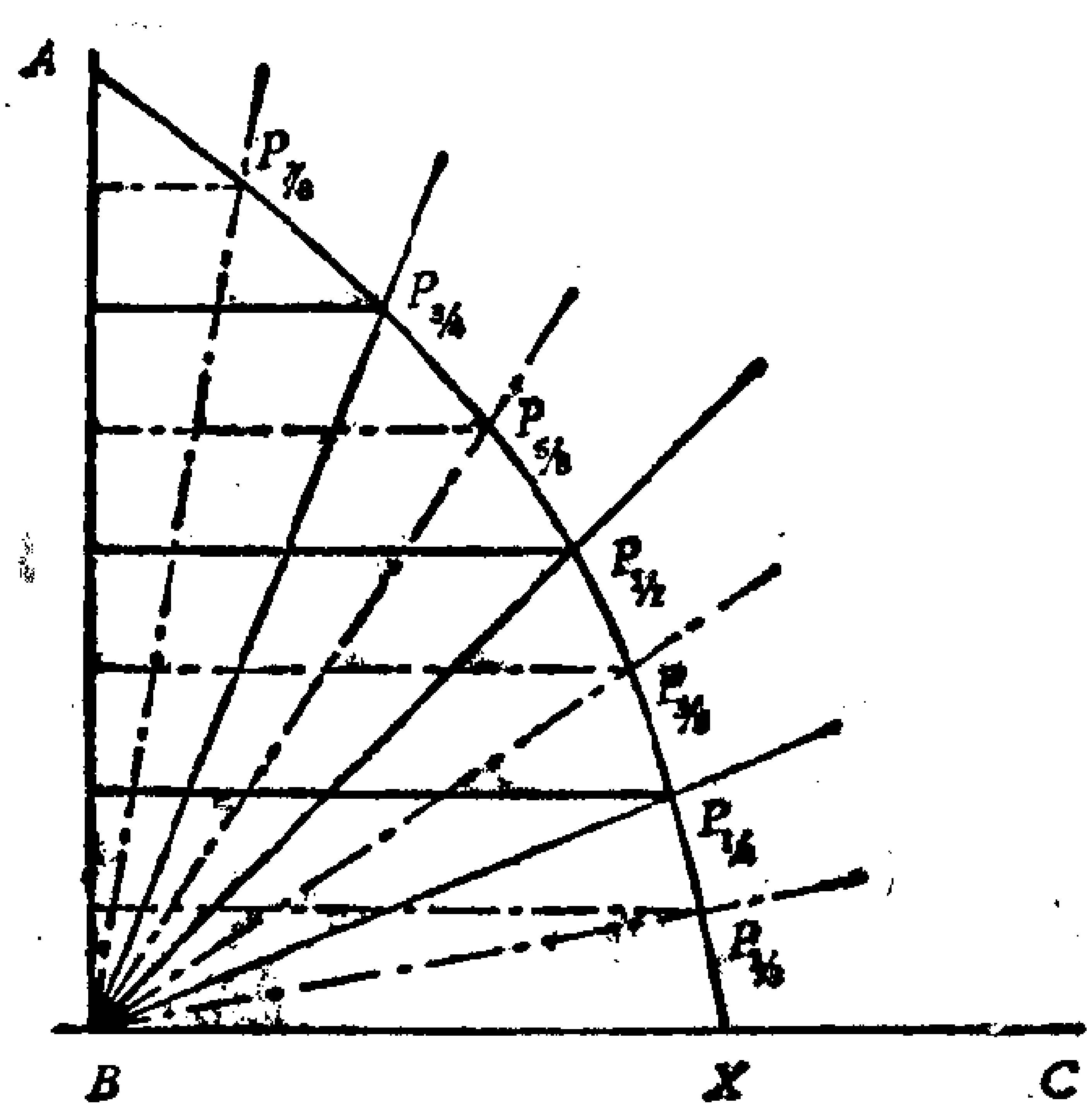


图 3.12

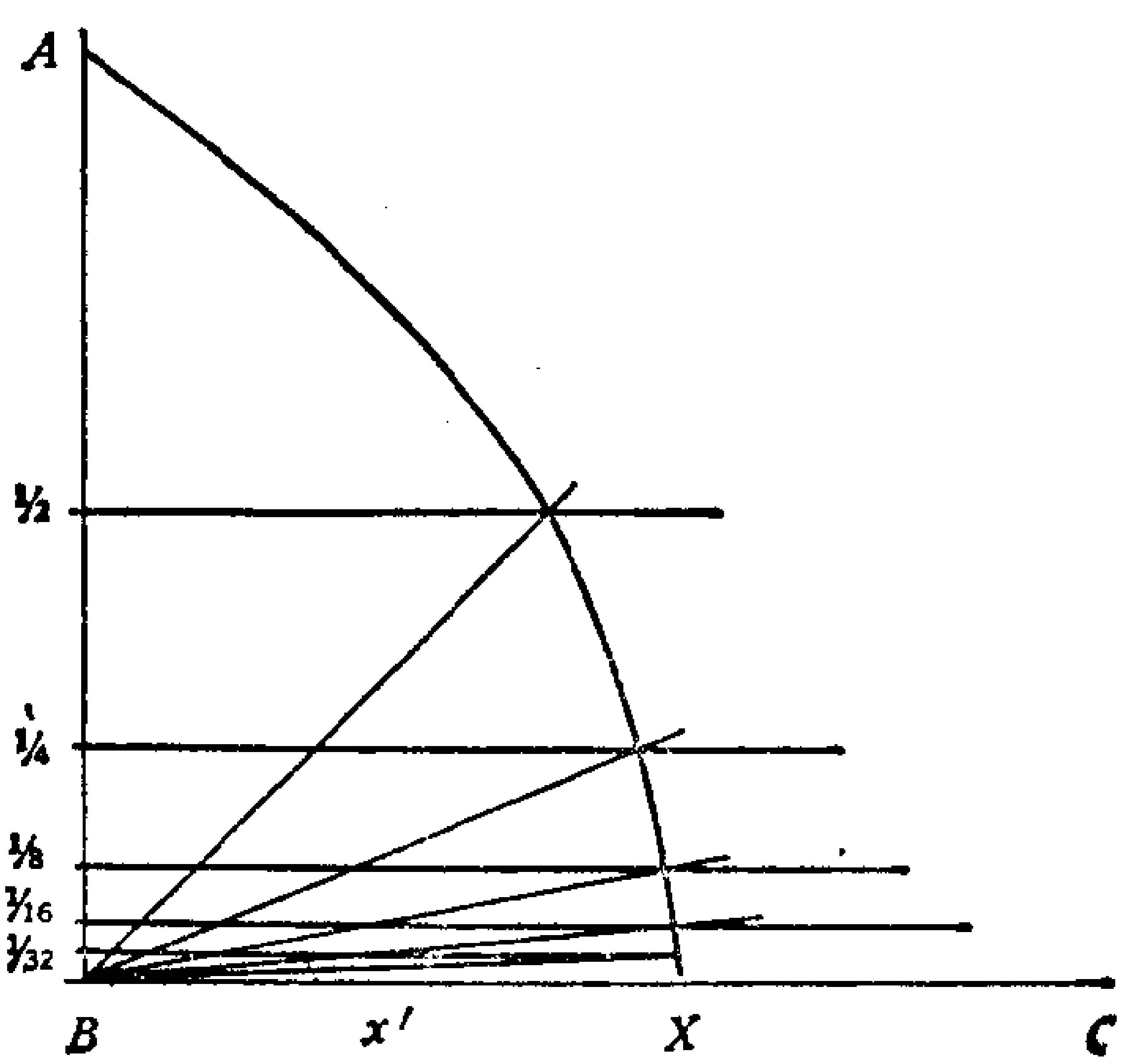


图 3.13

了一定程度，曲线就或多或少具体化了。当我们画了足够多的点以后，就能画出其余部分了。整个曲线就作出来了。

底 CB 上的点 X 和曲线的关系是一个例外。它在零转角的径向线和零高度的水平线上。但是这两条应该得出交点 X 的直线却重合！所以点 X 不能与曲线上其余的点一样地定义。可以看出，一旦整个曲线画出来了，找 CB 上的点 X 的位置是容易的；但是方化曲线的上述定义却不适用于这一个点。

下面我们会看到，当转向分析方程的时候，产生了同样的困难。同时，图3.13表明点 X 怎样能作为曲线上其余点的极限而计算出来。这一点提示了方化曲线上的点 X 必须定义成曲线上其余点的极限。这确实能做到而且 X 能用这个新定义求出来。

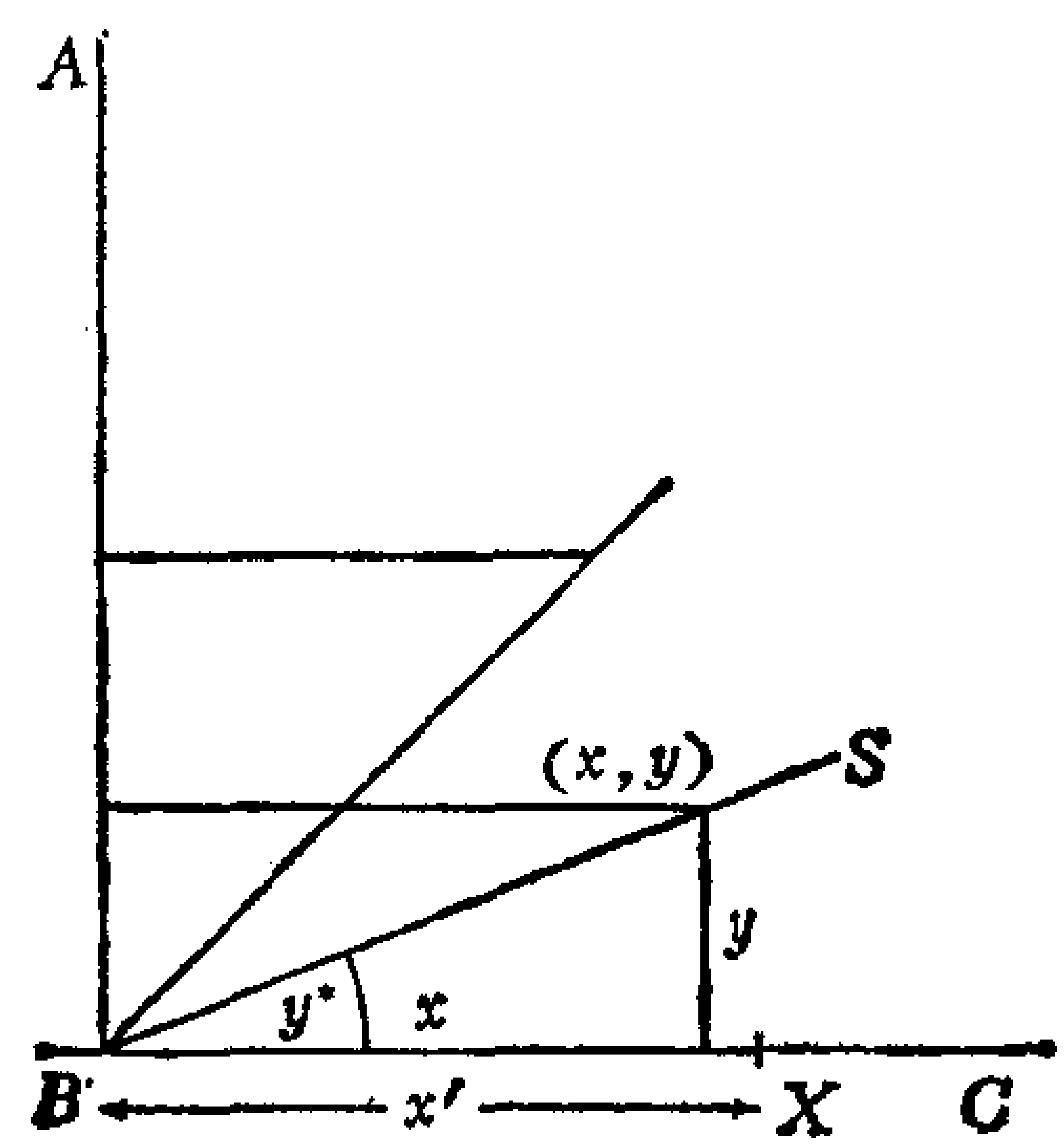


图 3.14

如果我们把方化曲线上点的坐标表示成 (x, y)，把角 CBS 表示成 y^*（上标 * 读成“四分之一周角”），我们可以用 y^* 的正切的定义写

$$\frac{y}{x} = \tan y^* \quad 和 \quad x = \frac{y}{\tan y^*}，$$

参看图3.14。

现在我们感兴趣的点 X 对应于 $y = 0$；设距离 BX 称为 x'。

方程

$$x=\frac{y}{\tan y^*},$$

对 $y=y^*=0$，取不定形式$x'=\frac{0}{0}$；很清楚，它没有提供我们关于x'的任何信息。

我们能尝试用下面的极限来求x'：

$$x'=\frac{y}{\tan y^*}\text{的极限（当 }y\text{ 趋近于零）。}$$

为了计算这个极限，我们选一个 y 的值的序列 y_1，y_2，y_3，…，它趋近于零(在图3.13里我们用 1/2，1/4，1/8，…)，然后研究序列

$$\frac{y_1}{\tan y_1^*},\quad \frac{y_2}{\tan y_2^*},\quad \frac{y_3}{\tan y_3^*},\quad \cdots.$$

结果这个极限是$2/\pi$。

习 题

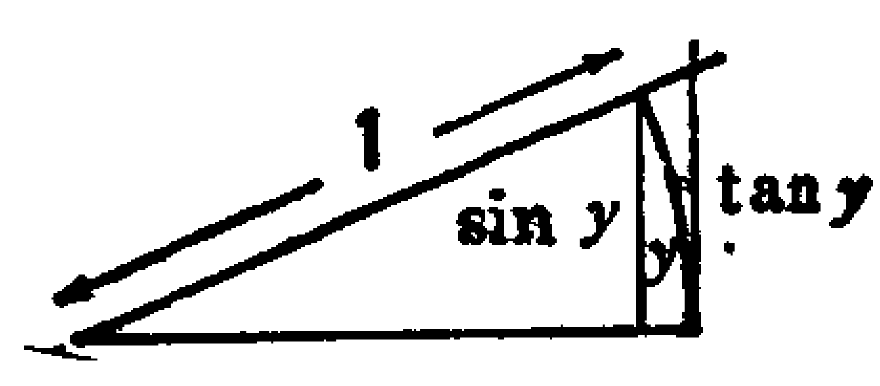


图 3.15

3.11 当 y 表示成弧度，图3.15表示了 $\sin y$, y和$\tan y$实在的相对尺寸。你能发现，对于小的 y 值，$y/\tan y$和 1 的关系吗？

3.5 极限

数的序列$x_1, x_2, x_3, \cdots$有极限 x，只要数的序列(x_1-x), (x_2-x), (x_3-x), …趋近于零①。例如，序列

① “数的序列趋近于零”这个说法不久就要定义。

a) $$3,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \cdots$$

有极限 2，因为序列

$$3-2=1,\quad \frac{5}{2}-2=\frac{1}{2},$$

$$\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3},\quad \frac{9}{4}-2=\frac{1}{4},\ \cdots$$

趋近于零。类似地，序列

b) $$\frac{1}{3},\ 3,\ \frac{5}{7},\ \frac{7}{5},\ \frac{9}{11},\ \frac{11}{9},\ \cdots$$

有极限 1，因为序列

$$\frac{-2}{3},\ 2,\ \frac{-2}{7},\ \frac{2}{5},\ \frac{-2}{11},\ \frac{2}{9},\ \cdots$$

趋近于零。一个更难的，要求洞察序列的特点而且要作一点计算的例子是序列

c) $$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \cdots,$$

它有极限$\sqrt{2}$。更难理解，但是不要作任何类型计算的事实是序列

d) 0.1，0.102，0.102 001，0.102 001 000 2，

0.102 001 000 200 001，…

有一个极限。这个极限用序列本身来定义，不然我们就不知道这个极限！

为了使以上定义完整起见，关于一个序列趋近于零，或

者等价地说，一个序列有极限零，这种说法的含义，需要有一个形式上的提法。这里很明白地看出来无限的用处。

定义 正数序列

$$e_1, e_2, e_3, \cdots$$

有极限零（趋近于零），如果零是小于序列中无限多项的唯一非负的数。

一个一般序列趋近于零，如果当把它所有的项的符号改成正的以后，它趋近于零。

更常用的是下面的提法：

等价的定义 一个数的序列有极限零，只要对每个单位分数$1/n$，也就是

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots,$$

序列中至多有有限项的绝对值大于$1/n$（各项的符号是无关紧要的）。

归根结底，极限理论的用处依赖于三个因素：按照逻辑的次序它们是 i）序列极限的一个精确定义；ii）在每个应用的场合，极限存在性的证明；iii）一个计算极限的方法；这常常由一些逐次近似格式以及一个误差估计组成的。在上面的例子里，a）与b）如此之好地满足iii），以至于i）与ii）是多余的了。在这些情形下，极限的概念差不多是自明的。例c）困难一点；这里人们有定义，知道序列的极限是$\sqrt{2}$，但是对假设的近似序列，还必须作出一些误差估计。沒有这样的估计，就不知道“近似”的意思是什么。例d）中的困难是另一种类型的。在那里逼近的形式表明了误差的特性，但是问题在于存在性：有沒有一个正在被逼近的数？下一节将说明这个问题的意义和用处。

下面是极限理论中的一些重要定理，我们选用它们是因为很快就要用到它们。

定理3.1 如果 $x_1, x_2, x_3, \cdots$有极限 L，那末每一个子序列有同样的极限。

例如，$x_2, x_5, x_9, x_{14}, \cdots$有极限 L。

定理3.2 如果$x_1, x_2, x_3, \cdots$有极限 L，那末 $a+x_1, a+x_2, a+x_3, \cdots$有极限$a+L$。

例如，$-3+x_1, -3+x_2, -3+x_3, \cdots$有极限 $-3+L$。

定理3.3 如果 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 有极限 L， 那末 $kx_1, kx_2, kx_3, \cdots$有极限kL。

例如，$2x_1, 2x_2, 2x_3, \cdots$有极限 $2L$。

定理3.4 如果$x_1, x_2, x_3, \cdots$有极限 L，那末 $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots$有极限$L^2$。

习　题

3.12 证明上述各定理。更一般地，说明对每个整数 n，$x_1^n, x_2^n, x_3^n, \cdots$有极限 L^n。[这是相当难的，建议用以下的步骤。假设 $x_1, x_2, x_3 \cdots$是一个有极限 L 的序列，$y_1, y_2, y_3, \cdots$是一个有极限M的序列。现在证明，乘积的序列$x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \cdots$有极限 LM，就是说乘积的极限是极限的乘积。这还是很困难的；必须用下面类型的技巧：

$$\begin{aligned} LM - xy &= LM - xM + xM - xy \\ &= (L-x)\cdot M + x(M-y). \end{aligned}$$
]

3.6 极限存在的事实怎样可以帮助我们去确定它

数的序列

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \cdots$$

有极限这件事并不明显，读者也许想去算一些项来预测这个极限可能是什么(取一个精确的$y=x^2$曲线作为平方根表，用一把直尺来测量长度)。

现在，只假定这个序列有极限，让我们把这个极限叫做x^*，然后去求它。如果把给定序列的每一项求平方，我们就会得到一个新的序列，根据定理3.4，它的极限一定是x^{*2}。其实我们得到的是序列

$$2,\ 2+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \cdots,$$

它的(第一项之后的)每一项都比原来序列中的某一项多2。很清楚，新序列的极限是x^*+2。因此我们现在知道

$$x^{*2}=x^*+2,$$

并且对此只可能有两个数是真的：2和－1。因此x^*是2或者是－1。因为所有的项都是正的，－1是一个荒谬的答案，由此导出$x^*=2$。

3.7 不存在的极限

让我们作一个愚蠢的假定：数的序列1,2,3,4,…有极限，并把这个“极限”叫做x，尽管我们知道它是没有极限的。如果把序列的每一个元素加一倍，我们将得到一个新的序列，它的极限一定是$2x$。但是这个新的序列是原来的序列的子序列，因此一定有原来的极限（参看定理3.1)。故

$$x=2x.$$

但是唯一满足上述方程的数是零，因此$x=0$。我们好象已经证明了自然数的序列趋近于零!

当然，我们所证明的(根据归谬法)是给定的序列沒有极限。

其次，设 r 是一个数，并且考察序列

$$r,\ r^2,\ r^3,\ \cdots.$$

让我们假定它有一个极限 R。把每项求平方得到一个新序列，因为这个新序列是原来的序列的子序列，由此得

$$R=R^2,$$

因此 $R=0$或 $R=1$。两个情形都是可能的。但是有另一个非常重要的可能性，那就是我们正在犯错误。序列可能沒有极限；事实上，如果 r 的绝对值大于1，极限不存在。同样，如果 $r=-1$，极限也不存在。

习　题

3.13(a) 说明如果 $-1<r<1$，那末 $r, r^2, r^3, \cdots$ 的极限是0，如果 $r=1$，极限是1。

(b) 在2.9节我们说明了怎样证明 $a/(1-r)$ 是无穷几何级数 $a+ar+ar^2+\cdots$的和的公式，它的比值 r 是有理数，绝对值小于1/2。现在你能不能证明，当公比值 r 是无理数，而且绝对值小于1的时候这个公式还成立？提示：用恒等式

$$1-x^n=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}).$$

3.8 实数系统和波尔察诺-维尔斯特拉斯定理

我们很快就要描述实数系统了，在这个系统里，下面的基本定理支配了极限问题。

波尔察诺(Bolzano)-维尔斯特拉斯 (Weierstrass)定理 如果 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是一个增加的数的序列，并且存在一个数 B，它大于序列里的所有的数，那末有一个数 L，使得 L 是序

列的极限。

例如，这个定理让我们确信3.5节的序列d)

0.1，0.102，0.102 001，0.102 001 000 2，…

有一个极限。因为我们可以把B选成任何一个大于0.2或者0.11或者0.103等等的数。这个定理只要求我们找某一个数，它比序列里所有的数大。这个条件把象1，2，3，4，…这样的序列排除在外(它当然是没有极限的)。这个定理没有告诉我们有关数L的任何事情；例如，数x_n可以都是有理数，而L可以是有理数或者是无理数。

数学家们现在有很多等价的方法来建立构造实数系统所必须的公理和定义。在有些方法中，波尔察诺-维尔斯特拉斯原理的证明是困难的，而在有些方法中是容易的。事实上，在建立实数时，有很多细节要处理，以致于如果把一个基本定理弄得容易证明，另外一些就会发现很难证明。因此，把实数系统定义成是包含有理数，而且在其中波尔察诺-维尔斯特拉斯定理成立的最小的数的系统是完全正确的。现在立即变得很清楚，在这个系统里，我们自动地得到了这个定理。注意，在只由有理数组成的系统里，波尔察诺-维尔斯特拉斯定理是不成立的。

从某些其他观点看来有一个更为满意的方案：我们同意把所有有限小数的后面写上无限多个零，然后把实数系统定义成所有无限小数展开式的整体；这就包含了那些真正的无限小数。如果我们这样做，那就必须证明波尔察诺－维尔斯特拉斯定理，并且还必须表明我们确实有了一个数的系统。这就是说，我们必须说明如何去做无限小数的加法、乘法，并且证明所有支配这些运算的标准规则。这要求大量的工作。

波尔察诺－维尔斯特拉斯定理是在1865年，当微积分已

有二百多年历史时，才证明的；人们也许会诧异在这之前数学家们关于极限的存在性究竟干了些什么。

3.9 两个主要的基数无限大

整数集合和所有实数的集合代表了不同大小的无限大基数，分别叫做可数集合的势和连续统的势，规定为$\mathscr{A}_0$和c；它们是重要的无限基数．只有很少的数学家明确地研究过其他任何无限大。然而，在很多以大学研究生水平讲授的近代数学分支中（抽象代数，阿贝尔(Abel)群论，同调代数，和一般拓扑学）有一个趋势，即定理和证明对大的而不规定基数的系统都成立。

在一代人以前，这样的定理的逻辑正确性是激烈争论的题目。在十九世纪七十年代康托的工作以前，人们沒认眞想过会有这样的可能性：一些无限集合代表了比其它一些集合更丰富的无限大。但是，他采用的定义和创造的证明是非常简单的，从理解上几乎不要求什么数学的训练。

定义 两个集合（不论它们是有限或者无限的）称为代表了同样的基数，如果一个集合的元素可以和另一个的元素配对，使得在两个集合的每一个里都沒有元素剩下。

例如，偶数和奇数可以用下面的方式配对：

$$(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\ \cdots,\ (2n-1,2n),\ \cdots$$

由此得出它们一样多。这样的配对称作一一对应。

所有整数的集合可以和奇数集合一一对应，例如，可以用公式

$$N=2n-1,$$

在这里n取所有整数的集合，对应的奇数是N。因此奇数的集合（同样地偶数集合）有整数集合的基数势$\mathscr{A}_0$。

很多集合表面上比整数集合多，其实也有势$\mathscr{A}_0$，例如，所有有理数的集合。很容易看出有理数可以无遗漏也无重复地排成一个简单序列。例如，先把所有有理数a/b中$a+b=2$的(也就是1/1)聚集成一堆，然后把$a+b=3$的(也就是1/2，2/1)聚集起来，如此下去，再把每堆中的数按照分子的大小排列起来，我们有：

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},$$

$$\frac{1}{5},\ \frac{5}{1},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{1},\ \text{等}.$$

这里唯一的麻烦是必须避免(相等)分数的重复，以便可以符合一一对应的要求。例如，我们在第三堆里已经去掉了2/2，因为与它相等的1/1已经在第一堆里出现了。

有理数的集合有基数势$\mathscr{A}_0$的事实是下面定理的一个特殊情况：

定理 设S是集合$S_1,S_2,S_3,\cdots$的集合。如果S是有限的或者有势$\mathscr{A}_0$，并且如果所有的集合$S_1,S_2,S_3,\cdots$有势$\mathscr{A}_0$，那末属于这些集合的全体对象的集合也有势$\mathscr{A}_0$。

这个断言也可以写成方程的形式：

$$1\cdot\mathscr{A}_0=\mathscr{A}_0,\qquad 2\cdot\mathscr{A}_0=\mathscr{A}_0,$$
$$3\cdot\mathscr{A}_0=\mathscr{A}_0,\ \cdots,\qquad \mathscr{A}_0\cdot\mathscr{A}_0=\mathscr{A}_0^2=\mathscr{A}_0.$$

证明是简单的。根据假定，每一个集合S_1，S_2，S_3，…能排成一个序列。让我们用$x(i,j)$表示S_j中的第i个对象。例如，$x(2,3)$表示第三个序列S_3的第二个对象。现在只有有限个项$x(i,j)$使得$i+j$等于某一个数a。因此我们能把$i+j=2$的项排成一个序列，下面紧接着包含所有$i+j=3$的

项的序列，再紧接着包含所有 $i+j=4$ 的项的序列等等。我们就得到了一个序列，它包含任意一个 S_j 中的每一个对象至少一次。去掉重复的以后，你就得到一个序列，它包含每一个我们的对象正好一次。

当一个对象的集合用这样的方式和整数安排了一一对应，它就叫做被数了。一个能够被数的集合叫做可数的。以上叙述的定理断言：有限个或可数无限多个可数无限大是可数的。一个不能用这样的方式和整数安排一一对应的集合叫做不可数的。

我们已经说明了怎样去数有理数，下一个要指出的步骤是去数实数。但是这是不可能的。康托证明了下面有名的定理：

定理 对给定的整数和实数的某个集合的一个一一对应，永远可以有一个实数，使它在这个对应里没有被数到。

推论 所有实数的集合是不可数的。

证明是简单的；首先让我们注意一个简单的实数的子集合 S：S 表示 0 和 1 之间的一部分实数的集合，这部分实数表示成无限小数时，只用到两个数字，例如 1 和 2。

让我们假定已经给定一个整数和 S 的元素之间的一一对应。这就意味着我们能数 S 里的数，也就是说，能作一个表，而且把它们归之于表里的第一个数、第二个数、…等等。我们将作一个数 N，它属于 S 并且我们还要说明 N 不在表里面。这就证明了实数的子集合 S 是不可数的，而因此整个实数集合是不可数的。

为了作 N，考察表里的第一个数来选它的第一位。如果第一个数的第一位是 1，让 N 的第一位是 2，反过来也一样。类似地，选 N 的第二位使得它和表里的第二个数的第二

位不同。用这个方式进行下去，永远使N的第k位和表里的第k个数的第k位不同。很清楚，这样作的数N和表里的第一个数不同(由于第一位)，和第二个数不同(由于第二位)，一般，和第k个数不同(由于第k位)，这对所有的k都对。因此实数N属于S(因为它只包含数字1和2)但是在我们的一一对应里沒有数进去。这就结束了证明。

如果你准备一个实数的序列，并且用这个作法得到了一个不在这个序列里的数，那末这个奇妙的证明会变得更清楚一些。在康托的证明里，用这个办法的论证叫做康托对角线过程，它是对于一个给定的数的无限序列，作一个数，使它和序列里的每一个数都不相同的一个标准方法。

习　题

3.14　我们在上面说明了怎样数有理数。因为它们也是实数，它们可以用作上面证明里的集合S。从而康托的作法导出一个数，它不是有理数。观察这个论证，把上面指出的格式变化一下，算出所得的数N的前面十几位。(把60页表上的每一个有理数变成无限的，可以把零都写出来，也可以把有限小数变成尾部是一串九的数，随你的便。)

3.10　不可数的用处

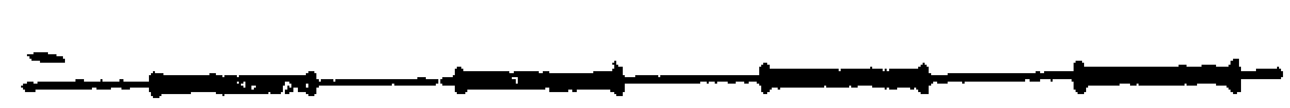


图　3.16

可数和不可数的区分已经变成了分析和拓扑的一块基石。在这里不加证明地例举一些事实，说明在有些方法里，一个给定的集合可数还是不可数是很要紧的。

首先，在一条直线上能够有可数无限多个线段，每个线段有同样的大小，沒有两个是互相接触的；参看图3.16。可以看出怎样在一个长度为L的给定线段上构造可数无限多个线段，它们中沒有两个是接触的(图3.17)。当然，在第二种情形，只有它们中的有限个能够比一个预先给定的单位分数$1/n$大。更精确地说，长度至少是$1/n$的线段一定少于nL个。

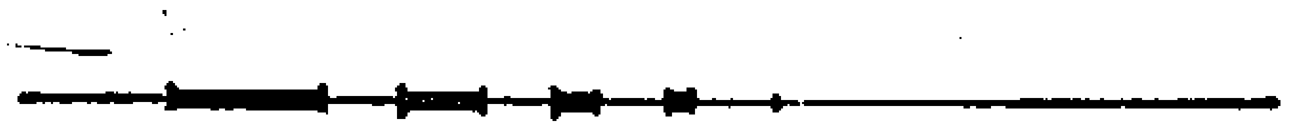


图 3.17

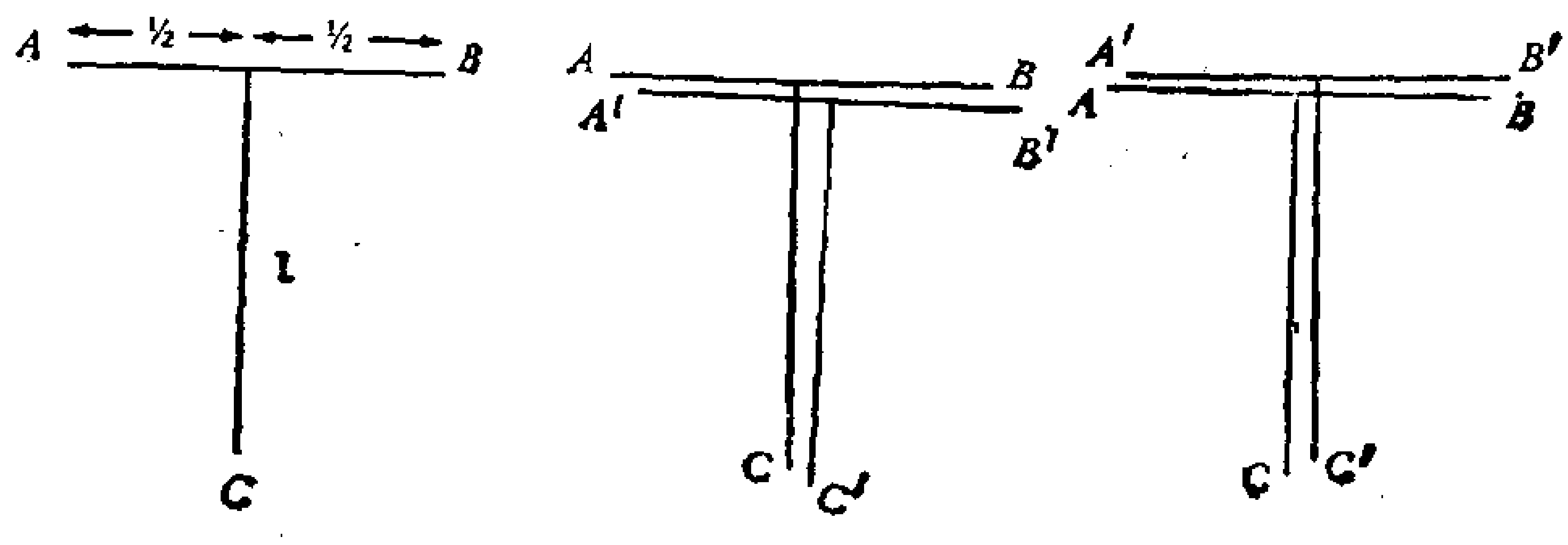
相反，在一条直线上任何不可数无限多个线段中必定有一些是互相重叠的。因为每一个线段包含一些有理点，也就是到一个固定的点O的距离是有理数的点。有些有理点一定属于不止一个线段，因为否则线段的集合就是可数的了，与假设矛盾。同样的论证表明，在一条直线上的任何一个不可数的线段集合中，不可数多个必定重叠，并且有不可数多个必定大于某一个单位分数。这方面更多的讨论放在第六章的最后。

同样现象中有一个有趣的变种，它在某些拓扑的应用中确实很重要，它是：让我们假定字母表中的字母用数学曲线表示，就是说它们是沒有宽度的。还假定这些字母不是美术字，就是说沒有多余的线或腿。那末，在任何一张大小随便的纸上可以七拼八凑地无限多次写每一个字母。对某些字母，象L，或C, I, M, N，可以找到地方装不可数多个，但是令人惊奇的是，不可能写出不可数无限多个T或A, B, P，使得它们中沒有两个重叠。

习 题

3.15 现在你能根据这里指出的原理把字母表的字母分

类，并且得到这个事实的拓扑本质吗？（见图 3.18，3.19 和 3.20。）



(a)　　(b)

图　3.18

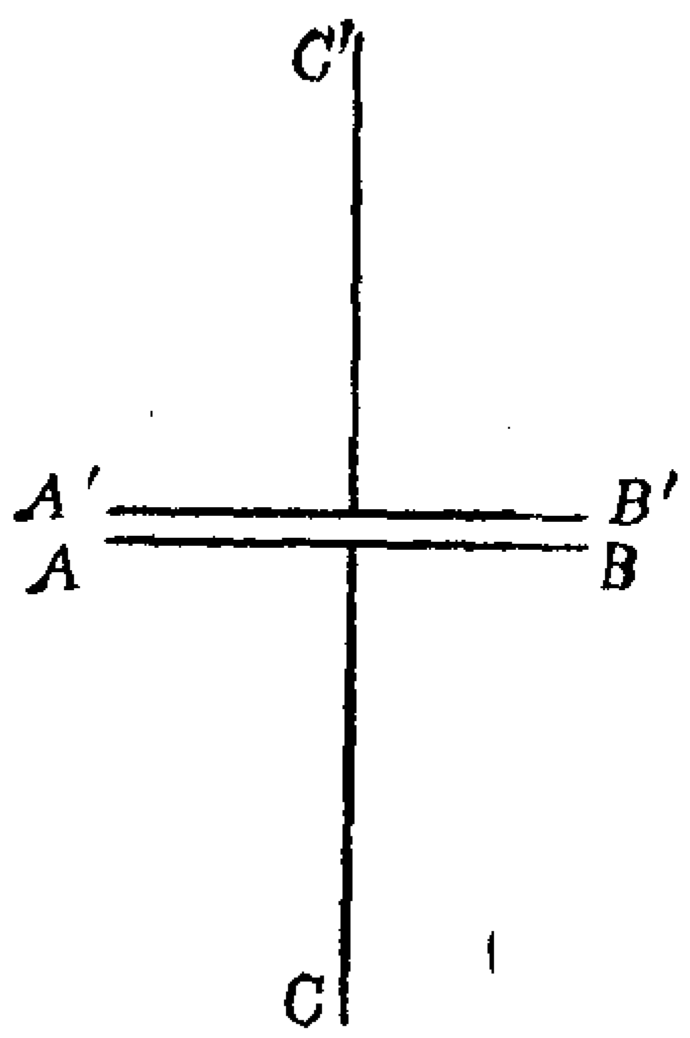
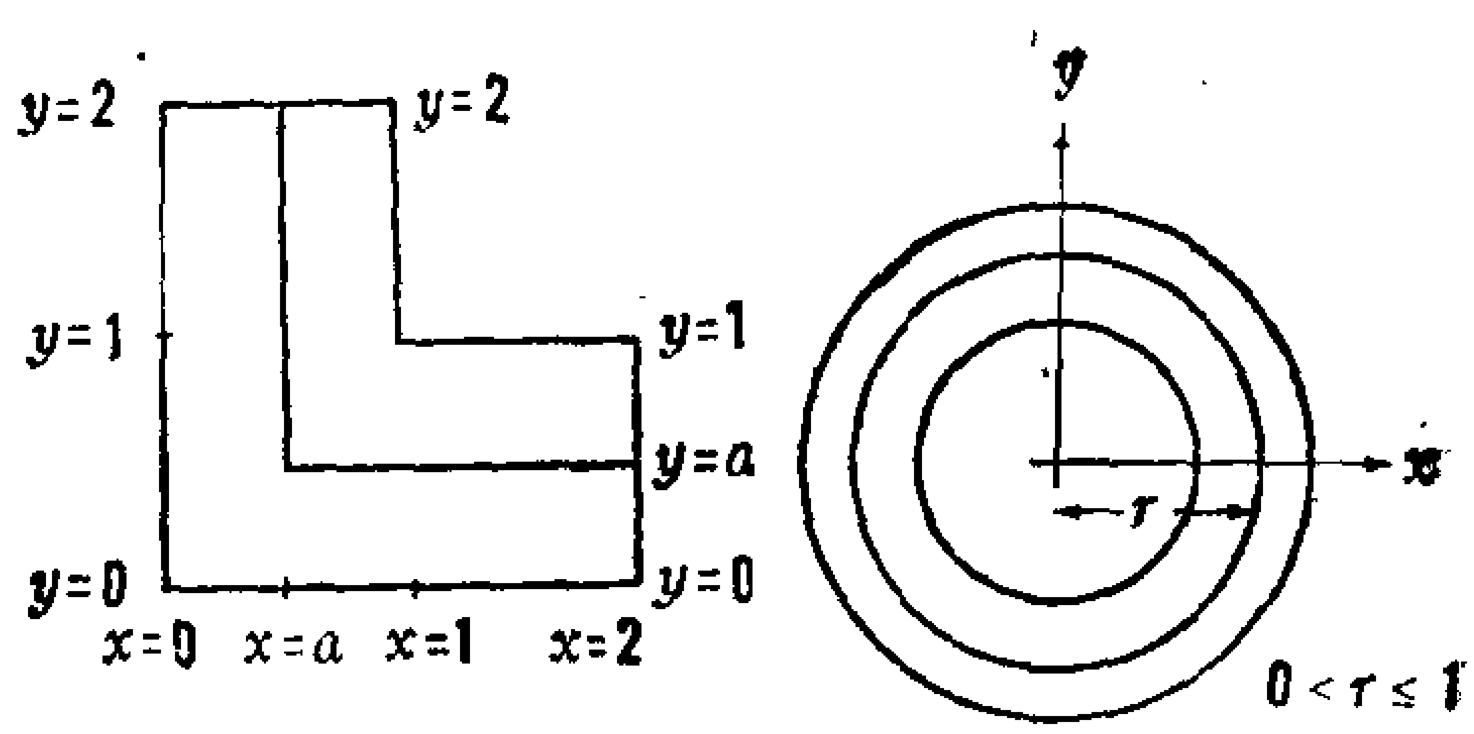


图　3.19



(a) 不可数个 L　　(b) 不可数个 O

图　3.20

第四章　之字形：若有极限就趋近于极限

在这一章我们要讨论序列极限的概念。无论是在直线上，或者是在实数系统里，或者是在平面上，这个概念都是一致的。我们要处理平面的情形，因为它包含更引人入胜的变化，并且能画示意图。我们探索极限概念的主要工具是之字形。它是一个无限序列，由线段组成，形成了一个简单的折线形路径，看上去象通常表示闪电那样；参看图4.1。一幅闪电的图画可以使人意识到有一个靶子，这是极限概念的一个很好的图解。这个类比还有另一个要点，我们回想起，有时候所期望的序列极限并不存在，同样，假设的靶子有时候也不存在。我们会发现，一旦很清楚地标出了一个之字形的靶子，那么它也是之字形的顶点(角点)的序列在平面上的极限点。

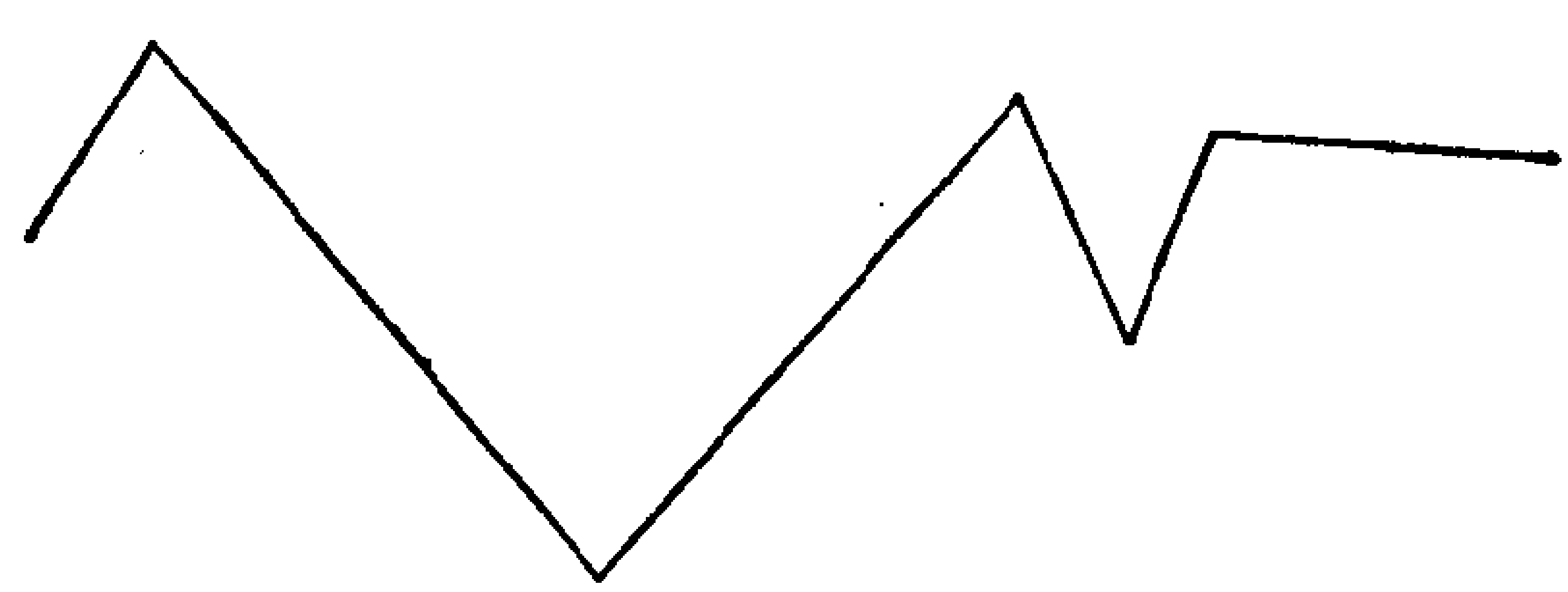


图　4.1

之字形是很有趣的图形，特别是与长度概念联系起来的时候。

很清楚图4.2的之字形沒有靶子；不仅如此，如果无限地继续下去，它是无限长的。图4.3的之字形从 P_1 开始；对

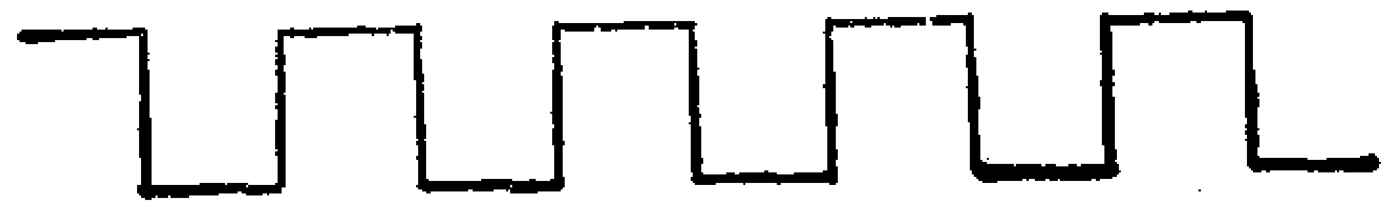


图 4.2

任意有限的 n，左边部分 $P_1P_2\cdots P_n$ 是有限的(中间的三个点只是指出了它的形状在这里并不要紧)。右边的三点的意思是这个之字形有无限多个顶点。之字形是一个无限的作图法；对每个 $n=1,2,3,\cdots$，从第一个顶点到第 n 个顶点有一条路线 $P_1P_2\cdots P_n$，这条路线的长度(让我们把它叫做 L_n)是各构成线段长度的和。因此

$$L_n=P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n.$$

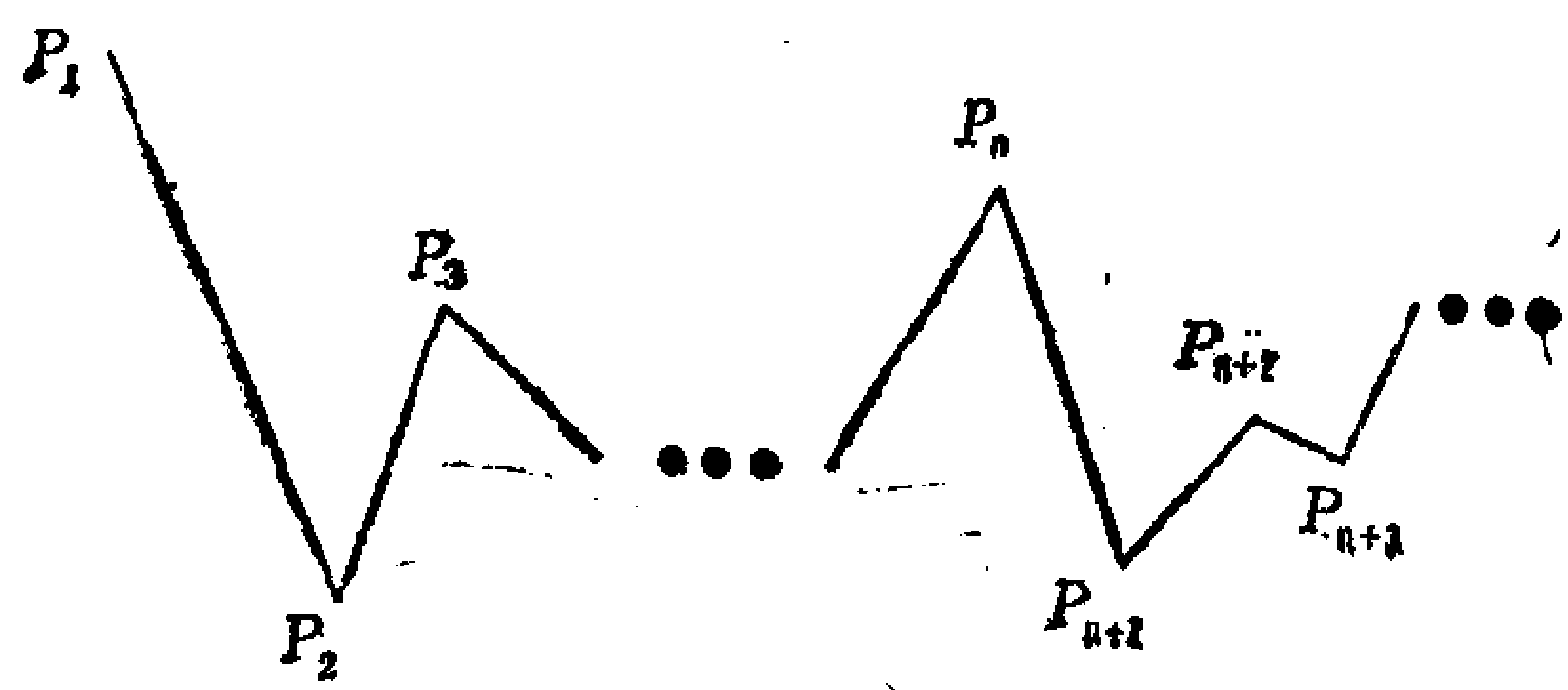


图 4.3

现在我们作下面的定义：

定义 之字形 $P_1P_2P_3\cdots$ 的长度 L 是当 n 无限增加时长度 L_n 的极限，如果这个极限存在的话。用符号表示

$$L=\text{长度}(P_1P_2P_3\cdots)=\lim_{n\to\infty}(\text{长度 } P_1P_2\cdots P_n);$$

或者，更简短一些，

$$L=\lim_{n\to\infty}L_n.$$

习　题

4.1　最后的符号表示式中省略了什么必要的限制性短

语？因此，这个表示式必须怎样读？

一般，正象在这个极限定义中所看到的，为了计算它，必须求一个无穷级数的和。我们对此已经有了一点实践了。

下面的前几个例子主要与长度有关。点T是坐标原点，又是之字形的无可争辩的靶子，它暂时并不居于重要地位。

例1 第一个之字形包含线段$A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots$。点$A_n$ ($n=1,2,3,\cdots$)交替地位于x轴的上方和下方；A_n的横坐标是$1/2^n$，纵坐标除了正负号外，和它相同。参看图4.4。

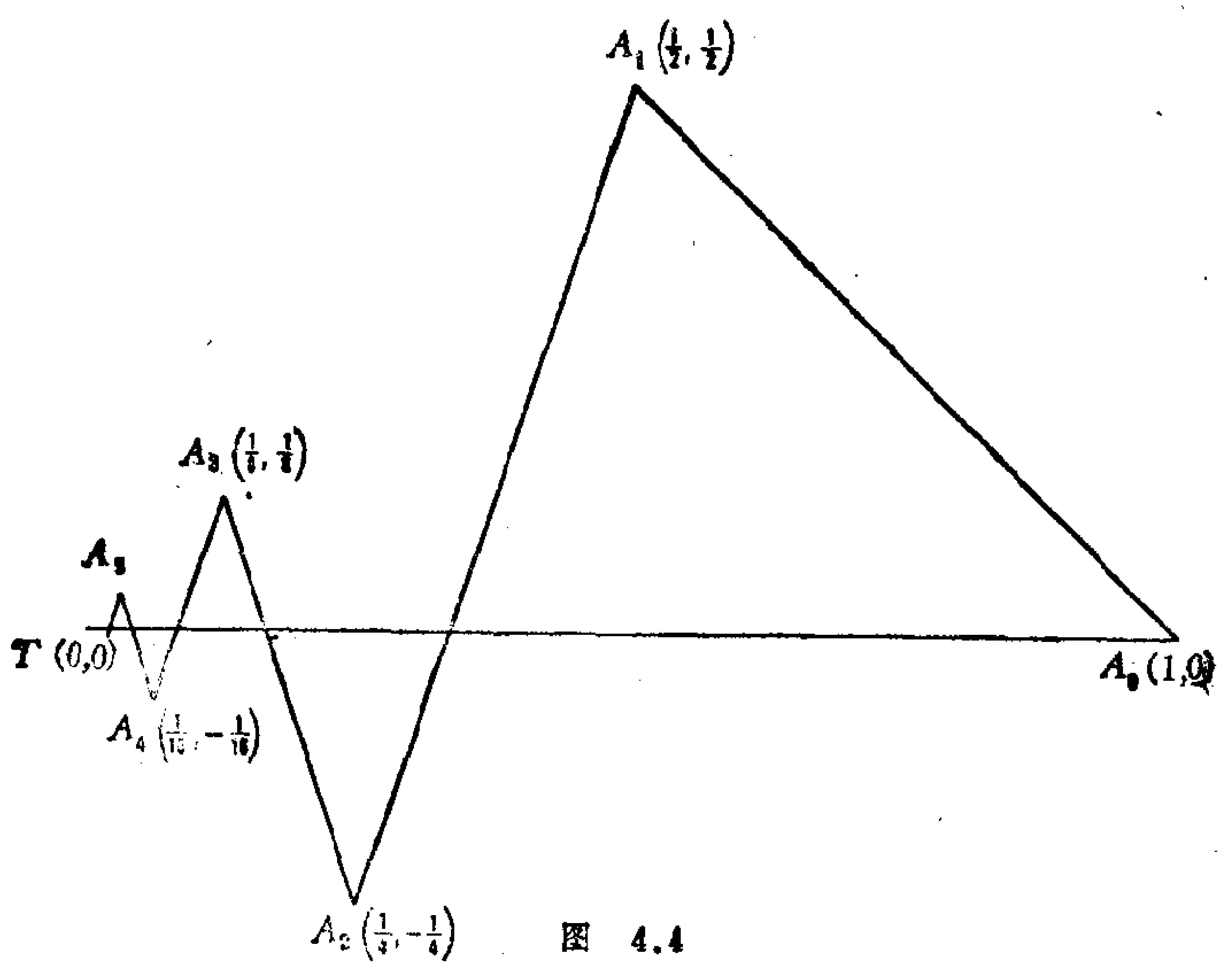


图 4.4

$$A_n \text{ 是点} \quad \left(\frac{1}{2^n}, \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right), \quad n=1,2,3,\cdots.$$

之字形$A_0A_1A_2\cdots$象一条半直线或者射线，它也象一条只有

一个端点(对应于 A_0)的线段，另一个端点抹掉了。这样的线段在数学工作里经常出现，叫作半开的；两个端点都去掉了的线段叫做开的，而两个端点都放回来的线段叫做闭的。注意，就这个作图而言，之字形不包含点 T（尽管明显地指向它）。

可能使读者感到惊奇的是这个无限的之字形有有限的长度。容易看出，沿着这个之字形的任一路线 $A_0A_1\cdots A_n$ 的长度小于下面的和，它本身小于 3：

$$1+2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

这个和是把之字形的每一个线段用它的水平投影加上垂直投影来代替而得到的。用毕达哥拉斯定理我们能容易地说明

$$A_0A_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad A_1A_2=\frac{1}{4}\sqrt{10},$$

$$A_2A_3=\frac{1}{8}\sqrt{10},\qquad A_3A_4=\frac{1}{16}\sqrt{10},\ \cdots,$$

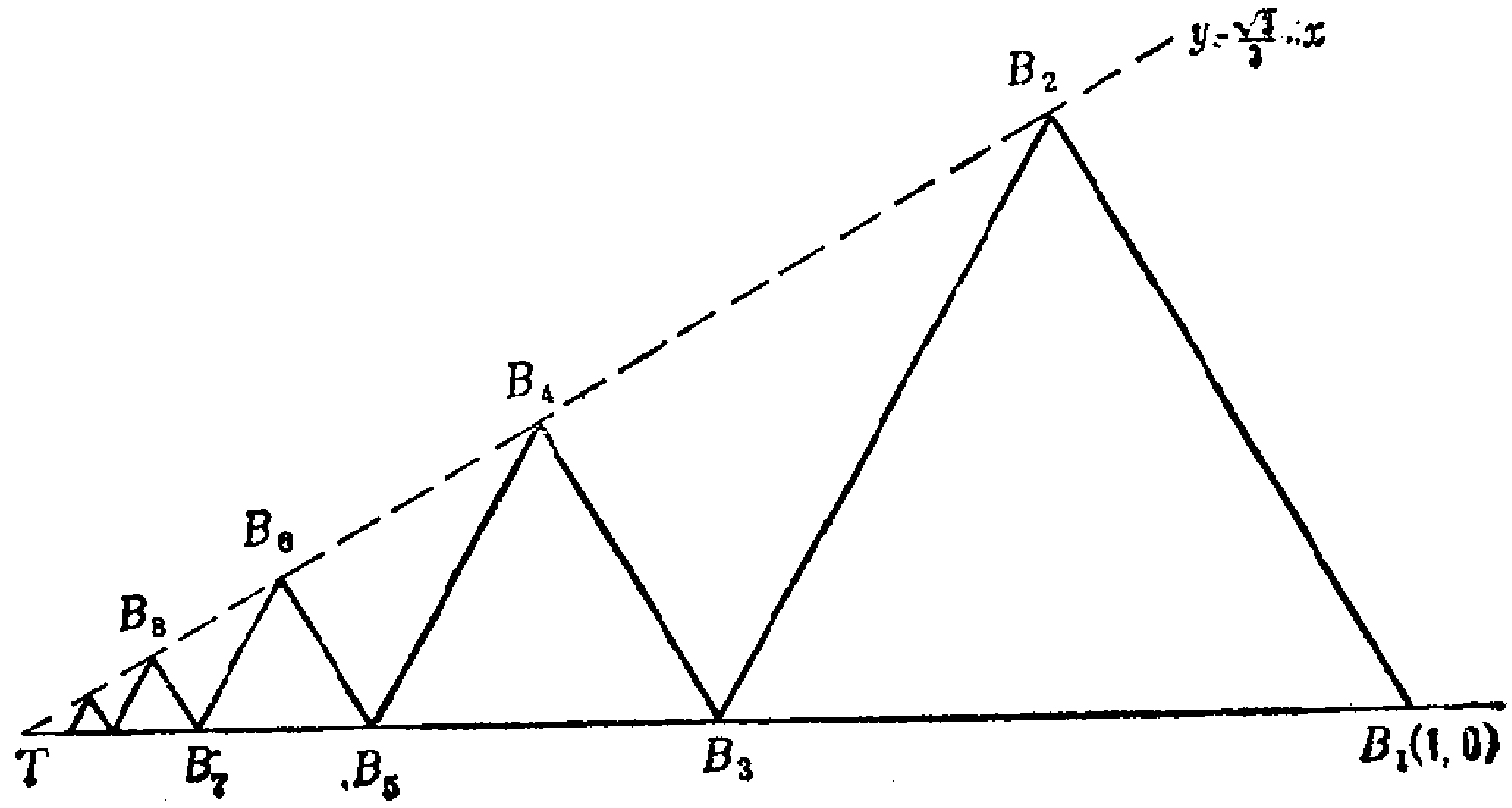


图 4.5

并且证明之字形的长度 L 是 $(\sqrt{2}/2)+(\sqrt{10}/2)$。因此 $L\sim 2.3$，误差与0.2相当，也就是说，误差不超过百分之十。

例2 图4.5中的长度更容易计算。TB_1 是单位长度，这里有一个等边三角形的无限序列，它们的底边长度不断减少：$1/2, 1/4, 1/8, \cdots$。

因为底边加起来 $TB_1=1$，所以容易看出，之字形的长度是 2。

习 题

4.2 注意奇数顶点在 x 轴上（在直角坐标里 $y=0$），偶数顶点在直线 TB_2 上，它的方程是

$$y=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot x.$$

作一个类似的之字形（等边三角形的线段），它的偶数顶点在曲线 $y=x^2$ 上。这个之字形的长度与上一个之字形的长度比较（从图上判断）是怎样？

例3 图4.6的之字形沒有有限的长度，根据下面的定义我们将说它有无限长度：

定义 如果长度 L_n 当 n 增加时无限地增加，那么我们说 L 是无限大。

因为我们在作正数的加法，数 L_n 一定越来越大；如果它们有一个上界（任何一个比它们中的每一个都大的数），那末，由波尔察诺-维尔斯特拉斯原理，它们会有一个极限（小于或者等于这个界）。因此，如果沒有极限 $\lim L_n$，就沒有界，这就是当我们称长度 L 是无限大时要说的全部意思。用完全一样的方式，我们说欧几里得直线的长度是无限大。这

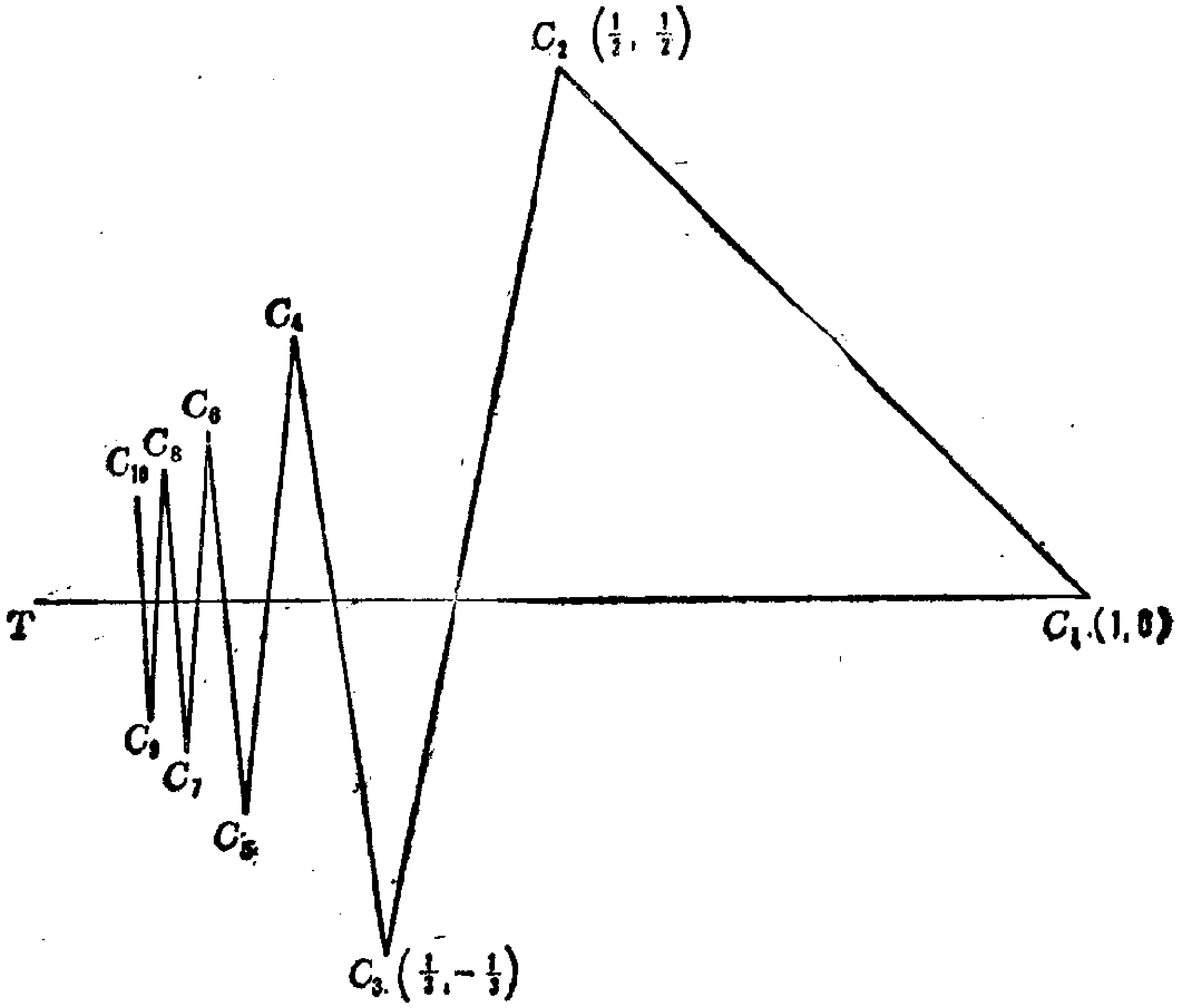


图 4.6

是一个新词，一个方便的说法；这个无限大不是一个实数系统里的数。有时候数学家们讨论实数系统时，投进去一个新的对象∞，来对应这个无限大，然后他们就必须为了这个数的运算作出一些特殊的规定。例如：$\infty+\infty=\infty$，但是$\infty-\infty$是不确定的。

表面上，图4.6的之字形很象上一个，但是顶点的坐标是不一样的。

$$C_n\text{是点}\left(\frac{1}{n},\ \frac{(-1)^n}{n}\right),\qquad n=2,3,4,\cdots。$$

很清楚，C_1C_2的长度超过1/2，$C_1C_2C_3$的长度超过1，C_1C_2

C_3C_4的长度超过1.5。这使人以为 $C_1C_2\cdots C_n$ 的长度在每一步都有显著的变化；但这是不对的。在以后的步子里增加都是很小的。然而，这些长度还是一点一点地加起来，并且 L_n 无限地增加。让我们更仔细地观察它。

如果我们考虑 4 个线段 $C_4C_5, C_5C_6, C_6C_7, C_7C_8$，我们发现每个端点的纵坐标的绝对值至少有1/8，因此每一个线段的长度至少有$2\cdot 1/8=1/4$。因而这 4 个线段的组合长度至少有 1 。用完全同样的方法，可以看出下面 8 个线段的组合长度至少是 8 倍1/8，或 1 ，再下面的16个线段总长度至少是 1 ，然后再下面的32个等等。

用这个方法我们可以作一个路径的序列

$$C_1C_2\cdots C_8,\quad C_1C_2\cdots C_{16},\quad C_1C_2\cdots C_{32},\ \cdots$$

它的长度象数 3 , 4 , 5 …一样地增加，因为能无限地这样继续下去，所以我们发现长度 L_n 无限增加。这个之字形有无限大长度。

这个结果在数学里具有很大的重要性，读者要把它反复想透，方法是，验证只要当N是2^n的形式，那末长度

$$C_NC_{N+1}+C_{N+1}C_{N+2}+\cdots+C_{2N-1}C_{2N}$$

就超过 1 。分析这个问题的一个方便的途径是研究下面的例子：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots.$$

它称为调和级数。这是一个发散级数，也就是说，当 n 增加时，部分和

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

无限地增加。

一连串的项，带着指定的加法(或者减法)，称为级数。根据定义，级数的前 n 项的和($n=1,2,3,\cdots$) 称为第 n 次部分和。写成 S_n。级数的和 S 是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，如果这个极限存在的话。如果所有项都是正的而且没有极限存在，那末(有时候)说这个和是无限大。一般，当极限 S 不存在时，级数称为是发散的；当极限存在时，级数称为是收敛的。如果给定的级数极限存在，但是对那个每项的绝对值都与它相等且取正号的级数，极限不存在，那末这个给定的级数称为条件收敛的。例如，级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

是条件收敛的；也就是说，根据现状它是收敛的，但是当把所有项变成正的以后，它不再收敛。

我们现在用之字形来考察极限的概念。

定义 点 P 称为点的序列 $P_1,P_2,P_3,\cdots$ 的极限(序列的极限点的缩写)，倘若距离的序列 $P_1P,P_2P,P_3P,\cdots$ 趋近于零。(参看第3.5节“一个正数序列趋近于零”的定义。)

正象图中所表示的那样，在我们的例子里 T 是之字形顶点的极限。从 T 到这些顶点的距离① 是很容易计算的。在第一个例子里，

$$TA_n=\sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\left(\frac{1}{2^n}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

在第二个例子里，让读者来计算 TB_n(有两个情况要考虑)。

① 在这里我们指的是线段 TA_n 的长度，而不是沿着之字形的距离。

习　题

4.3　用下面迂迴的方法看例 2：首先说明序列 $B_1, B_3, B_5, \cdots$ 有极限 T。再利用距离 $B_{2n}B_{2n-1}$ 趋近于零的事实。

从三角不等式① 容易推出一个序列不能有多于一个的极限。因为如果 P_nT 和 P_nT' 都趋近于零，那末公式

$$P_nT+P_nT'\geqslant TT', \qquad n=1,2,3,\cdots$$

表明距离 TT' 必定等于零。但是在欧几里得几何里只有当 T 和 T' 是同一个点时这才有可能。因此，只要知道序列有极限，我们就有权使用“序列的这个极限”这样的字眼。

下面一幅图是针对极限点概念的。

例4　图4.7里的之字形 $OD_1D_2D_3\cdots$ 是用和水平线成45°角的线段构成的，所以在每一个顶点上作成直角。对 $m=1,2,3,\cdots$，长度 D_mD_{m+1} 是 $1/2^m$。

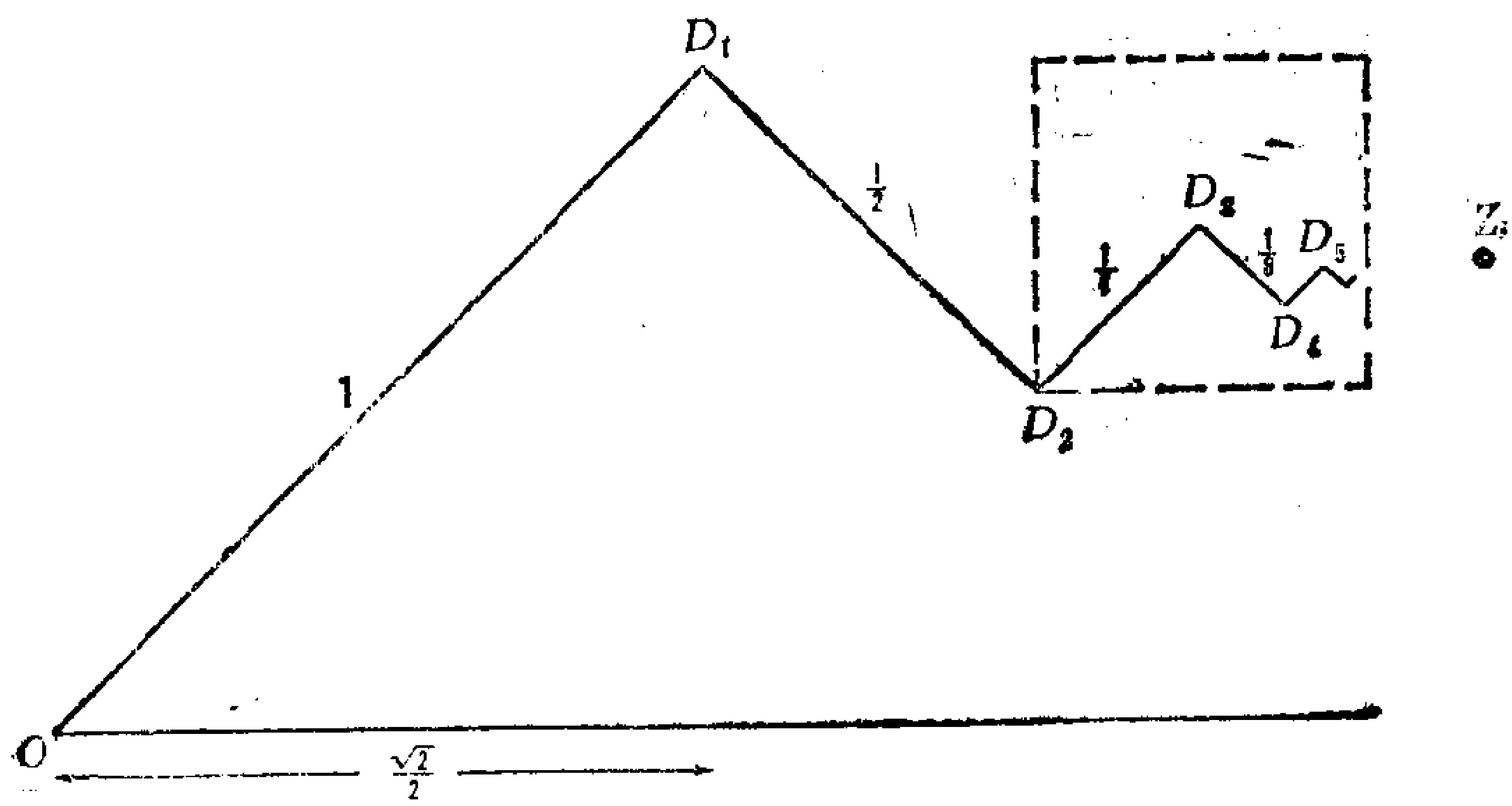


图　4.7

① 三角不等式是说，在一个三角形里两条边的长度的和大于第三边的长度。

从 D_2 出发的无限之字形，即 $D_2D_3D_4D_5\cdots$，整个落在一个对角线的长是1/2的正方形内（边长是$\sqrt{2}/4$），它有一个端点D_2，我们已经作出的各点里面没有一个别的点是它的端点。然而，平面上有一个点和之字形有非常密切的关系。让我们叫它Z。图4.7 表明Z不会在什么地方；如果读者同意它不在那里，他一定知道怎样去找它在哪里。

习　题

4.4 假设点O是一个坐标系的原点，这个坐标系的x轴照例是水平的。作一个点，它的横坐标是$\sqrt{2}$，它的纵坐标是

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

把这个点称作Z，讨论Z和顶点$D_1, D_2, D_3, \cdots$的关系；解释下面提法的意思：“Z的横坐标是无限相继顶点的横坐标序

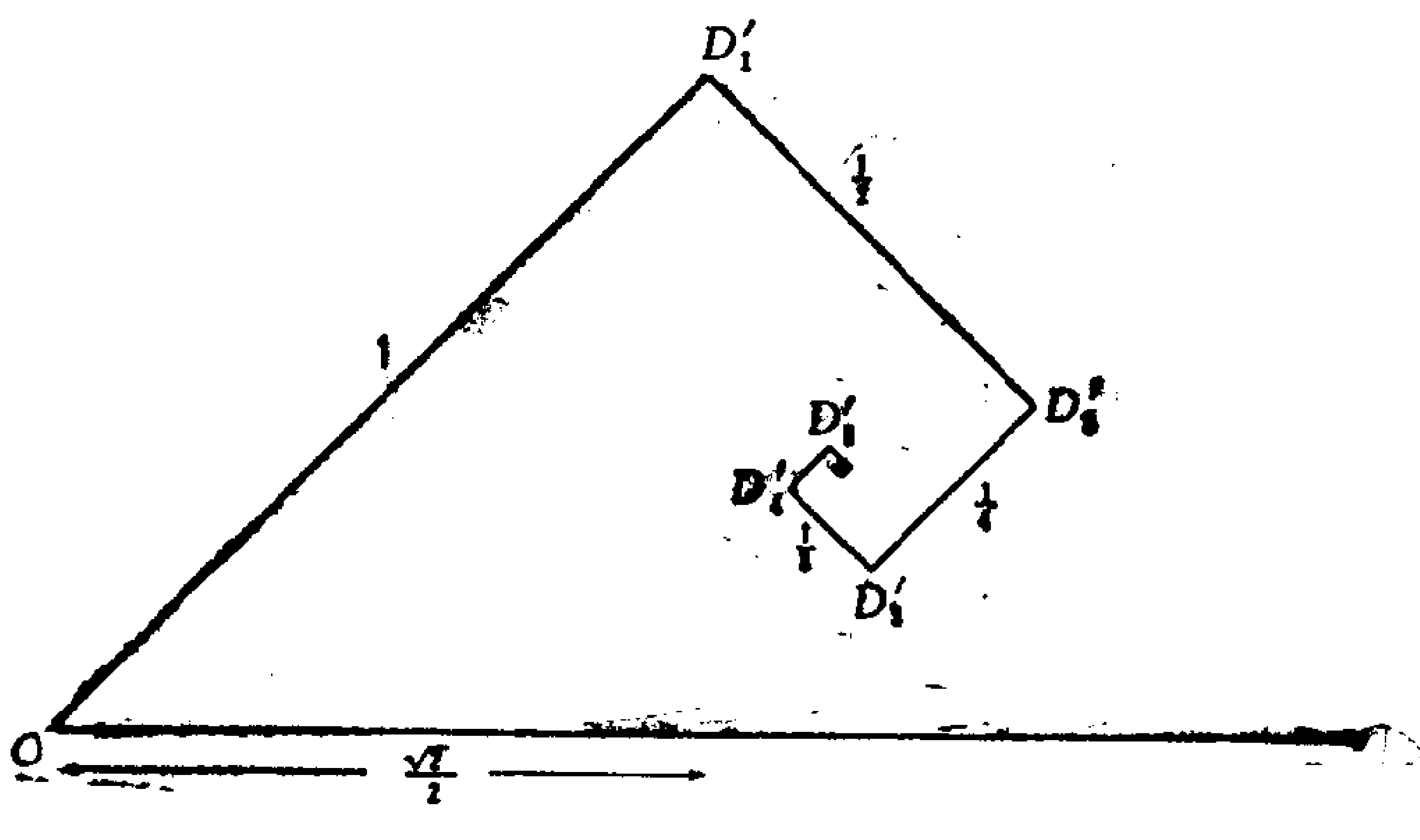


图 4.8

列的极限”。证明Z的纵坐标是顶点的纵坐标序列的极限

（回忆无穷几何级数的和的公式）。

例4′ 图4.8的之字形$OD'_1D'_2D'_3\cdots$和上面的之字形是有趣的一对。图上表明同样的线段的序列排成了一条螺线。

习 题

4.5 读者可能会喜欢去证明例4′的顶点$D'_1, D'_2, \cdots$的集合有一个极限点T，方法是求出它的坐标。

例5 让我们接着看一个无限之字形$OE_1E_2E_3E_4\cdots$，它的相继的线段具有长度

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots.$$

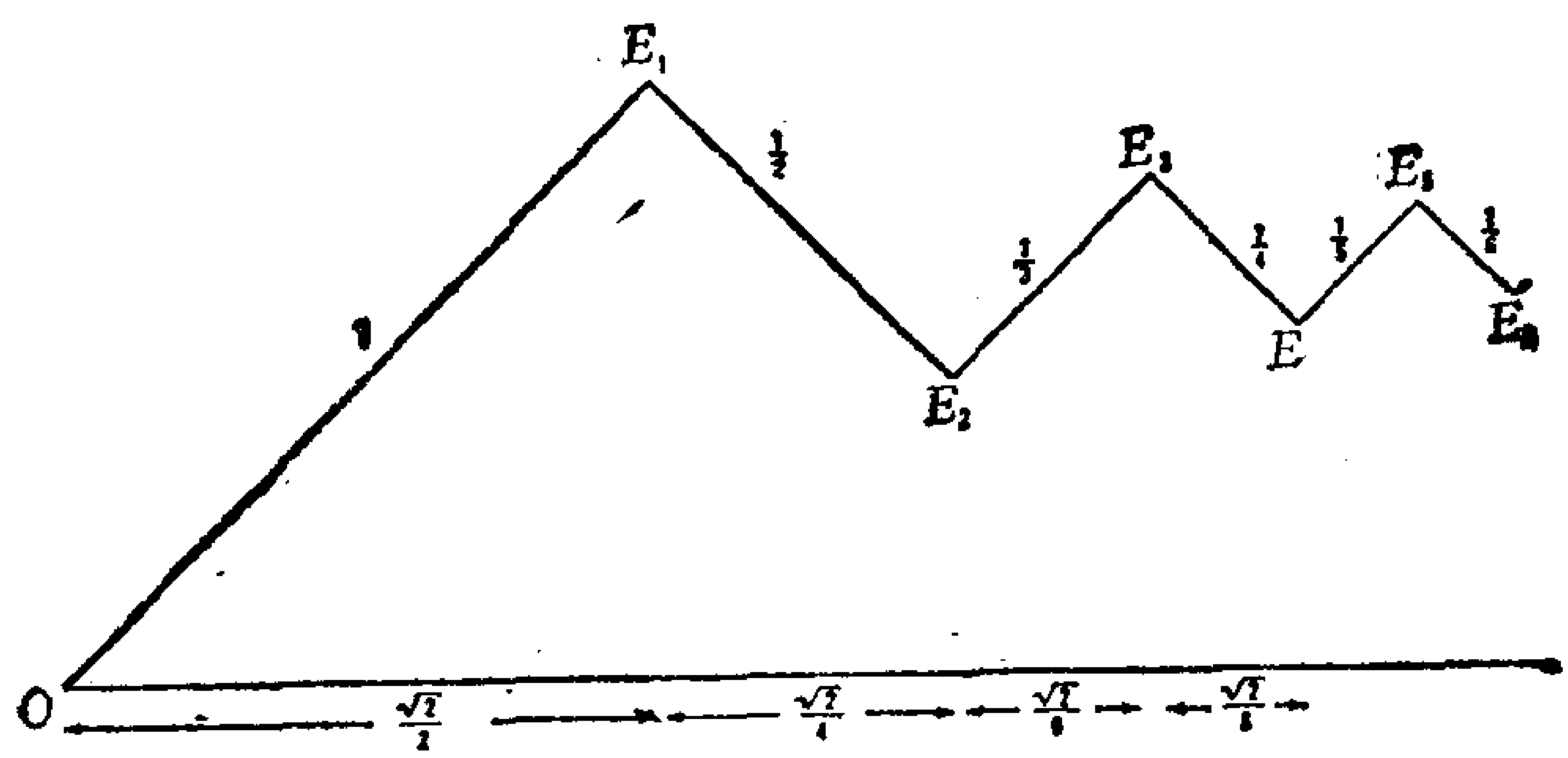


图 4.9

图4.9中的图形使得一切都一目了然。至少从肉眼看来，这个例子和例4的之字形$OD_1D_2D_3\cdots$是类似的。然而，我们已经懂得单位分数序列的求和了：它们沒有一个有限的和。这将有引人注目的后果。

也许有人会猜想这张画有一个与之对应的点Y，就好象在例4里点Z和它的之字形对应一样。但是这个猜想是错误的。这个之字形缓慢而无可挽回地向右运动；平面上没有一个点是点序列$E_1, E_2, E_3, E_4, \cdots$的极限点。这是由下面的事实证明的：路线$E_1E_2E_3\cdots E_n$的水平投影的长度是

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

当n增加时这个和无限地增加。因此，不管你选哪一个点Y，某一个E_n(对充分大的n)总是在选定的Y的右边；这个之字形的所有后面的点就在右边更远的地方，不会接近Y。这个细节现在应该是很清楚的了。

习　　题

4.6　在这个例子里，尽管当n增加时，点E_n的横坐标无限地增加，纵坐标并不这样增加。证明E_n的纵坐标是

$$S_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right],$$

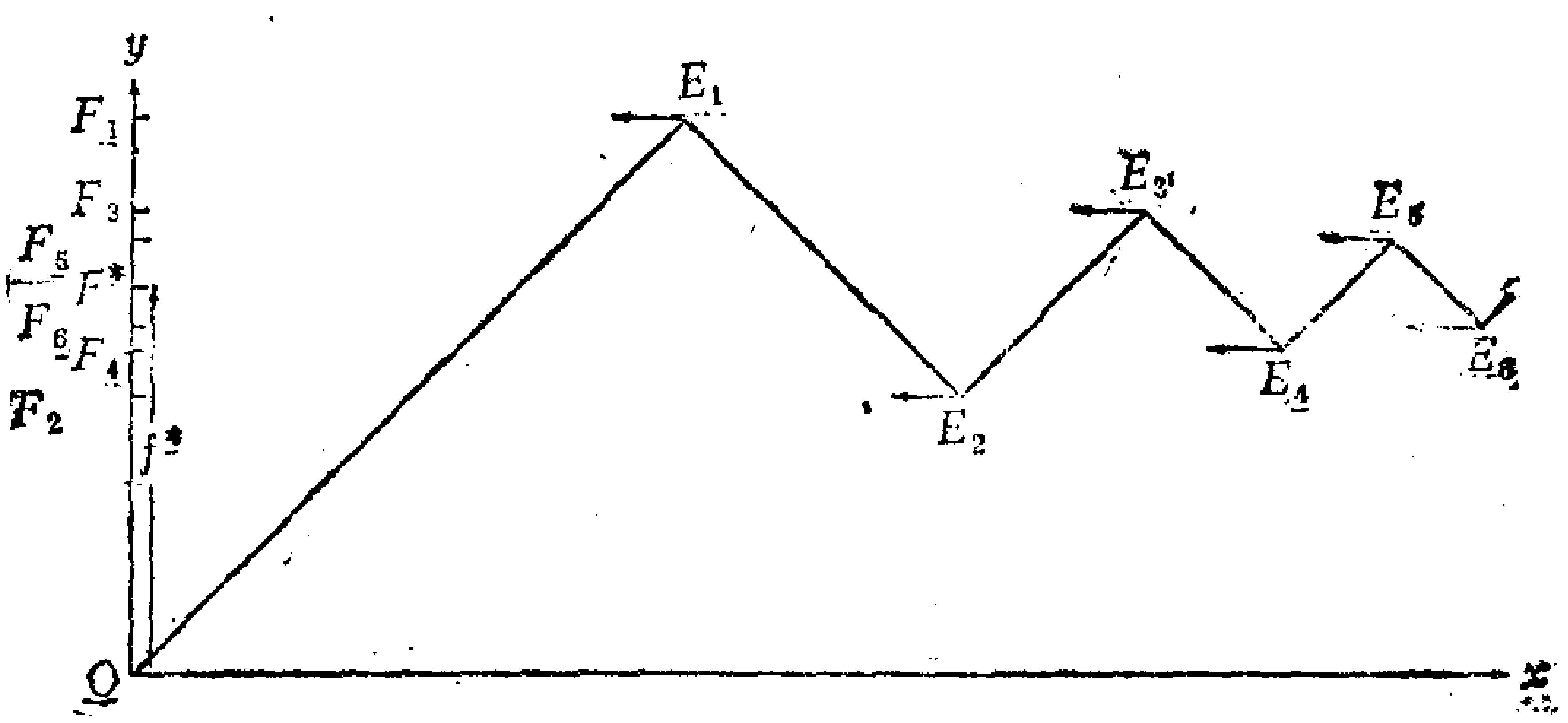


图 4.10

并且通过把这个问题和图4.10的图形联系起来，弄明白纵坐标的序列有一个极限。

4.7 (a) 解释为什么下面的断言可能是错的，并且提出一个正确的提法："(平面上一个点的无限序列)在一条直线上的投影的极限也是极限的投影。"

(b) 你能证明下面的断言吗？"(一个点的序列的)极限在一条直线上的投影是投影的极限。"

在图4.11里，画了上一个之字形的两个同伴，第一个显得是收歛的，第二个发散。

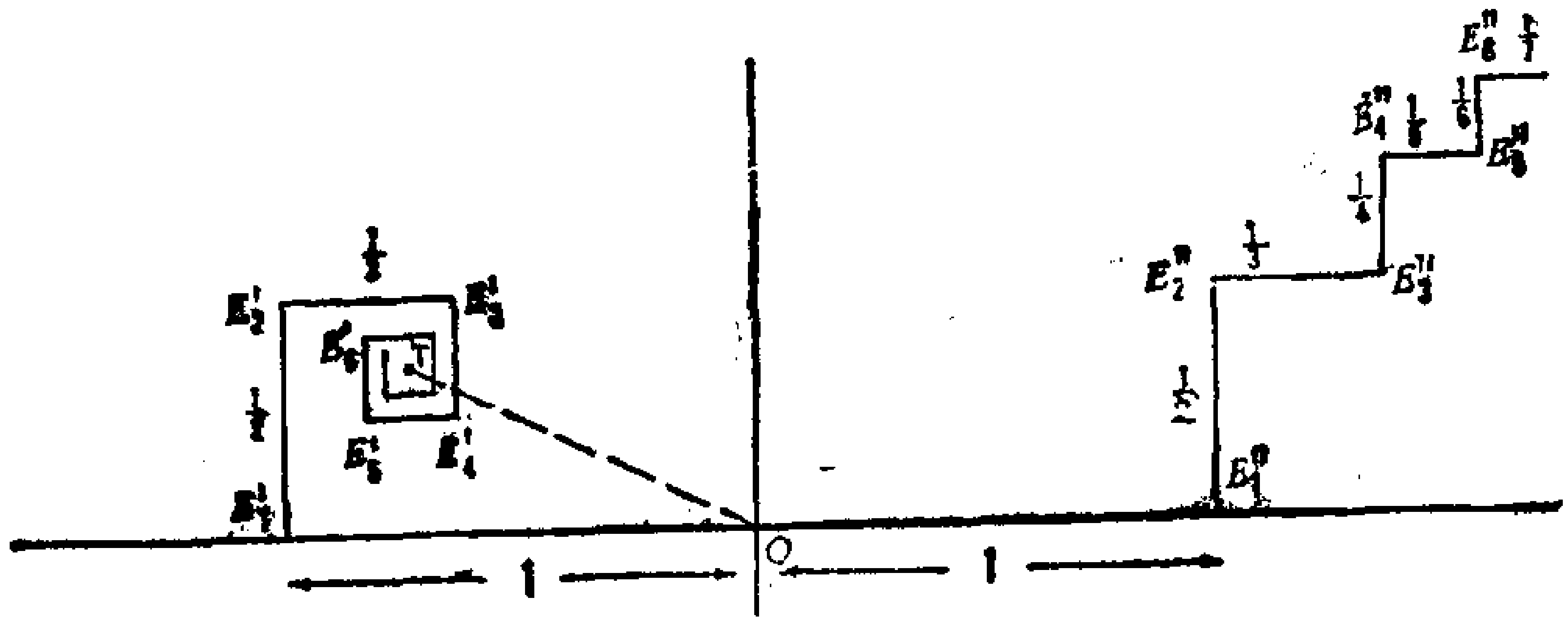


图 4.11

在第一个里，顶点有一个极限点T，线段$OE'_n(n=1,2,3,\cdots)$的序列有一个极限位置OT。在第二个里，沒有极限点，但是线段$OE''_n(n=1,2,3,\cdots)$的序列确实有一个极限方向！请读者证明OE''_n的斜率的极限存在。

π是一个无理数的意思是指圆的半径和它的周长不可约。和现在的讨论联系起来，这有一个惊人的后果。如果我们在圆上选一点，把它叫做P_1，然后把圆转一个弧度我们会得到一个新点，把它叫做P_2(弧P_1P_2和半径一样长)，如果我们再旋转一个弧度，我们得到另一点P_3，这样继续下

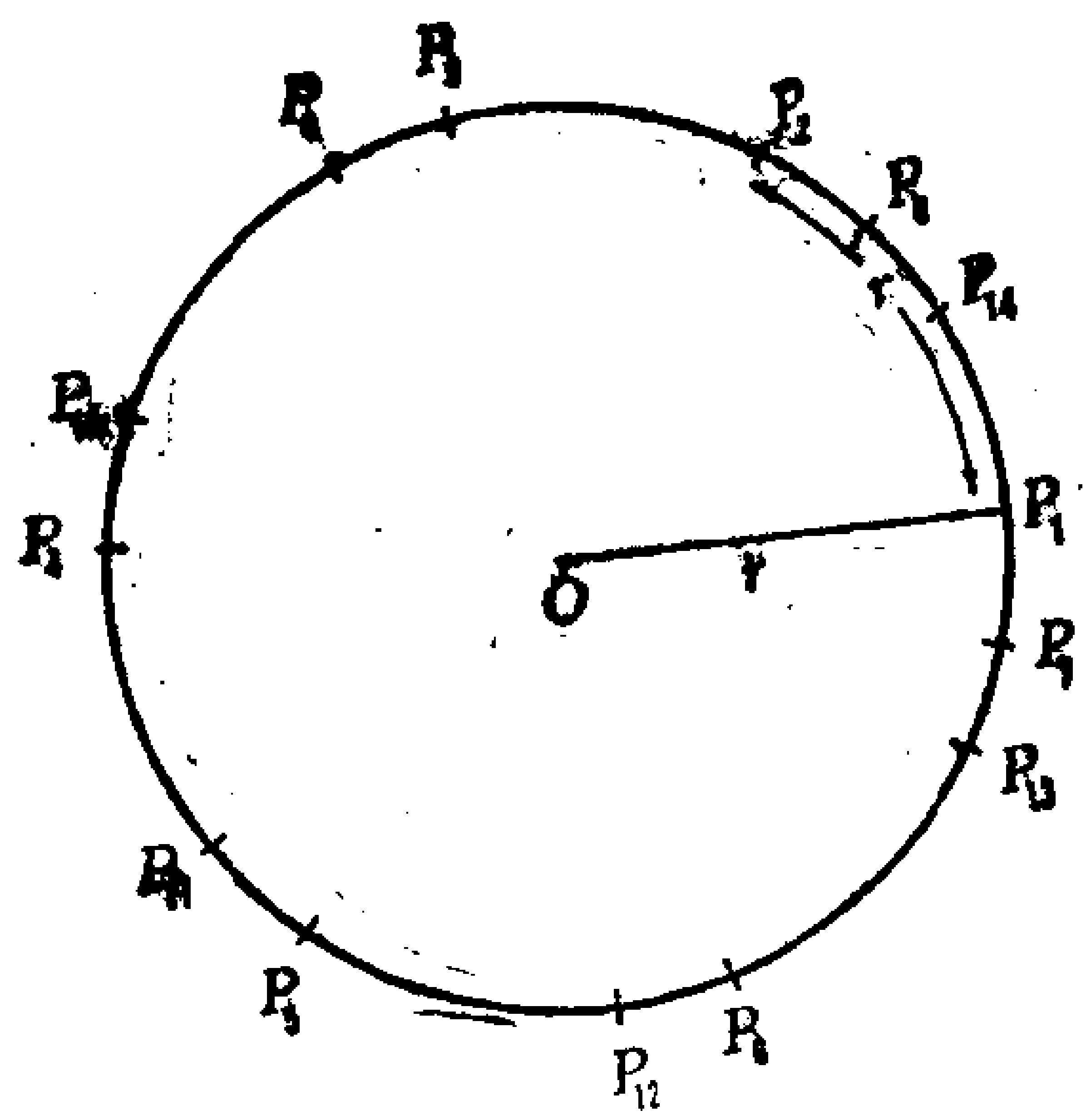


图 4.12

去。让我们用这个方法作一个点的序列 P_n $(n=1,2,3,\cdots)$；参看图4.12。序列里的这些点不会重复，因为半径和周长是不可约的。(这并不是很显然的，而要作一些思考。)径向线段 OP_n 的序列不可能达到一个极限位置，因为我们恒定地每次改变它的位置整整一个弧度。从这两个事实得出，点 $P_1,P_2,P_3,\cdots$ 是互不相同的，并且这个序列沒有极限点。

当 n 增加的时候，点 P_n 的变化是高等微积分里的一个非常重要的问题。容易猜测到 P_n 的旋转使得它在圆周的每一部分上大约同样频繁地出现，这是克罗内克 (Kronecker) 的一个困难而又著名的定理的內容。这个定理中较容易的部分说，点 $P_n(n=1,2,3,\cdots)$ 的集合在圆上处处稠密。这意思是说如果我们在圆周上取一点 P，我们一定能找到一个 P_1 的复本(就是 P_1 经过一定次数的单位弧度旋转以后得到的点)和它很靠近。更确切地说，如果我们选定一个(大的)数，叫它 K，我们就能找到一点 P_N(对于 N 的一个机智的选择)使得距离 PP_N 小于 $1/K$。当然，这并不意味着 P 是整个序列 P_1, $P_2,P_3,\cdots$ 的极限点，完全不是；紧接着的下一个点 P_{N+1} 将会和 P 有一个本质的距离，在下一次和 P 达到前面规定的那样接近，即 $1/K$ 之前，我们也许必须绕着圆转不少圈，也许 M 圈，才又达到一个机智选择的点 P_{N+M}。

我们用克罗内克定理的一个附注来结束我们这一本关于极限概念的画册①。如果我们选定一个等于k弧度的旋转角并且考虑产生的点的序列

$$P'_1,\ P'_2,\ P'_3,\ \cdots,$$

有两个可能性。如果k和π不可约，我们得到一个处处稠密的集合，就象上面$k=1$的情形一样。如果k是2π的一个有理部分，就是说$k=2m\pi/n$，m和n是整数，那末这个序列是周期的并且具有形式

$$P'_1,\ P'_2,\ \cdots,\ P'_N,\ P'_1,\ P'_2,\ \cdots.$$

不同的点数N最多只有n个(记住，2π弧度是转一圈)，N永远是n的一个因子(这并不容易证明，但是用不了几行；这个结果是初等群论里面的一个基本定理)。这一个可能性引出了所有的正多边形和一批美丽的图画。这里，我们画了$n=5$的情形；对于$k=2\pi/5$，我们得到第一个；对于$k=4\pi/5$，我们得到了第二个，这些多边形如图4.13所示。

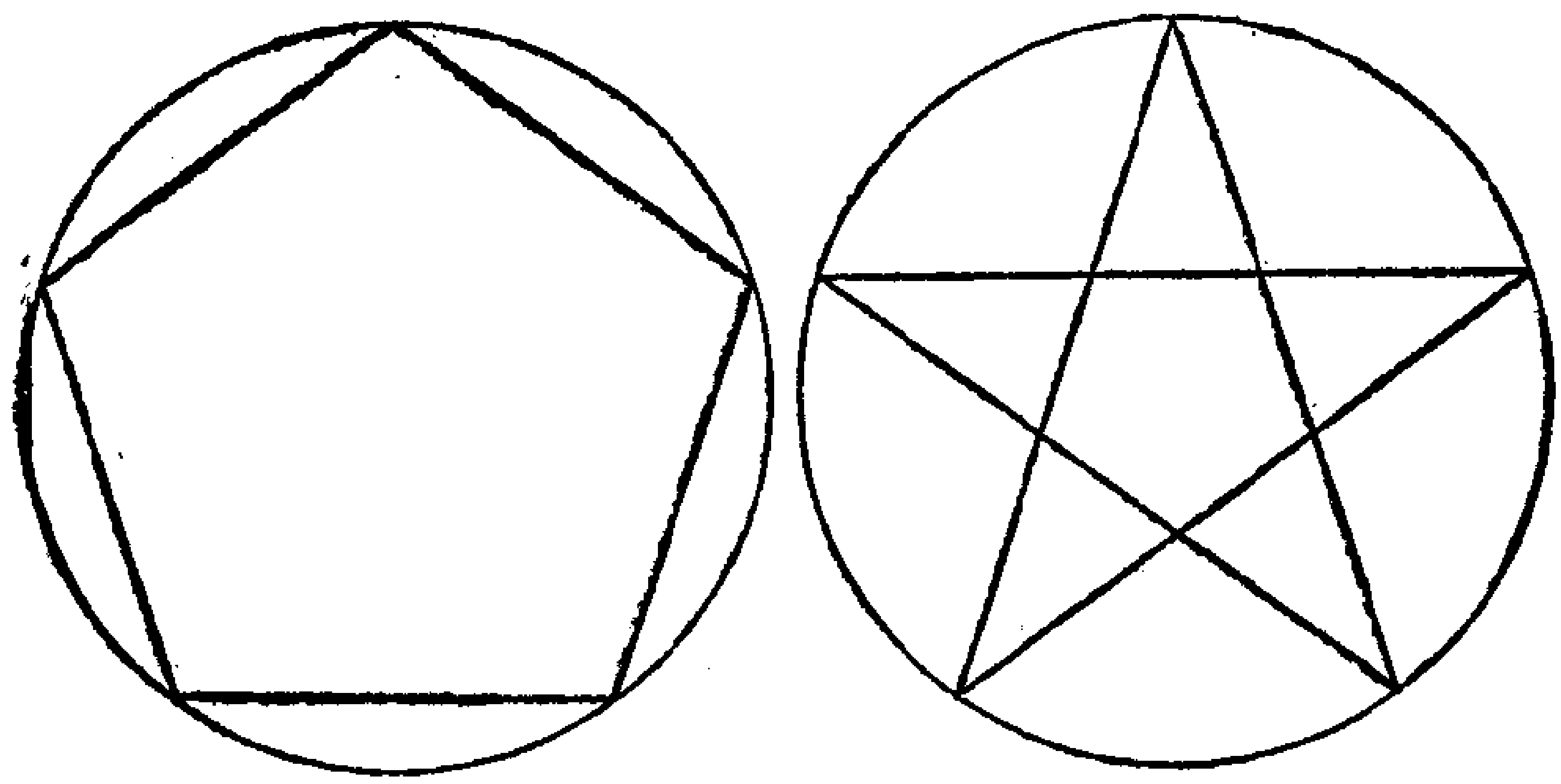


图 4.13

除了一个例外情况，周期的集合是没有极限的。例外情

① 指本章中关于极限概念的一系列图解实例。——译者

况是序列$Q, Q, Q, \cdots$有极限Q。数字例子是序列$2, 2, 2, \cdots$，它有极限 2。它的背景可以看成把 2 表示成一个无限小数

$$2.00000\cdots;$$

当我们"画圈"到第n位时，得到第n个逼近，它当然还是 2，但是我们现在把它看成是 2 的逼近(发生在正好击中目标的情况)。这完全和上面给的极限的定义一致。

最后注释一下关于极限在微积分里的应用。曲线的切线、弧长、曲线图形所围的面积、一块曲面的面积、曲面的曲率、曲面所围的体积、质量的重心等概念，以及速度、加速度、做功、一个质量对另一个的总万有引力等物理概念——所有这些以及每一个数学科学的分支中简直成百成千个其他的概念——都是从包含极限的定义开始的。微积分对所有这些题材都是有用的。

在这一章里，我们曾把极限概念应用了一次，就是计算之字形的长度。这是与无穷级数求和的数学问题紧密联系的，它是极限概念在微积分里两个最重要的应用之一(和曲线切线的斜率相联系的微商概念是另一个)。无穷级数是无限小数概念的推广，诸如

$$\frac{1}{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots$$

以及
$$\pi = 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + \cdots.$$
(在第二个例子里，三个点只意味着这个表示式沒有完；幷不包含计算下一位的任何简单规律。)

习　　题

4.8　与调和级数不同，著名的级数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

是收敛的。在微积分里证明了它的和是 $\pi^2/6$。我们要求读者做的全部事情是，说明第 n 次部分和序列有上界 2。这就证明了平面上所定义的某些点，不“走到无限大去”。

4.9 图 4.14 类似于“无理数的旋涡”(参看图3.10)；但是这里第 n 个三角形的底边与调和序列1，1/2，1/3，…联系如下：线段 P_nP_{n+1} ($n=1,2,3\cdots$)的长度是 $1/n$，它垂直于径线 OP_n。现在证明对所有的 n，OP_n小于$\sqrt{3}$。其次验证之字形 $P_1P_2P_3\cdots$的长度是无限大。设想把点 P_n 径向投影到一个适当的圆上，譬如说它的半径是 3，把 P_k 的投影表示成Q_k。你能证明这些点 $Q_1,Q_2,Q_3,\cdots$无限次地旋转吗？你能得出结论说原来的序列没有极限吗？

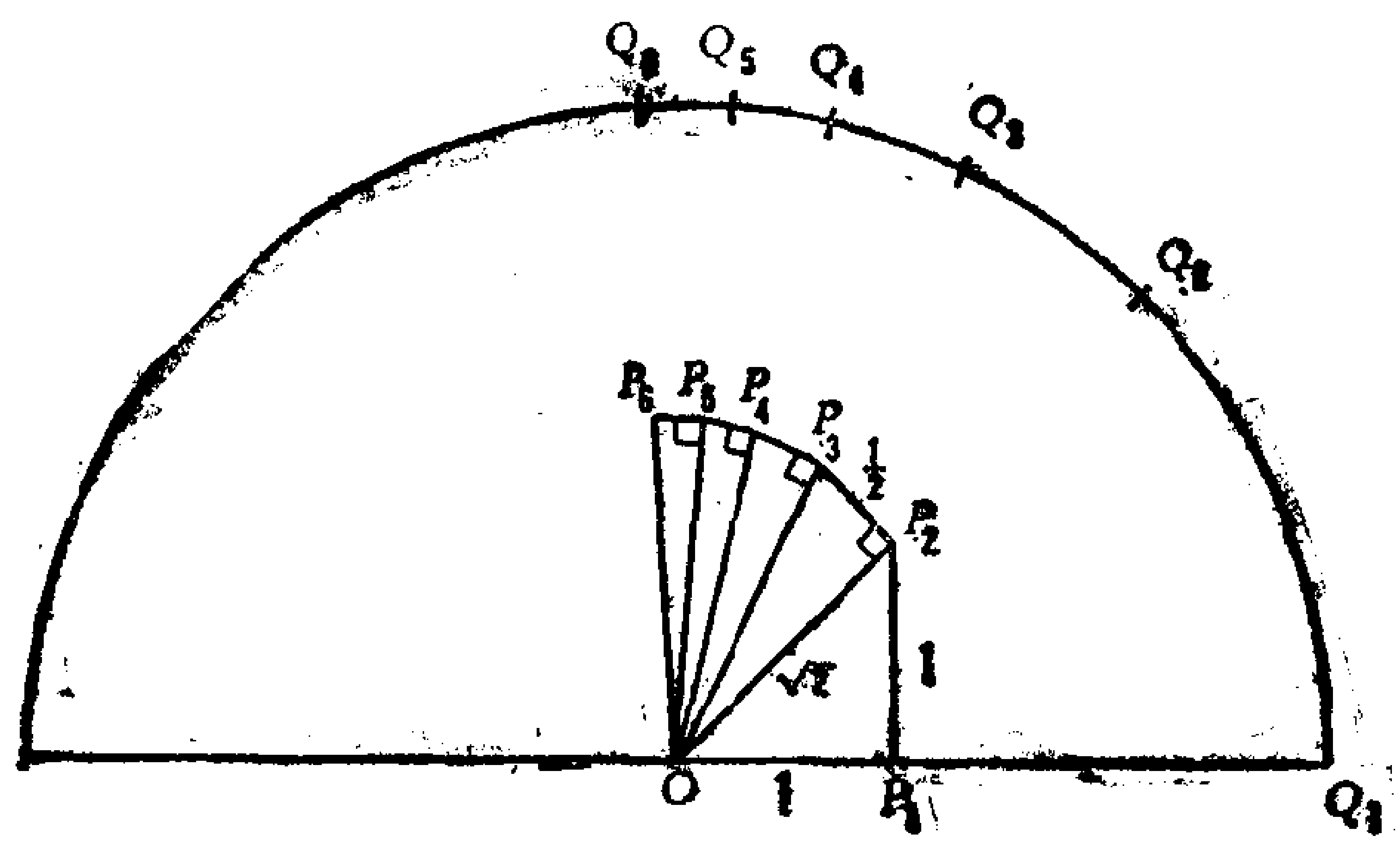


图 4.14

4.10 确定下列级数是否收敛：

(a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$；

(b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\cdots$;

(c) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}+\cdots$.

4.11 设P是一个点，P_n（$n=1,2,3,\cdots$）是平面上一个点的序列。假设对每一条直线l，P到l上的投影是P_n（$n=1,2,3,\cdots$）的投影的极限（图4.15）。

(a) 证明P是序列的极限；

(b) 如果上述事实只在一条直线上成立，能推断出这个结果吗？

(c) 对两条直线怎样？事情的确切说法是什么？

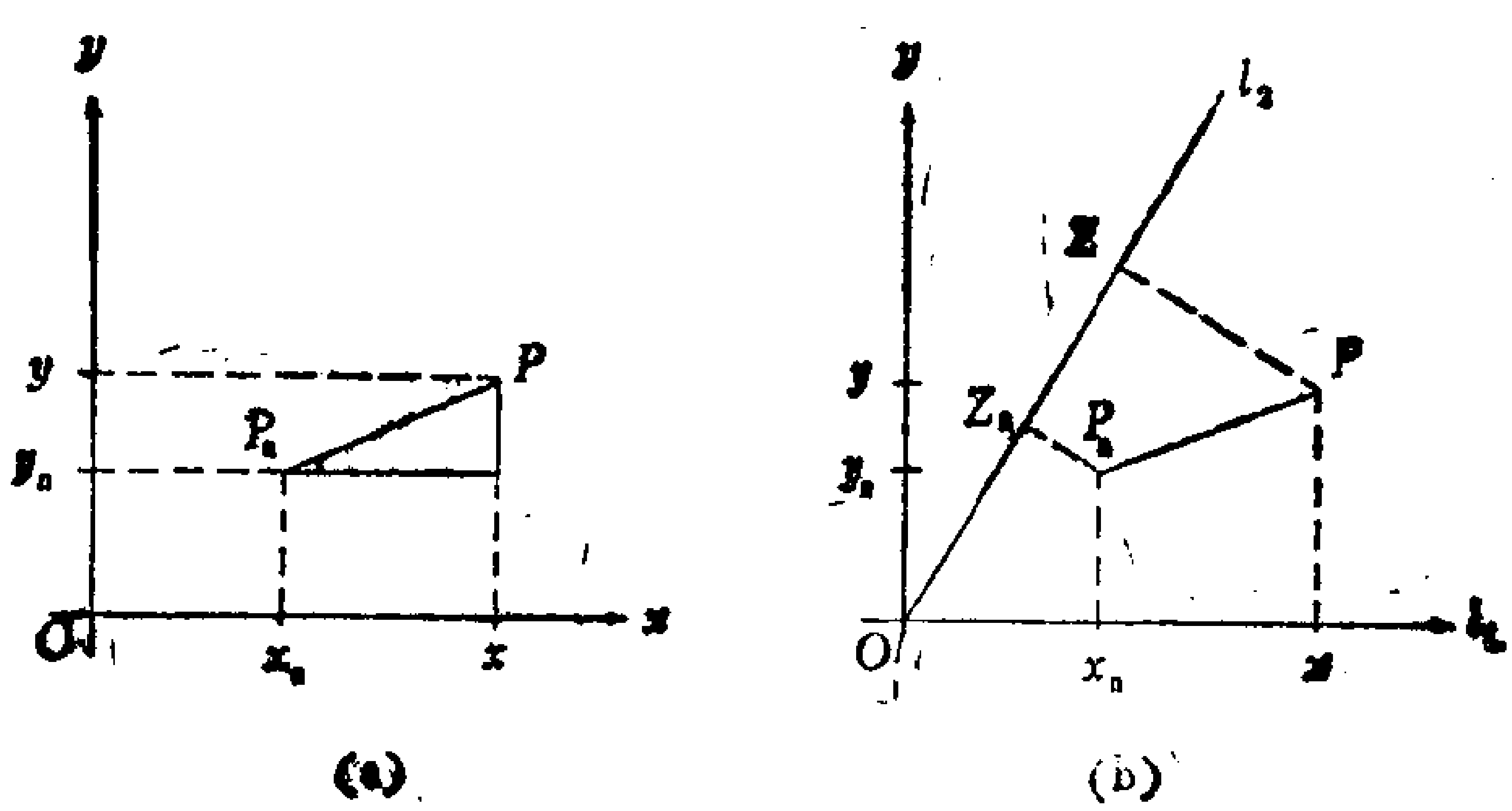


图 4.15

第五章　无休止的黄金长方形

在这一章我们要研究希腊人在大约公元前500年发现的一个长方形的一些性质，这个长方形和一些平方根的无理性同时发现。这个长方形的作图用到了$\sqrt{5}$，这个数字是用直尺和圆规作正五边形的关键。这个可爱的正五边形是正十二面体的一个面，而且还嵌入到五个正多面体中最令人难以置信的正二十面体。因此，由于它的美丽和它美丽的家族，黄金长方形受到了希腊人的高度赞扬。

用正确的方法观察，差不多立刻可以产生下面的序列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，…。

在十三世纪，这个数的序列就由比萨的莱昂纳多在一个关于兔子繁殖的算术问题里发明了(在他的序列里1和1代表兔子的祖宗)，它后来叫做斐波那契序列①．从那时候起，这个长方形和这个级数的联系是数学发现的一个源泉，其中的一些将要在这一章里加以说明．在十八世纪以前发现了这个长方形自然地和一条对数螺线联系起来，后者是一个与很多自然界的物体(如软体动物和蜗牛)的增长有关系的图形．伟大的心理学家费凯纳(Fechner)关于他的著名定律的说明："对刺激的反应强度按刺激强度的对数规律变化．"为这个长方形和它固有的螺线招来了一大群崇拜者，他们不一定是数学家．对数在心理学现象里的重要性被各种各样的事实所证明；例如用分贝来测量强度．一个叫做"叶序"的生物学

① 见20页的脚注。

现象也呈现出斐波那契数①。

5.1 黄金长方形

图5.1显示了一个长方形，它的样子象图书馆管理员的3×5卡片。如果把这张卡片象图5.2那样折叠一下，还剩下一个长方形，它的边的比是2比3，大约0.67比1。原来的卡片的比是3比5，它是0.6比1。因此如果把这样一张卡片切掉一个正方形，得到一个和原来近似的形状。现在，黄金长方形可以这样来定义：如果由它切掉一个正方形，那末剩下的长方形正好和原来的长方形有同样形状。“同样形状”的意思是短边对长边的比值一样，也就是说，两个长方形是相似的。

图 5.1

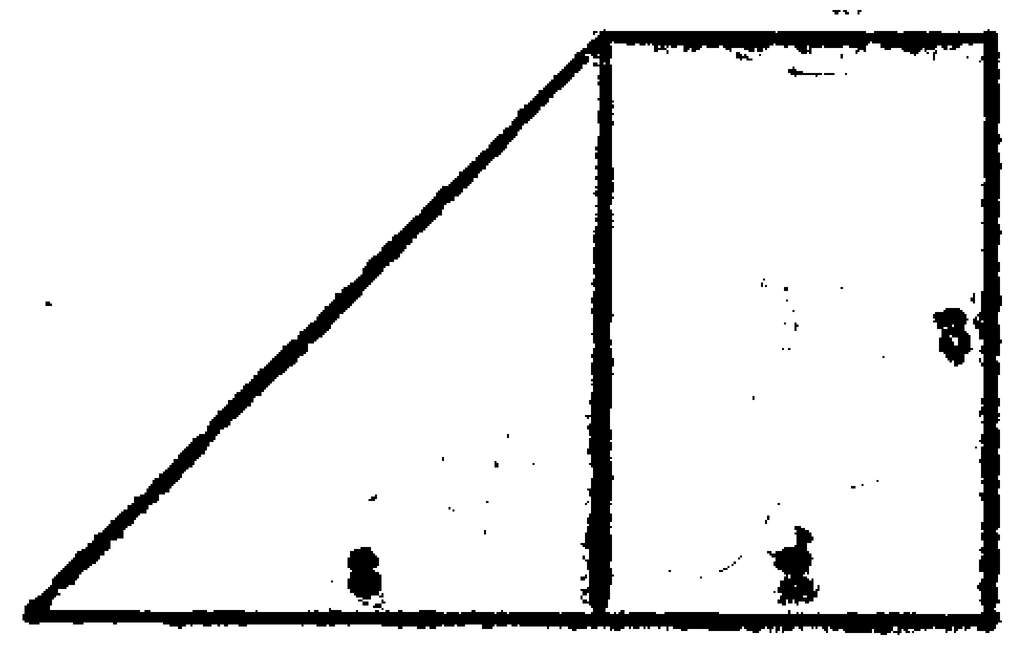


图 5.2

很清楚，现在一个无限跑出来了；因为如果从这个新的长方形切掉一个正方形，产生另一个形状相似的长方形，如果从这一个再切掉一个正方形又产生一个长方形，这样无限下去。

让我们把原来长方形的边长表示为$a+b$和a。那么连绵

① 对于这些现象的说明，可参看H.S.M.科克斯特的《几何引论》(H.S.M.Coxeter, Introduction to Geometry)第十一章里优美的讨论。也可以参看M.加德纳在一九五九年八月号《科学美国人》上的《数学游戏》一文。(M. Gardner, “Mathematical Games”, *Scientific American*, August, 1959.)

不断的长方形的边长给出了下面对子的序列：

$$\begin{cases}a+b,\\a;\end{cases}\quad\begin{cases}a,\\b;\end{cases}\quad\begin{cases}b,\\a-b;\end{cases}\quad\begin{cases}a-b,\\2b-a;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2b-a,\\2a-3b;\end{cases}\quad\begin{cases}2a-3b,\\5b-3a;\end{cases}\quad\begin{cases}5b-3a,\\5a-8b;\end{cases}\quad\begin{cases}\cdots,\\\cdots;\end{cases}$$

在这里我们先写每一个对子里的长边。它呈现出的形式是：一个长方形的长边是下一个长方形的两条边的和。在这些表达式里，a 和 b 的系数与上面列出的斐波那契数有关。生成斐波那契数的规律是：每一个数是前面两个数的和(除了两个祖宗：1和1)。生成以上长度的规律和生成斐波那契数的规律是这样的相似，以至于不可能怀疑它们之间有一个密切的联系；我们将在后面再回到这一点。

5.2 黄金中项是无理数

形成一系列长方形的过程不会结束，这告诉我们 a 和 b 是不可约的(参看第三章)，所以$m=b/a$是无理数。数学史学家卡乔里(Cajori)把黄金中项 m(也就是黄金长方形的短边与长边的比值）是一个无理数的第一个证明归功于坎帕纳斯(Campanus)，他于1260年“用了一个把归谬法和无限下降原理相结合的方法”。让我们来看这个证明是怎样进行的。

为了论证的目的，我们假设m是有理数，这就是说m是某一对整数的比值。这样，可以也假设 a 和 b 就是这两个整数并且利用图5.3。我们发现

$$a-b,\ 2b-a,\ 2a-3b,\ 3a-5b,\ 5a-8b,\ \cdots$$

都是整数，作图表明了它们都是正数！关于m是有理数的假设把我们导致一个无限下降的正整数序列。但是这违背了眞

理，因为没有这样一个序列。因此关于m是有理数的假设是站不住脚的，这就结束了m是无理数的证明。

m的倒数就是a/b，常常表示成希腊字母τ(tao)，它是$\tau o\mu\eta$的缩写，意思是“断片”。因此$\tau=1/m$。

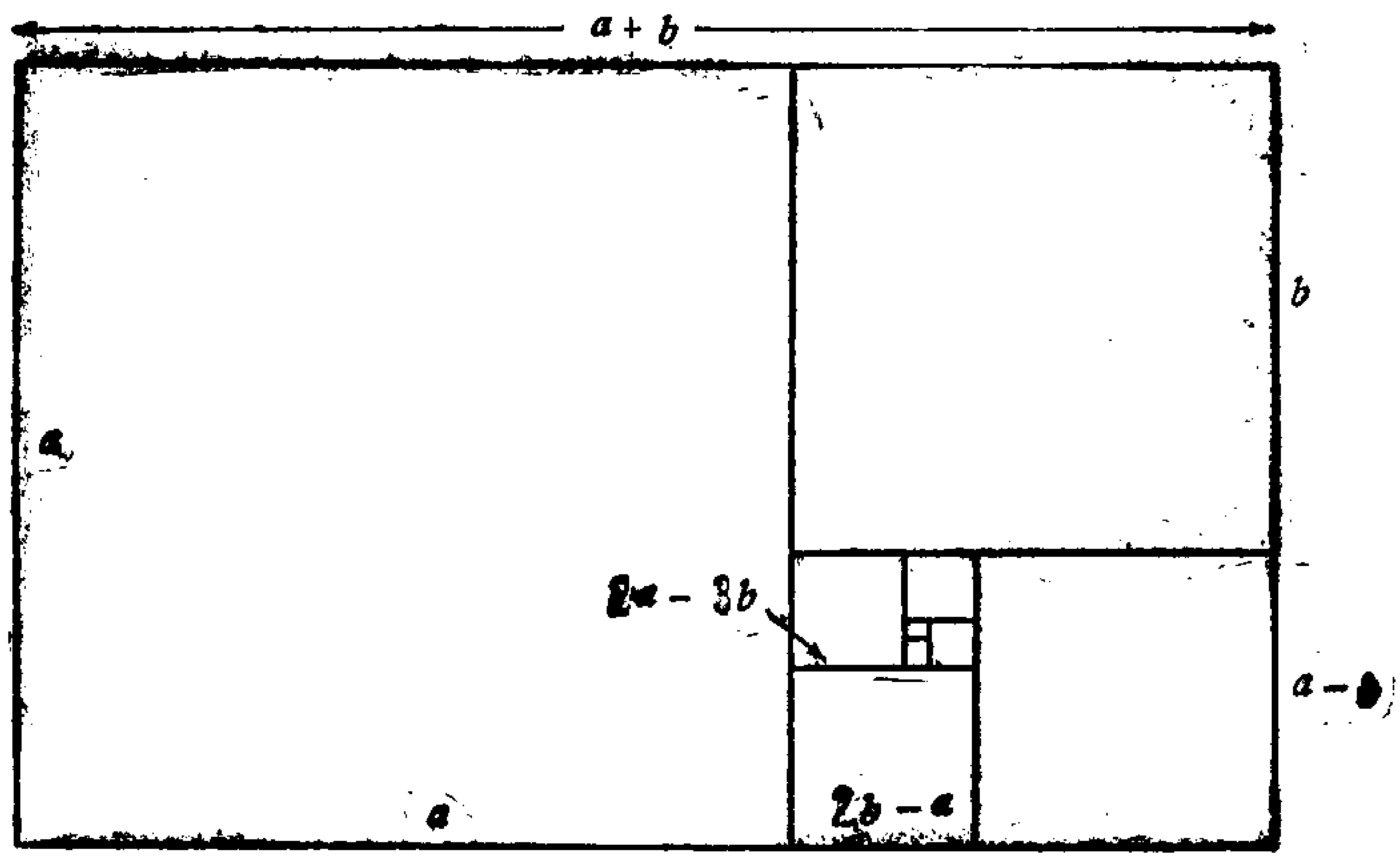


图 5.3

习 题

5.1 用图5.4证明$\sqrt{2}$是一个无理数，类似地用图 5.5

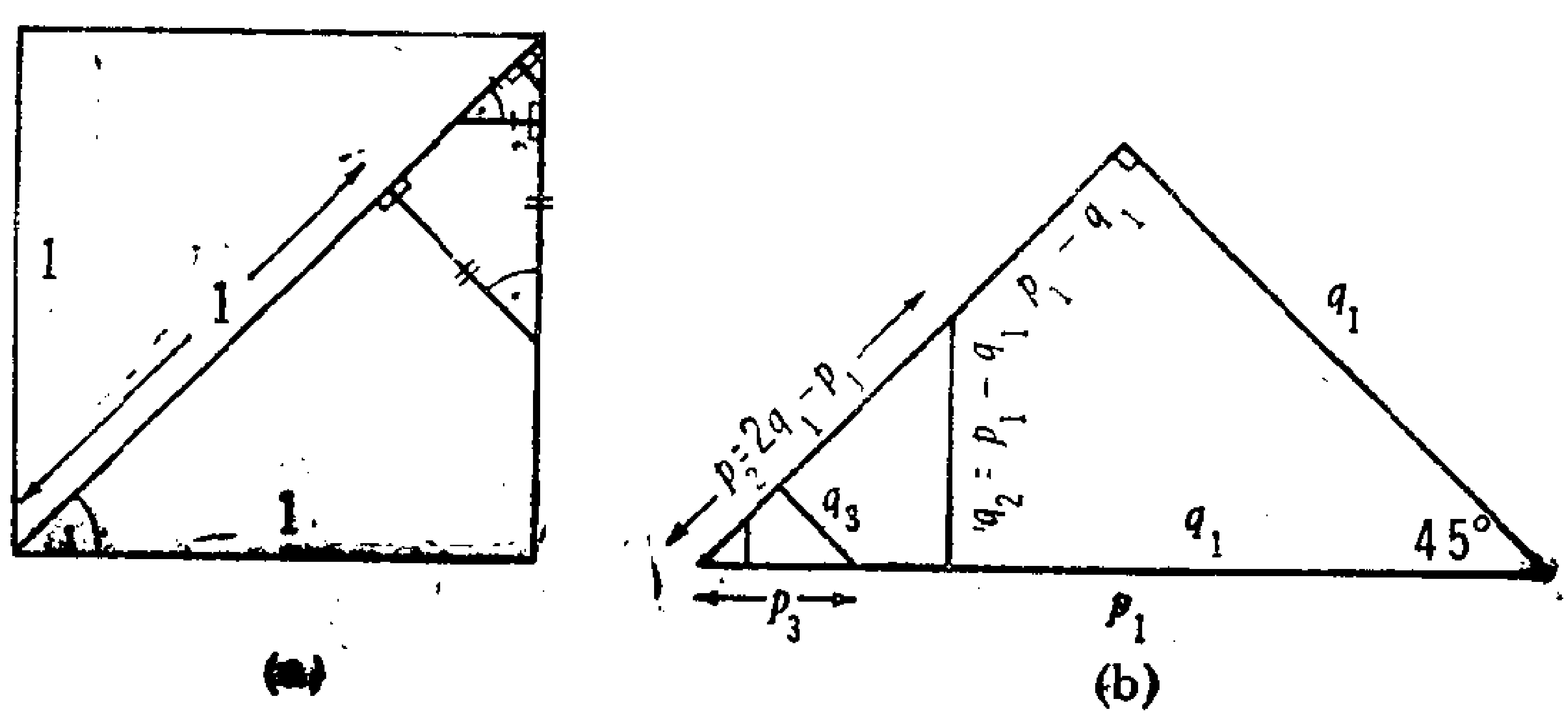


图 5.4

证明$\sqrt{5}$也是一个无理数。你能把这个改成$\sqrt{n}$的其它情况吗？

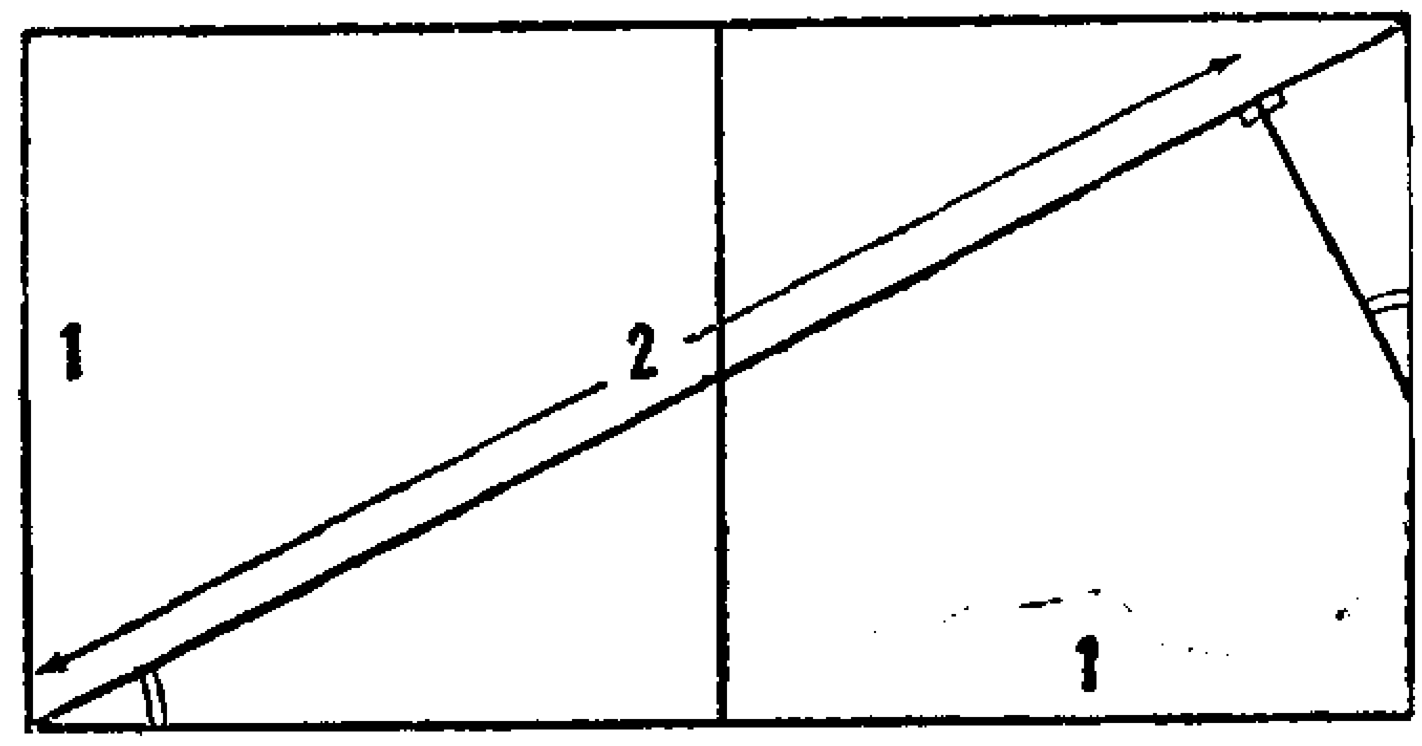


图 5.5

5.3 黄金中项的估计

我们一直假定黄金长方形存在。这是容易证明的，但是首先让我们用“预估和校正”法来估计这个黄金中项。我们想确定比值

$$m=\frac{b}{a}\quad 使得\quad \frac{b}{a}=\frac{a}{a+b};$$

因为，如果 a 和 b 满足这个关系式，那末图 5.3 的长方形确实是一个黄金长方形。如果选 a 和 b 使 $a+b=1$，我们的计算会变得简单一些，这样

$$m=\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}=a;$$

就是说 a 和 b 必须选成$m=a$和 $a+b=1$。于是，我们作一个试验性的边 a 和 b 的表，记下比值 $b/a=m$。第一个表指出m在0.6和0.8之间，靠近0.6；第二个给了一个m 的较好的估计，在0.61和0.62之间。因此0.615 不可能和黄金中项相差多于0.005，它是一个不超过六百分之五，小于百分之一的可能误差。这对用机械方法生产长方形卡片已经是很好的了。

a	0.2	0.4	0.6	0.8
b	0.8	0.6	0.4	0.2
m	4	1.5	0.67	0.25

a	0.6	0.61	0.62
b	0.4	0.39	0.38
m	0.67	0.65	0.61

习　　题

5.2　m离0.62比0.61更近一些；试用"比例部分法"或者一个简单的图解格式得到一个m的更好的估计。m到九位小数的值是0.618 033 989，一个好的图能给出0.618。

5.4　求黄金中项的方法

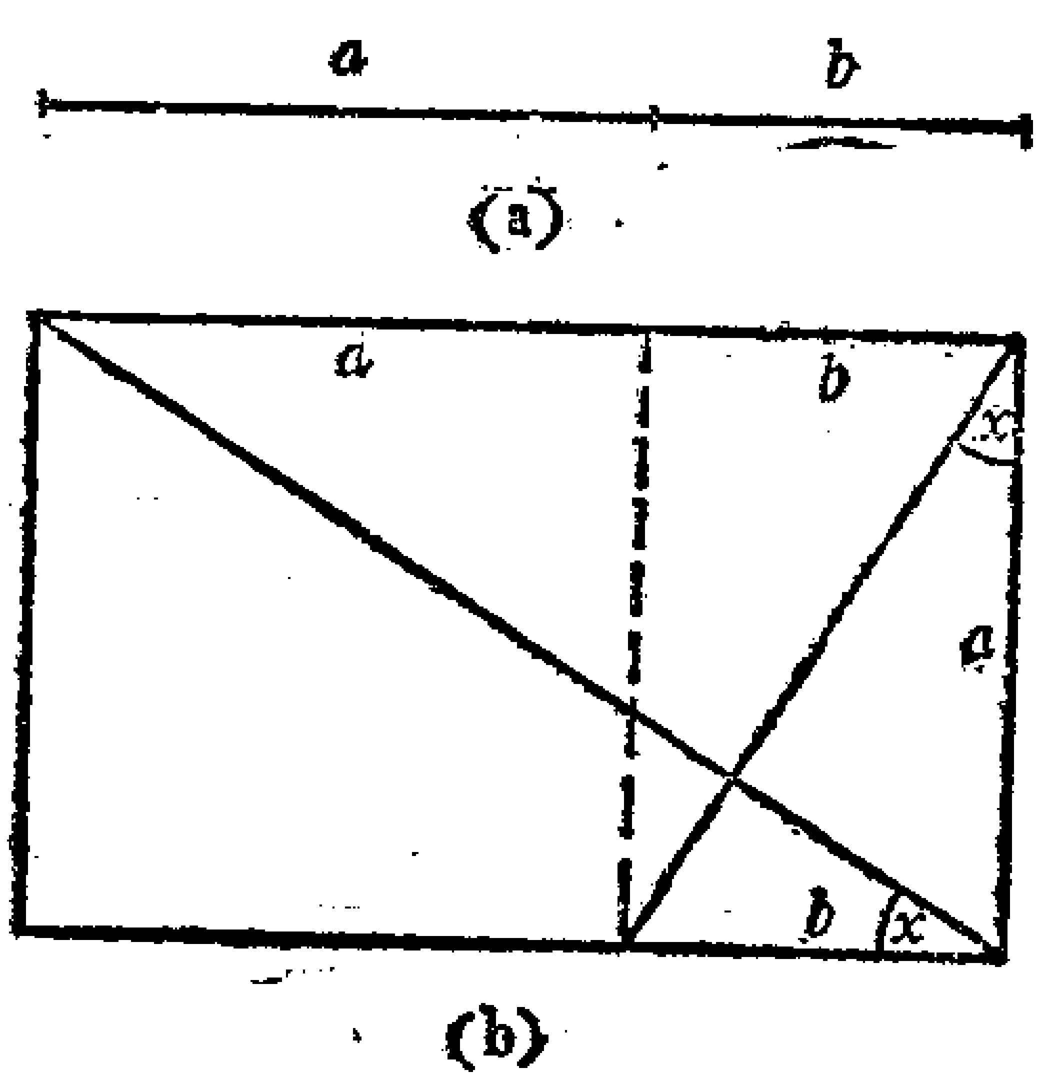


图　5.6

a）黄金长方形好象是从下面的问题中发现的："把一个给定的线段分成两部分，使得短边比长边等于长边比整个线段"，参看图5.6(a)。

这个问题里的条件用符号表示是

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}.$$

把右边的分子和分母用a除，我们得到

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{1+\dfrac{b}{a}};$$

用m代b/a，用τ表示$1/m$，我们得到

$$m=\frac{1}{1+m}\quad\text{或}\quad m(m+1)=1\quad\text{或}\quad m+1=\tau.$$

它说明m的倒数是$m+1$。它还导出了一个二次方程和一个m的精确表示(见下)。但是在推导m的公式以前，让我

们看一下关于m的这个定义和上一个的关系。让我们想象已经找到了适当的长度a和b，并用一对相似三角形表示这个比例式。这可以直接在给定的线段上这样做：

图5.6(b)表明了相似的直角三角形；两个相等的锐角记作x。现在，虚线补全了一对相似的长方形和一个剩余的正方形的图象。很清楚我们回到了黄金长方形的上一个定义。

我们现在继续计算m。我们看到黄金中项的定义蕴涵着m满足方程

$$m^2+m=1.$$

配成完全平方

$$m^2+m+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},$$

我们求出

$$m+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{或者} \quad m+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2},$$

因为a和b是长度，m必定是正的，因此

$$m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

这就是m的公式。

很容易验证m满足原始的条件，因为

$$m+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\tau$$

并且

$$m(m+1)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{5-1}{4}=1.$$

在表里查一下$\sqrt{5}$或者用这个或那个方法计算它，我们

可以得到任意接近m的近似值；近似到9位小数时，

$$m \approx 0.618\,033\,989.$$

在图5.7中指出了一个用直尺和圆规的作图，读者可以自己核实。线段AE的长度是1，DE和FG平行，线段EG和GC有要求的长度m。这是希腊几何学家解这个方程的一个方法。巴比伦的数学家在公元前1800年以前曾经做出关于这种二次方程的无数特殊情况的理论(避免虚数和负数)。

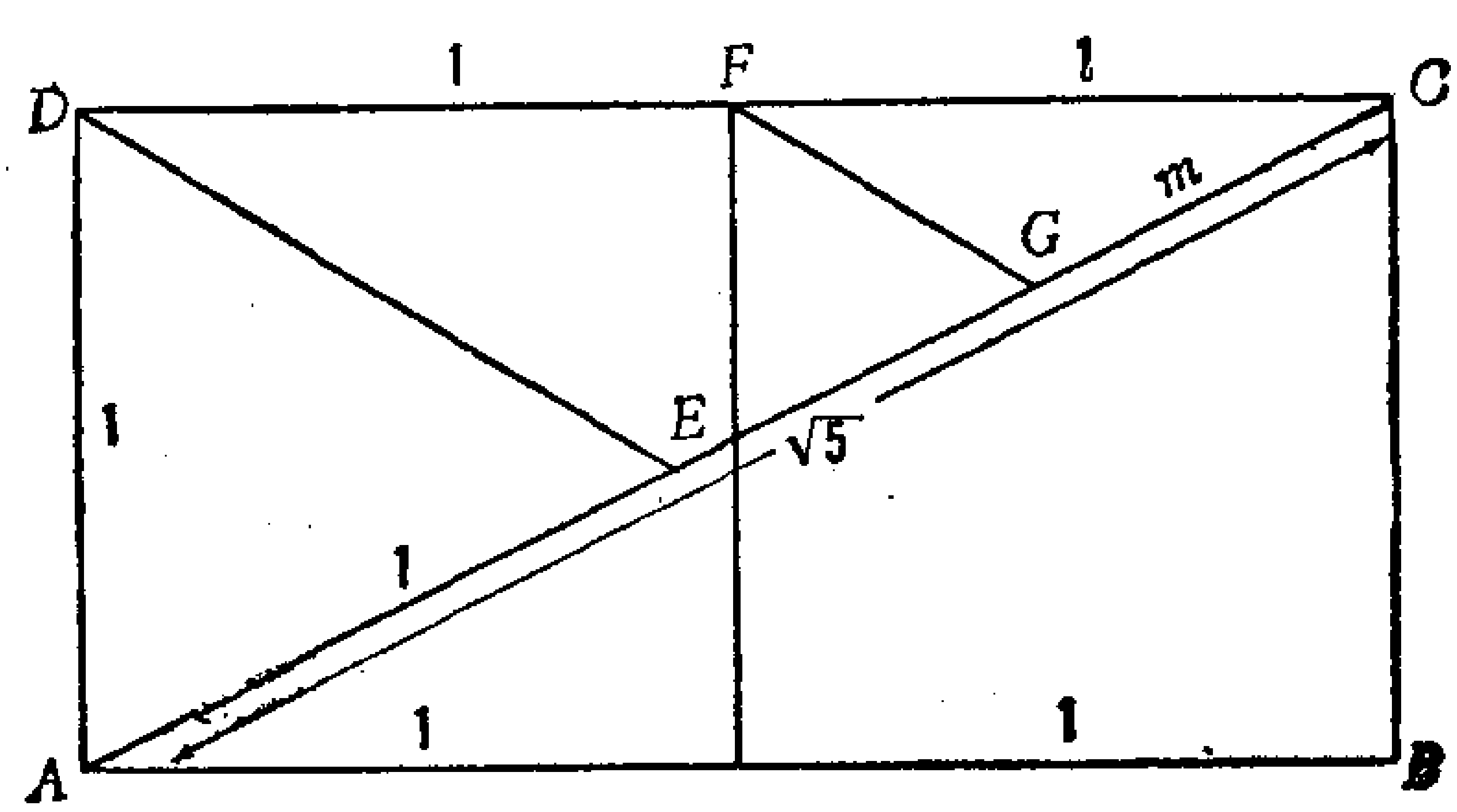


图 5.7

b) 另一个近乎古怪的解方程

$$m=\frac{1}{1+m} \tag{5.1}$$

的方法是十七世纪的数学家吉拉德(Girard)发现的。把m的值代入方程(5.1)右端的分母中，使得

$$m=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+m}}, \tag{5.2}$$

然后重复地把m的值代入每下一个方程。通常，目的是把方程右端的m去掉；但是这个过程却把m推出去，越推越远。

一直用这种简单的代入，经过一些步以后，我们发现

$$m=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}.$$

这个公式是某个东西的一个非常激动人心的提法，但是很难确切地说出是什么东西①。一个赋予它意义的尝试是，定义它是一个繁分式的序列

$$\frac{1}{1},\ \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},\ \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}},\ \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}},\ \cdots$$

的极限，其中每一项都包含在上式中。

这些数的前面五个是

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},$$

略一思索就能指导读者找到下一个。此后，很容易猜到，甚至是说明，每个分数的分母里（和下一个分数的分子里）的整数是斐波那契数！因此现在m作为一个极限给了我们。

习　题

5.3　说明：如果以上的分数中的一个等于p/q，那末下一个一定等于$q/(p+q)$。

---

① 为了找到这个表达式的确切定义是什么，请读这套丛书里已出版的C.D.奥尔德斯的《连分数》。

不出所料，这些分数确实收敛到数m，这个事实是由西蒙松(Simson)于1734年证明的，比吉拉德的发现晚了100年。他说明这一连串的分数交替地高于和低于这个靶子；偶数标号的分数构成一个减少的序列，奇数的构成一个增加的序列，它们都有极限m。

下一节我们将会看到这是怎么证明的。

习　题

5.4 (a) 说明下面解$m^2=1-m$的方法是荒唐的：

$$m=\sqrt{1-m}=\sqrt{1-\sqrt{1-m}}$$

$$=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-m}}}$$

$$=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots}}},$$

方法是说明有限部分的序列

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1-\sqrt{1}},\ \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1}}},\ \cdots$$

不是以m作为它的极限。

(b) 说明m的倒数τ满足方程$\tau^2=1+\tau$，并且说明解法

$$\tau=\sqrt{1+\tau}=\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}$$

$$=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}}=\cdots$$

好象是讲得通的，因为对应的有限部分的序列有一个极限。

5.5 导致 m 的其它序列

在我们目前逼近m的计划里，把a取作单位长度，即$a=1$，能把事情简化；这样一来

$$\frac{b}{a}=\frac{b}{1}=m,$$

一连串的黄金长方形的长边(短边也对)的长度是

$$1+m,\ 1,\ m,\ 1-m,\ 2m-1,\ 2-3m,$$
$$5m-3,\ 5-8m,\ 13m-8,\ 13-21m,\ \cdots.$$

从几何上看，很清楚，这些数趋近于零。然而，譬如$5-8m$很小，即

$$5-8m\approx 0,$$

那末m近似于5/8，也就是说$m\approx(5/8)\approx 0.618$。这个论证是很一般的；令每一项"近似等于"零就给出m的一个近似。从第五项开始用这个方法，我们得到

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},$$

$$\frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \cdots.$$

习　题

5.5 求一些与它们相等的小数。试一试比值377/610和610/987；在这个序列里，它们在多远的地方？

形成这些分数的规律是清楚的：一个分数的分母是下一个分数的分子，分母与分子的和给出了下一个分母；也就是说

$$\frac{p}{q}\text{的后面是}\frac{q}{p+q}.$$

立刻明白，分母的序列正好就是斐波那契序列，当然分子的序列也是这样；丢掉了祖宗1和1是一个小小的问题，但是要记住我们并沒有从它们开始。

习　题

5.6　是不是以上每一个分数都比前一个在数量上更接近于m？给出证据来支持你的答案。

我们将说明一连串的m的近似值围绕着它振动。取34/55和55/89这一对为例。它们满足简单的关系式

$$\frac{34}{55}\cdot\frac{55}{89}+\frac{55}{89}=1. \tag{5.3}$$

为了验证它，用不着作乘法去求一个大的公分母；把一对55消去就行了。其次，注意到这个方程类似于m满足的方程，只要我们把那个方程写成

$$m\cdot m+m=1. \tag{5.4}$$

现在，让我们假定34/55大于55/89(它正是这样)；如果把(5.3)中的34/55换成55/89，方程就不成立了，因为左端变小了。因此$(55/89)^2+(55/89)$小于1。这说明了55/89小于m。类似地再假定55/89小于34/55，把(5.3)里的55/89换成大的数，我们发现34/55大于m。它发生在34/55大于55/89，但是即使不是这样，我们的论证也说明了：两个数里小的一个小于m，大的一个大于m。根据方程(5.4)它们不可能相等，我们现在就来说明这一点。

论证是很一般的：一对连贯的近似值的形式是 p/q，$q/(p+q)$（在这里 p 和 q 是整数）并且满足方程

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p+q}+\frac{q}{p+q}=1. \qquad (5.5)$$

如果两个分数能相等，那末和方程(5.4)比较，说明每一个都等于 m；但是 m 是无理数（参看第5.2节）。因此这些分数不相等。为了看出 m 在它们之间，注意到如果我们在方程(5.5)里把大的一个换成另一个，左端会小于1；这表明了〔和(5.4)比较〕较小的那个数小于 m。类似地，较大的数大于 m。证毕。

读者会没有任何困难地查明西蒙松的观察已经证实了。在转向和黄金长方形有关的对数螺线之前，我们提一下两个有趣的问题：一个和 m 的幂次有关系；另一个绝妙的问题属于拉格朗日(Lagrange)，它是关于斐波那契数模任何整数的余数。第二个是困难的。它的解答在下一章。

习　题

5.7　扩充以下的附注：$m^2=1-m$；$m^3=m-m^2=2m-1$；$m^4=2m^2-m=2-3m$；…。你能写一个一般公式吗？对 $\tau=1+m$；$\tau^2=\tau+1$；$\tau^3=\tau^2+\tau=2\tau+1$；…同样做。

5.8　(a) 斐波那契数模2是1, 1, 0, 1, 1, 0, …；模3是1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, …；两个序列都是周期的。说明斐波那契数序列模 4 也是周期的。类似地，显示它模 5 和模 6 的周期性。（模10的序列有周期60。）

(b) 你看出怎样去得到模3, 4, 5, 6的余数而不用真正地去计算大的斐波那契数吗？利用这个知识，及每一个数是前

两个之和这个规律，你能不能证明拉格朗日的附注：斐波那契数模随便那一个整数的余数都是周期的？提示：如果模 n，周期不超过 n^2+1。

5.6 一个螺线之字形

下面要作一个螺线形的之字形，它的顶点在一个非常美丽的螺线上。这个之字形把我们引向这个螺线的中心，也揭示了螺线作图的基础方案。同时我们还要作一个收缩的正方形的旋涡和一个长方形的旋涡，并且把我们自已也弄得有一点头晕目眩了。从黄金长方形 $ABDF$ 的左下角 A 开始，参看图5.8，我们画一条45°直线到上边的 C 点，然后作向下的垂直线 CH 切下一个正方形。其次，用新的黄金长方形 $CDFH$，把 CH 当作底边，我们重复上面的作图；也就是说，我们画一条直线 CE 与新的底边 CH 成 45°角，并且作一条垂直线 EJ 切下一个正方形，给出一个长方形 $EFHJ$，它的底边是 EJ。然后我们画一条直线 EG，使 EG 与 EJ 成 45°角，作垂直线 GK，然后从新长方形 $GHJK$ 的点 G 继续作图。换句话说，我们每次从一个黄金长方形的左下顶点画一条直线和底边成45°角，这条直线与长方形的上边相交于一个点，从这个点出发又开始下一个类似的作图。每一个新的顶点属于一个长方形，它相对于前面一个长方形转了90°，它的边是前面一个的 m 倍。每个长方形都旋转 90°并且按因子 m 收缩。

就这一连串的正方形和长方形来说，它们有和以前同样的边长：$1+m, 1, m, 1-m, 2m-1, \cdots$，等等。换句话说，我们得到了序列 $m^{-1}, 1, m, m^2, m^3, \cdots$。其实读者已经证明了或者现在只要看一下图(或者利用控制方程 $m^2=1-m$)，并且

利用每一个长度是从上一个按1比m收缩这一事实就能证明这一点了。

习　　题

5.9 长方形的旋涡可以表示成：$ABDF, CDFH, EFHJ, GHJK, \cdots$。你能给相继长方形的顶点排列的方式附上一些什么规律吗？

5.10 如果边AB长1，AC长$\sqrt{2}$。用无穷几何级数的公式说明之字形$ACEGI\cdots$的长度是$\sqrt{2}/m^2$。我们有没有证明这个公式即使在公比是无理数时也成立？

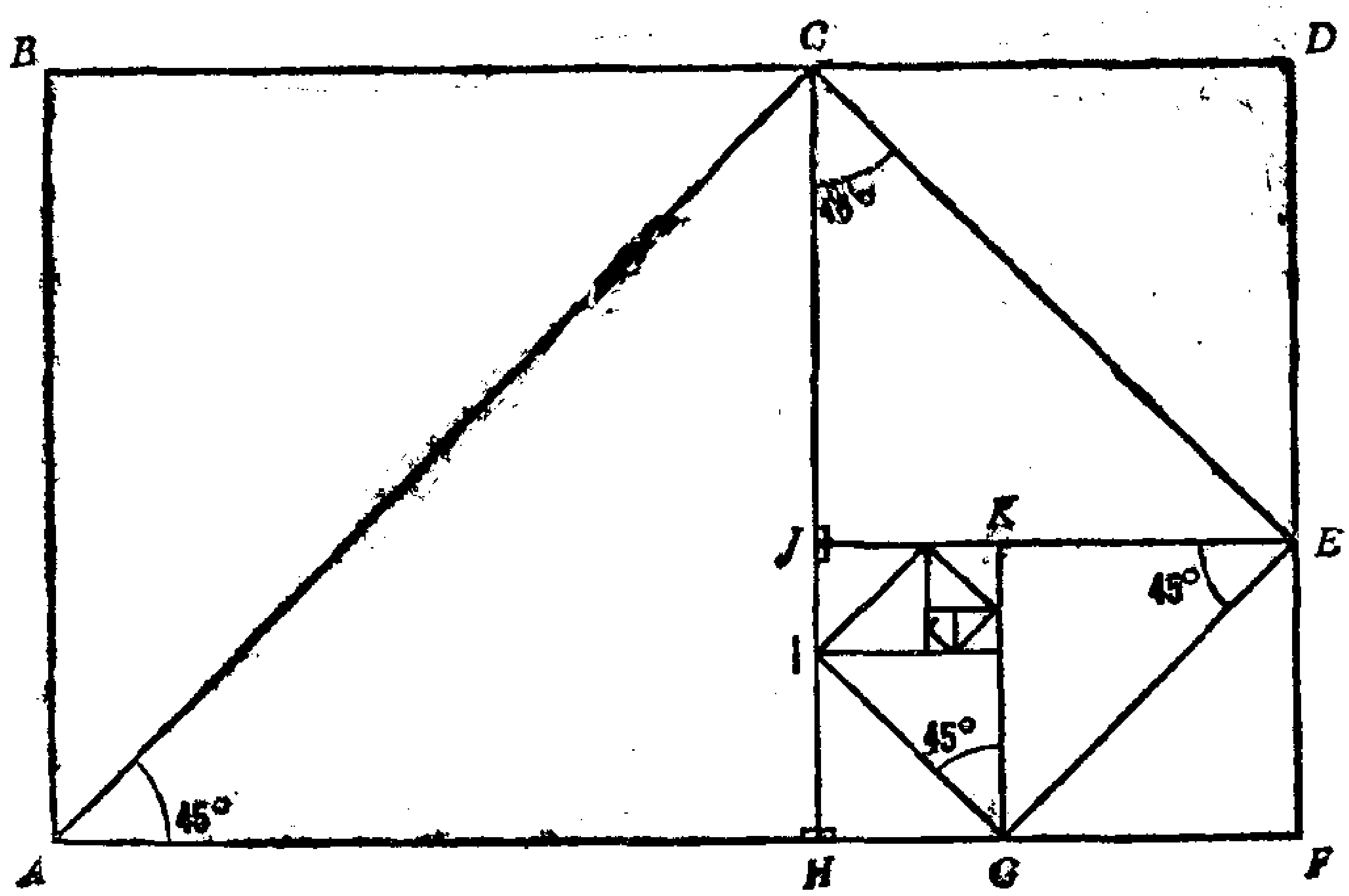


图 5.8

5.7 相似变换的应用

从图5.8很清楚看到之字形围拢了一个靶点T。我们要证明T是$ABDF$的对角线BF与$CDFH$的对角线DH的交

点（在以上描写的涡旋运动里，第二条对角线是第一条的后继者）。证明在技巧上是非常简单的。在上面的描述里，我们想象自己跟着之字形的每一条新的线段转90°。在这里我们还让长方形也转动。我们把一个90°的旋转和按比例1:m的收缩这两个运动结合起来，目的是把长方形$ABDF$放在$CDFH$上，使A走到C，B走到D，D走到F，F走到H。我们能用T作为两个运动共同的中心，把所要的运动非常简单地描写出来。首先，我们把全平面绕T按顺时针方向旋转一个90°角，使得长方形$ABDF$走到新的位置$A'B'D'F'$；参看图5.9。其次我们把平面上的所有点向着T沿着径向按比例1:m收缩，使得$A'B'D'F'$走到$CDFH$。这一对运动叫做平面的变换①，它确实把点A,B,D,F映射到对应的点C,D,F,H。无限次地重复这个复合变换，就生成了整个之字形。

我们证明的第一步在于说明第一个长方形的对角线BF和第二个长方形的对角线DH在点T交于直角。因为$ABDF$和$CDFH$是相似的长方形，所以图5.9上的所有记作α的角都相等。因此，直角三角形BFD与DHF相似

$$\angle BFD = 90^\circ - \alpha = \angle DHF,$$

所以

$$\angle HTF = 180^\circ - [\alpha + (90^\circ - \alpha)] = 90^\circ,$$

BF和DH确实在T相交成直角。因此，如果$ABDF$绕着点T旋转90°，BF就要走到一个新位置$B'F'$，它垂直于原来的BF（参看图5.9），$B'F'$就会包含线段DH。类似地，DH会走到$D'H'$，$D'H'$在BF上。

① 为了找到更多的关于变换方面的知识，可以参看这套丛书里将出版的I.M.亚格龙的《几何变换》。

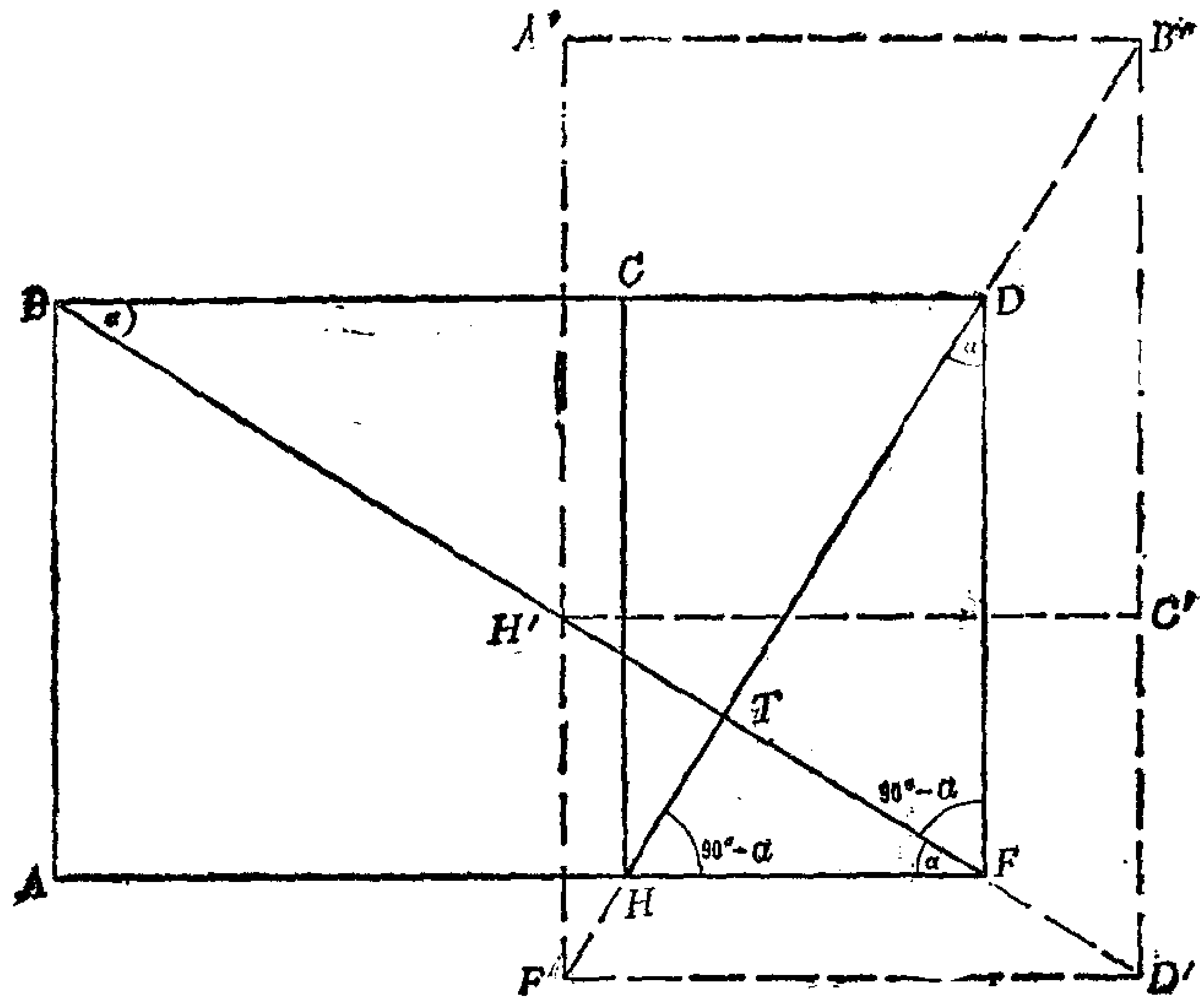


图 5.9

其次，注意到

$$\frac{B'D'}{DF}=\frac{1+m}{1}=\frac{1}{m}=\frac{B'T}{DT}=\frac{D'T}{FT}.$$

此外，因为

$$\frac{A'B'}{CD}=\frac{AB}{CD}=\frac{B'T}{DT}=\frac{1}{m},$$

又因为 CD 和 $A'B'$ 是平行的，很清楚 C 在 $A'T$ 上，而且

$$\frac{A'T}{CT}=\frac{1}{m}.$$

类似地，H 在 $F'T$ 上并且

$$\frac{F'}{HT}=\frac{1}{m}。$$

因此，正如我们开始所要说明的那样，把所有到点T的距离按因子m收缩就把长方形$A'B'D'F'$变成了$CDFH$。

我们的论证只依赖于给定长方形的短边对长边的黄金比m，而不依赖于它们的实际大小。因为在我们的作图里黄金比对所有的后继的长方形都保持，所以以上的证明对所有的长方形都对。这表明点T将始终作为旋转和收缩的中心，它在所有的用我们的方案作图来收缩的长方形之内，因此它是之字形的靶点。

5.8 对数螺线

如果在图5.8里我们象下面那样选取坐标轴和单位，就能对之字形的顶点$A, C, E, G, I, \cdots$求出一个简单的公式。取T作为坐标原点，设r表示到T的距离，把AT选成初始的方向（参看图5.10）。取四分之一周角（转一圈的四分之一＝

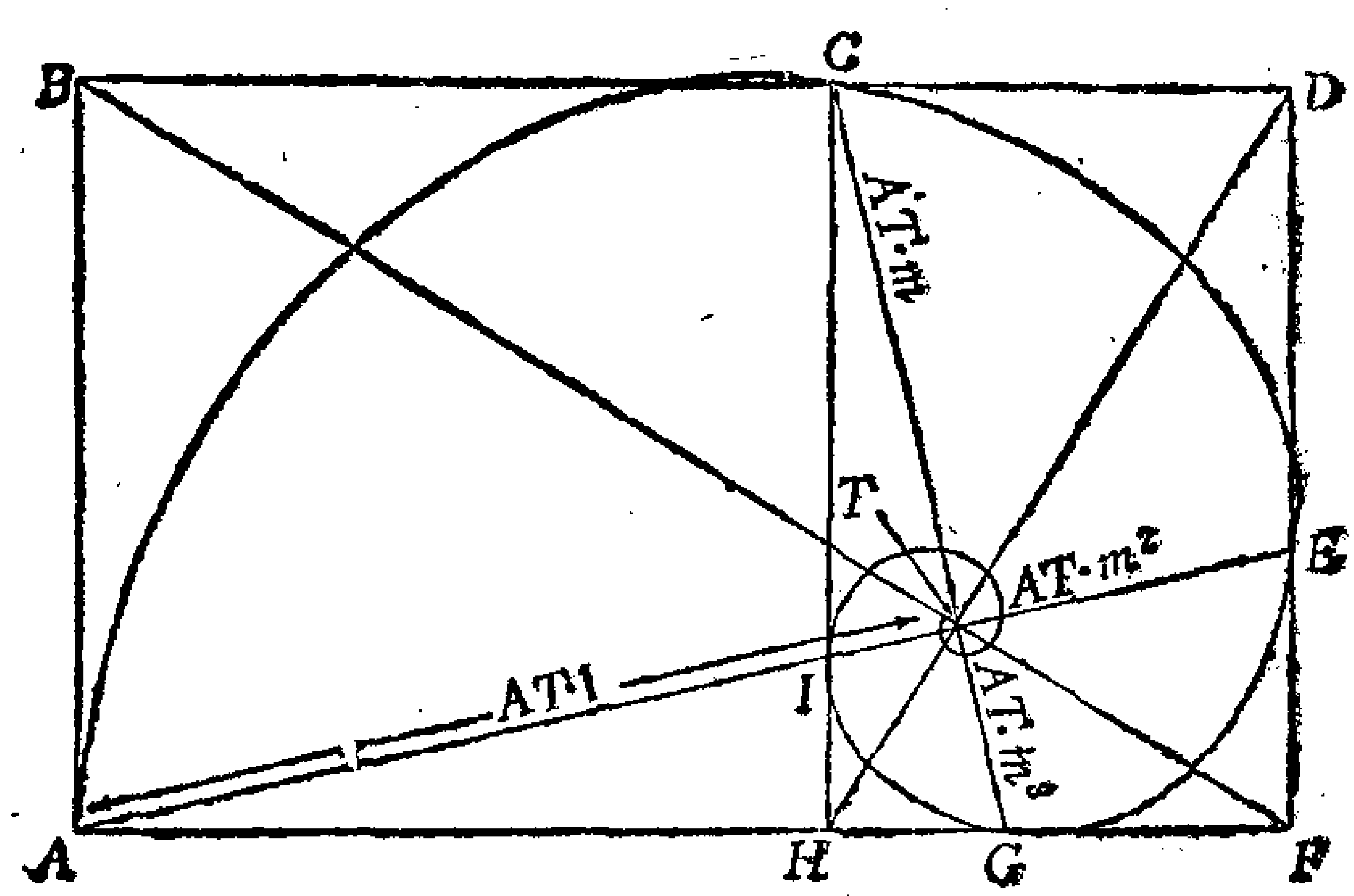


图 5.10

$(\pi/2)$弧度$=90°$）作为角度单位，从 AT 量起，顺时针方向作为正，设 t 表示四分之一周角的个数。顶点 $A, C, E, G, \cdots$ 是把 AT 绕 T 分别旋转 $0,1,2,3\cdots$ 四分之一周角，然后把距离 AT 分别按 $m^0, m^1, m^2, m^3, \cdots$ 收缩而得来的。因此，任意一个这样的顶点到我们的螺线之字形的 T 的距离 r 能写成

$$r = AT \cdot m^t. \tag{5.6}$$

这给出了下面的表：

顶　点	A	C	E	G	I	…
t	0	1	2	3	4	…
r	AT	$AT \cdot m$	$AT \cdot m^2$	$AT \cdot m^3$	$AT \cdot m^4$	…
$\frac{r}{AT} = R$	1	m	m^2	m^3	m^4	…

如果我们把 AT 取成单位长度，那么可以得到一个更简单的公式。设 $R = r/AT$ 我们就能做到这一点。这样，用 R 表示，方程（5.6）变成了

$$R = m^t.$$

如果用算术级数 $0,1,2,3,4,5,6,\cdots$ 的各项逐个地代 t，那末就得到对 R 的几何级数 $1, m, m^2, m^3, \cdots$；所有这些顶点的位置现在都确定下来了，因为 t 是四分之一周角的个数，R 是一个乘在 AT 上的因子。

能够表明，如果现在让 t 取所有正实值（而不仅是整数），那末就得到画在图5.10中的光滑螺线。

习　题

5.11　用 t 的值 $1/2, 3/2, 5/2, \cdots$ 计算螺线的一些中间点。对 t 的其它有理值再求一些点。

5.12 如果 t 也取负值我们会得到什么？R 变成多么大？

一旦曲线画出来以后，它就为我们求出了 m 的所有乘幂；例如

$$m^{1/2}=\sqrt{m} \quad 对应于\ t=\frac{1}{2},$$

也就是 $\frac{1}{2}\cdot$ 四分之一周角 $=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ$；

$$m^{1/3}=\sqrt[3]{m} \quad 对应于\ t=\frac{1}{3},$$

也就是 $\frac{1}{3}\cdot$ 四分之一周角 $=\frac{1}{3}\cdot 90^\circ=30^\circ$；

$$m^{5/6}=\sqrt[6]{m^5} \quad 对应于\ t=\frac{5}{6},$$

也就是 $\frac{5}{6}\cdot$ 四分之一周角 $=\frac{5}{6}\cdot 90^\circ=75^\circ$。

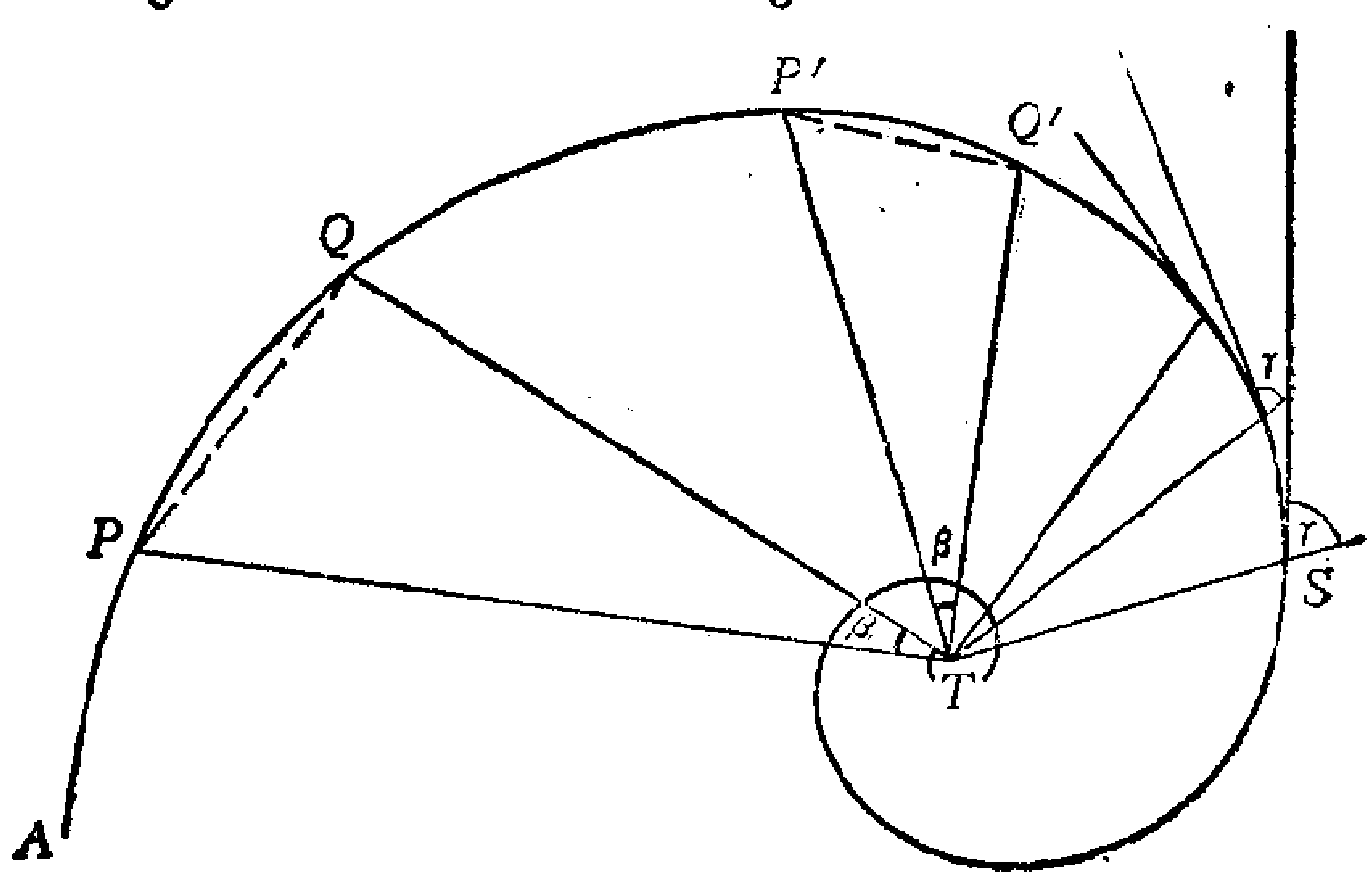


图 5.11

曲线

$$R = m^t$$

叫做等角螺线也叫做对数螺线（在这个情形下，底是不常见的数 m）。只要适当选取常数 c,k,h，方程也能表成其它的标准形式：

$$R = 10^{ct}, \quad R = 2^{kt}, \quad R = e^{ht}.$$

这样做的好处是：10，2和e(≈ 2.718)都是更常用的对数的底。

对数螺线有两个重要性质：

Ⅰ）如果点P,Q和P',Q'在T点对着相等的角(β)，那末三角形PTQ和$P'TQ'$相似；参看图5.11。

Ⅱ）在对数螺线的每一点(S)上，有一条切线，它和径向向量TS成不变的角(γ)。

性质Ⅰ)是容易证明的，把它留作练习。性质Ⅱ）难一些；需要用微积分来定义曲线的切线，必须说明这条曲线到处有切线（在这个情形，只要先说明曲线在某一点有切线，再说明到处有切线是容易的），然后就能证明性质Ⅱ）。

习　题

5.13　解释怎样能用图5.11上的曲线来作数的乘法(相当于一个对数表)，如果这些数用一个支点在T的直尺上的长度来表示，而且如果我们能够测量并且作适当的角的加法的话。

5.14　曲线的什么性质对应了对数的首数和尾数？

5.15　通过绘制曲线并且用量角器测量，验证在每点(S)，曲线的切线和径向向量TS作成一个大约73°的角[精确地是 $\arctan((\pi/2)\log\tau)$]。

5.9 五边形

也许因为数学家们努力工作，数学学科经常给他们奖赏。倾盆大雨般的黄金长方形生成了对数螺线，在逼近黄金中项

$$m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

的一个序列里出现了斐波那契数，这些都是愉快而又意外的发现。

另外一个这种类型的奖赏是：m还是正五边形的一条边和它的对角线的比值。在图 5.12(a)里，令相等的对角线 $P_1P_3, P_2P_4, P_3P_5, P_4P_1, P_5P_2$是单位长度；那末每条边是$m$。下面是证明。

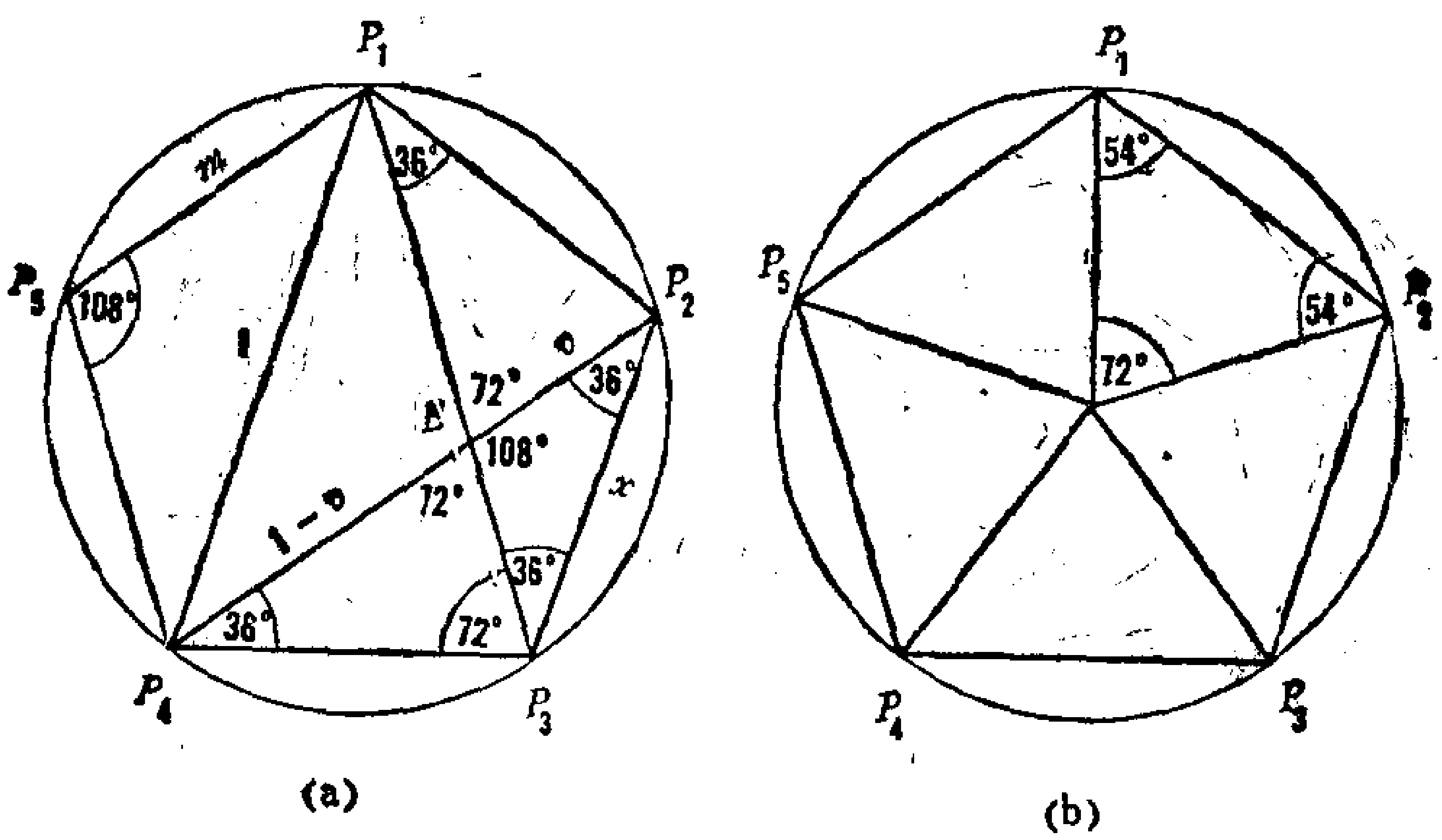


图 5.12

我们用外接圆上的弧$P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_5P_1$相等这一条件来定义正五边形。它蕴涵了弦 $P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_5P_1$相等。每条弧取五分之一圆周，对着一个$2\pi/5$弧度或者 72°的中心

角；参看图5.12(b)。这里有五个全等的中心等腰三角形，它们的角度是54°,54°和72°，因此五边形的每一个顶角是108°。因为三角形$P_1P_2P_3$，…[参看图5.12(a)]是等腰三角形，所以它们的底角是

$$\frac{1}{2}(180^\circ-108^\circ)=36^\circ;$$

$$\angle P_2EP_3=180^\circ-2\cdot36^\circ=108^\circ,$$

并且

$$\angle P_1EP_2=72^\circ.$$

下面是证明的实质性部分。我们首先发现在图5.12(a)里的三角形EP_2P_3和$P_3P_4P_2$有角36°,36°和108°；它们是等腰且相似的。把EP_2表示为v，P_2P_3表示为x。记住$P_2P_4=1$，我们写出比例式

$$\frac{v}{x}=\frac{x}{1}; \qquad \text{因此} \quad v=x^2.$$

其次我们容易发现三角形EP_4P_3的角是72°,72°,36°；所以这个三角形是等腰的，并且

$$EP_4=1-v=x \quad \text{或者} \quad v=1-x.$$

因此

$$x^2=1-x.$$

因为m是这个方程的正根，我们已经表明了正五边形的边和对角线的比值是m。证毕。

5.10 五边形的亲属

希腊人从研究五边形里面得到了两个奖赏。首先，十二面体以及（多少更微妙一点的）二十面体与五边形有关，也

与黄金长方形有关。在图5.13和5.14可以看到它们，但是我们不作进一步的讨论，因为这会把我们引向立体几何。（细节是不难的，我们鼓励读者参考前面提到过的科克瑟特和加德纳的论文。）

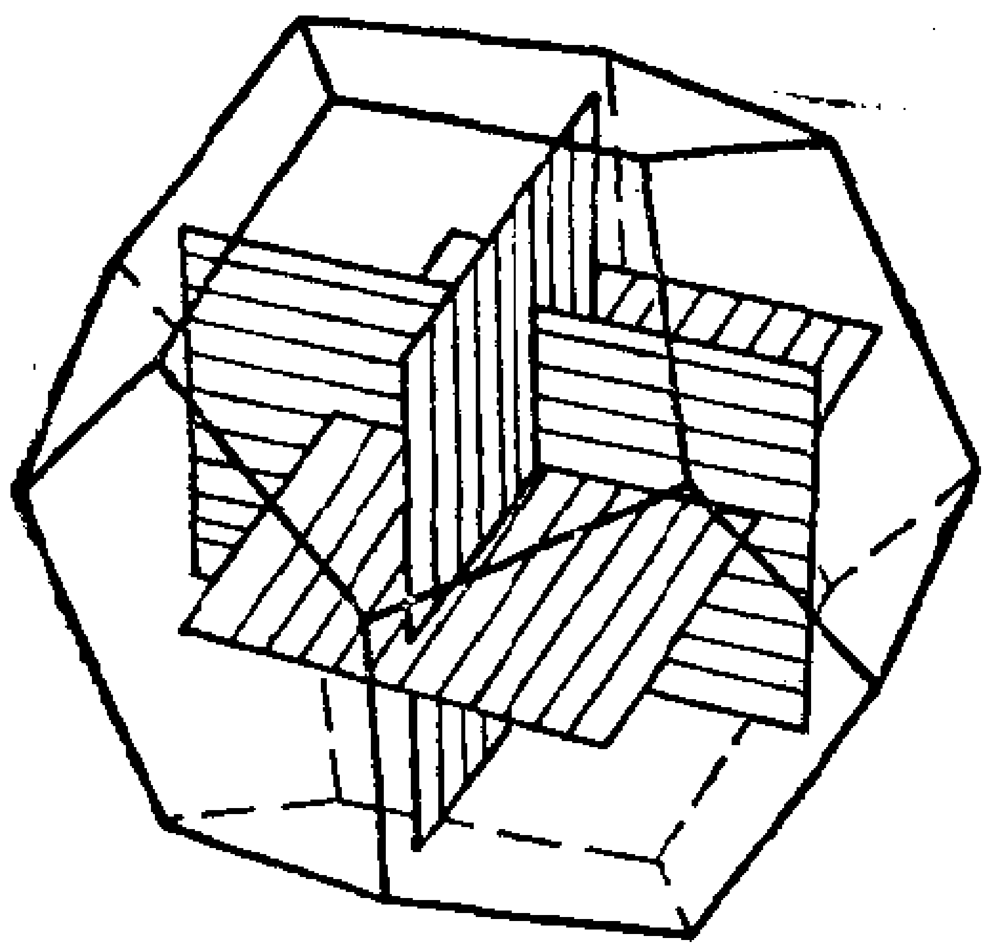


图5.13 正十二面体
（12个面，30条棱，20个顶点）

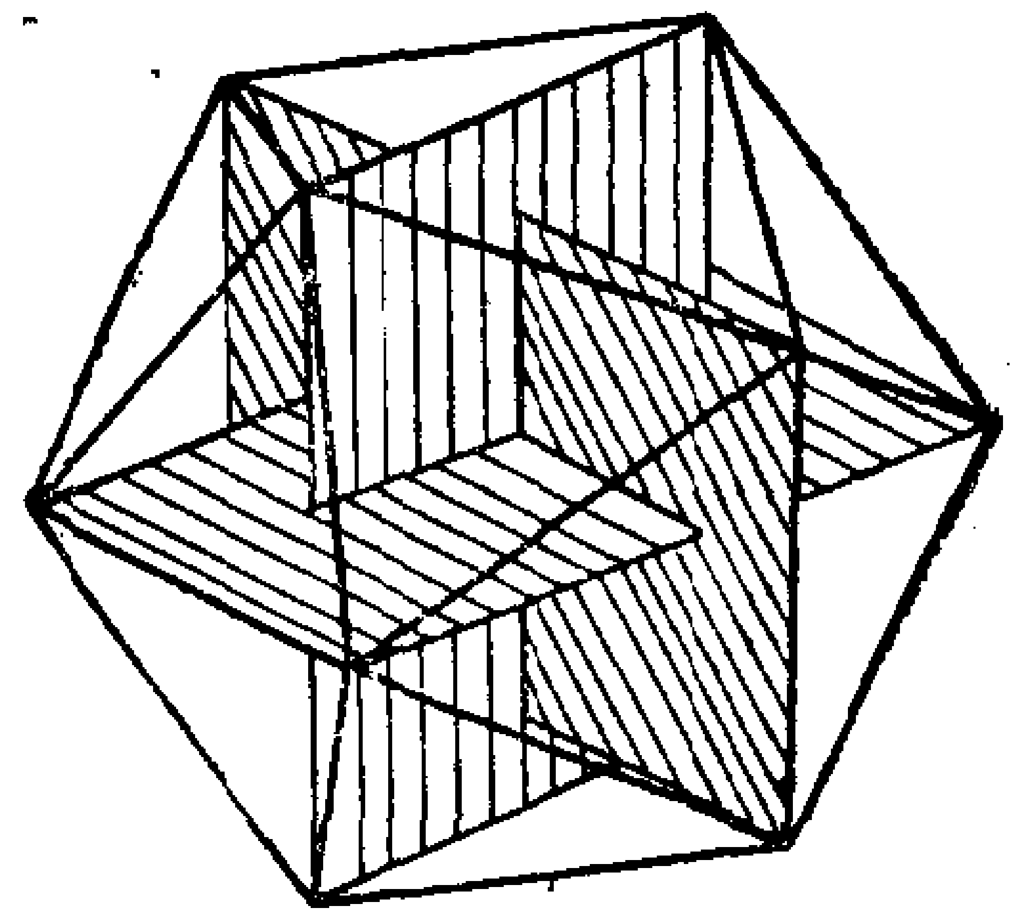


图5.14 三个黄金长方形的角和一个正二十面体的角重合（20个面，30条棱，12个顶点）

其次，希腊人发现了五角星并把它看成是非常有吸引力的；参看图5.15。毕达哥拉斯的信徒们把它用来作为俱乐部成员的徽章而且还附上象征的数。很容易看到，它使人意识到一个无休止的运动。从数学观点看来，它是一个很形象的周期为五的（恒同地重复它自己）平面旋转，但是又不同于更普通的和五边形相联系的旋转，这一点是特别有意思的。

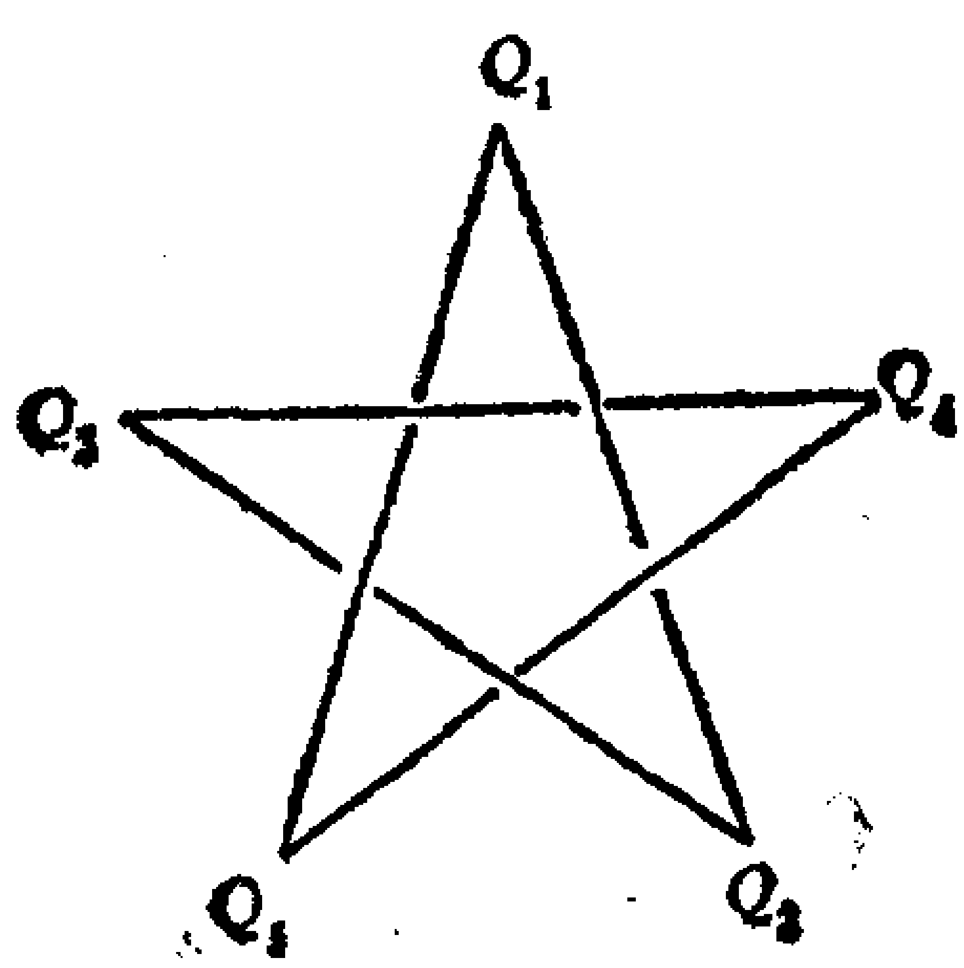


图 5.15

读者会注意到图上的上下交通使人有点儿联想到现代高速公路的三叶草式的交叉图解。这种上下画法在数学里是一

个现代的表示结的方法。如果五角星真的是用线做的，就会发现打了一个结。无疑是最纯粹的巧合。试用一条纸带打上一个结，能够做成一个非常好的五角星（事实上，从理论上说是一个精确的五角星）；图5.16里的图解说明了怎样去做。如果这样做了，然后举到亮光下，就可以看到五角星的形象。

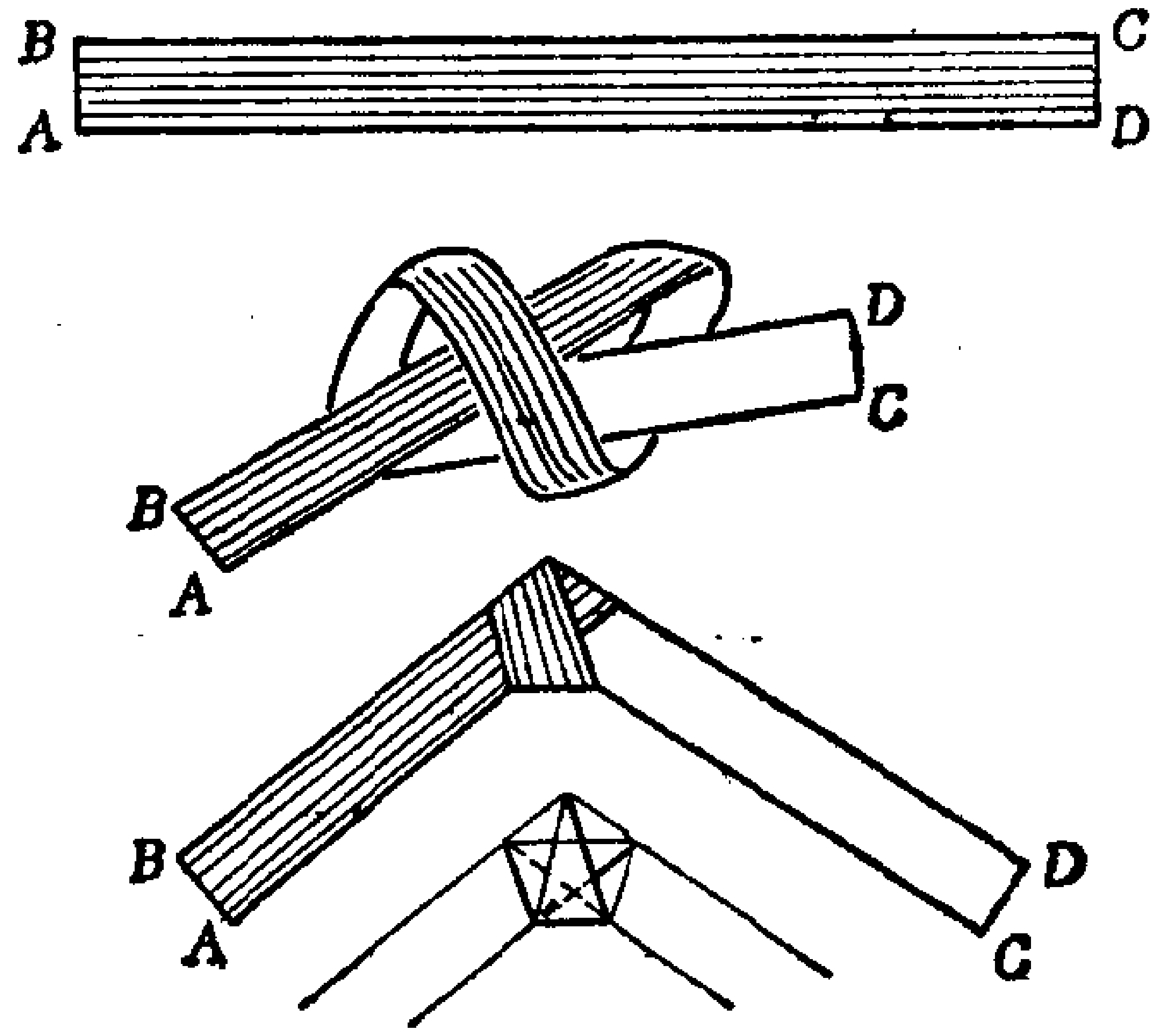


图 5.16

第六章　作图和证明

最后这一章包含了很多和本书前面相同的材料，但它是用不同的线索组织起来的。这里的重点是作图和证明；“作图”一词是在广义下使用的，它包含了无限过程的定义。同时，我们在这一章里将解决一些命题，它们回答了前面提到过的一些问题。

6.1　间接证明

这本书里已经有一些间接证明的例子了，它也叫做反证法。我们使用这个手段说明了$\sqrt{2}$是无理数，也说明了黄金中项是无理数。在这里，我们给这个最重要的技巧一个更简单的范例。

断言　不存在任何一对整数(正或负)满足

$$4x+6y=15.$$

证明　用反证法。假定有这样一对整数；把它们叫做m和n。那末

$$15=4m+6n=2(2m+3n).$$

这就断言了15是一个偶数(除以2的商是$2m+3n$)，它是假的。这就结束了证明。

习　题

6.1　接受$\sqrt{2}$是无理数这一事实。从这个事实证明$(1+\sqrt{2})$的倒数也是无理数。

6.2　设a和b是整数，证明当且仅当一个整数c可被a和b的最大公因数除尽的时候，c才能够通过适当的x

与 y 表示成$ax+by$的形式。因此，例如方程

$$12x+18y=c$$

只有当 c 可以被 6 整除时，才有整数解 x 和 y。

6.2 欧几里得几何关于平行线比例分割的一个定理

假设 t 和t'是两条直线（称作横断线），它们切割三条平行线l_1, l_2, l_3中的每一条，如图6.1所表示的那样。

结论 从 t 和t'上被三条平行线切下来的线段的长度是成比例的，也就是说，

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

例 检查图6.1中的格线，说明

$$\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4},$$

类似地

$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{3}{4},$$

证实了定理。

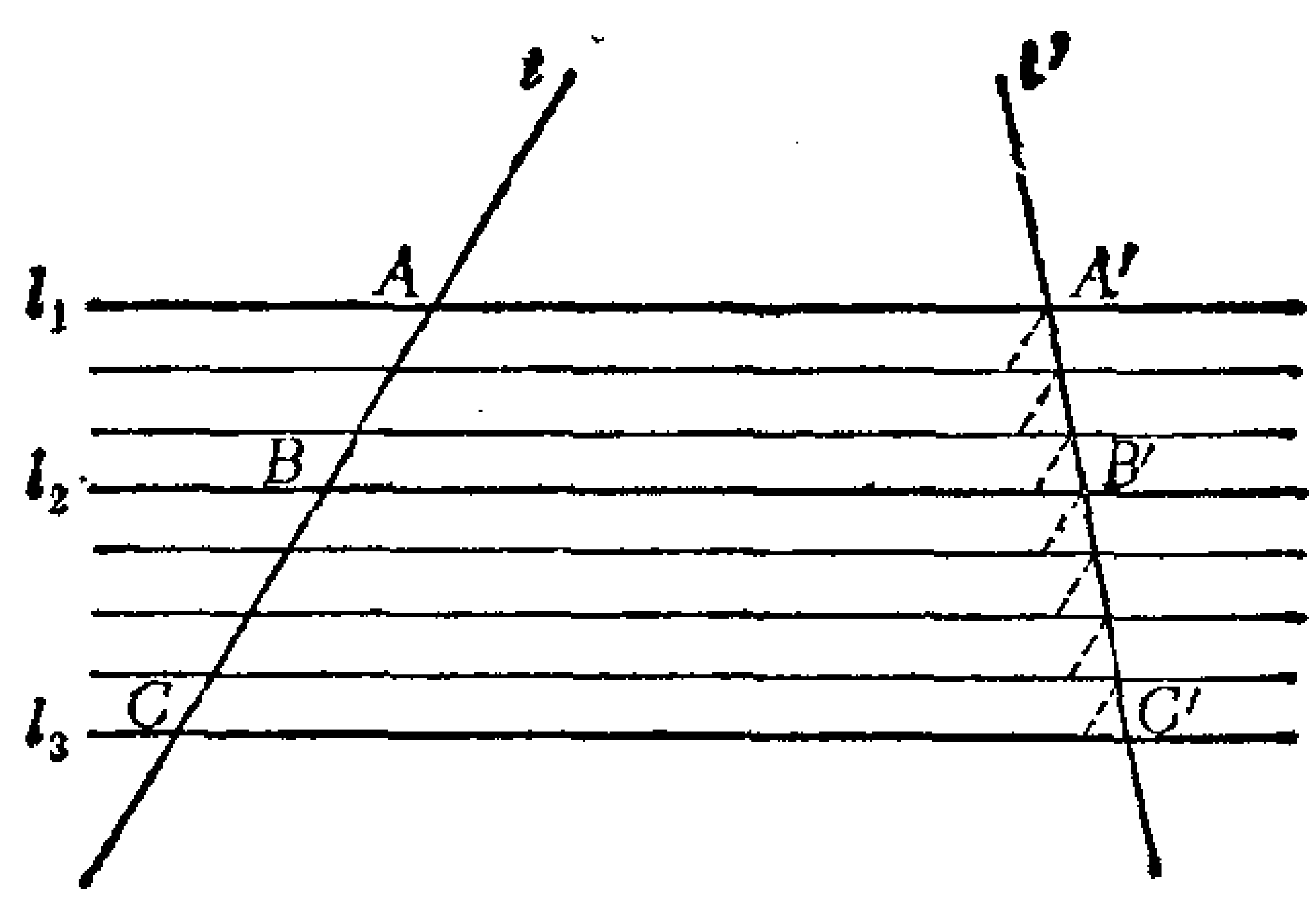


图 6.1

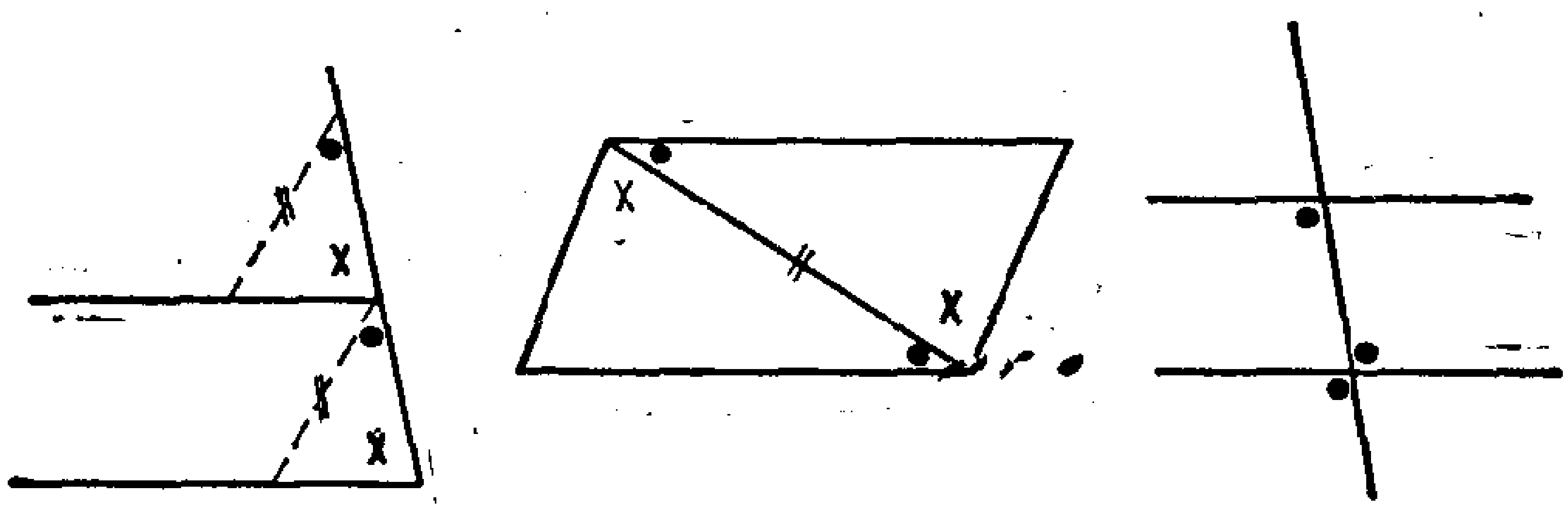
证明 在一般有理数情形，也就是说当AB/BC是整数的比，譬如说m/n，这个例子就是一个具体的实现。

a) **有理数或者可约情形** 在有理数情形使 l_1, l_2, l_3 成为一个格线系统的一部分，这个格线系统显示了比 m/n. 把AB分成m 个相等的区间，把BC 分成 n 个相等的区间，然后在分点作平行线。

为了证明比m/n现在转移到了t'上，我们必须说明右边

的线段都相等。

为了这个目的，作一些辅助线，使它们都平行于 t 并且当把每一条辅助线和 t 上对应的线段合起来时，它构成了平行四边形的一边，当把它和 t' 上对应的线段合起来时，它又形成三角形的一边。现在容易证明所有这些三角形都是全等的；它依赖三种初等命题：i）两个三角形如果有一条边相等，而且一个三角形的所有的角和另一个的对应角都相等，它们就全等；ii）平行四边形的对边相等；iii）一条横断线和两条平行线作成的对应角相等。参看图6.2。



(a) (b) (c)

图 6.2

b）不可约情形 利用连续性的证明 当 AB/BC 不是有理数，刚才说的方法是不适用的。例如，现在假定 AB/BC 是我们熟悉的黄金比 $(\sqrt{5}-1)/2$。取斐波那契比 u_n 的序列为

$$u_n = \frac{f_{n-1}}{f_n} \quad n=1,2,3,\cdots,$$

在这里 $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$，序列 f_i 的前面一些项是 $f_1=1$，$f_2=1$，$f_3=2$，$f_4=3$，$f_5=5$，…。可以表明，当 n 越来越大时，这些斐波那契比 u_n 趋近于黄金比 m①。用符号表示是

① 这个提法的证明可以参看C.D.奥尔德斯，连分数，北京大学出版社，1985.

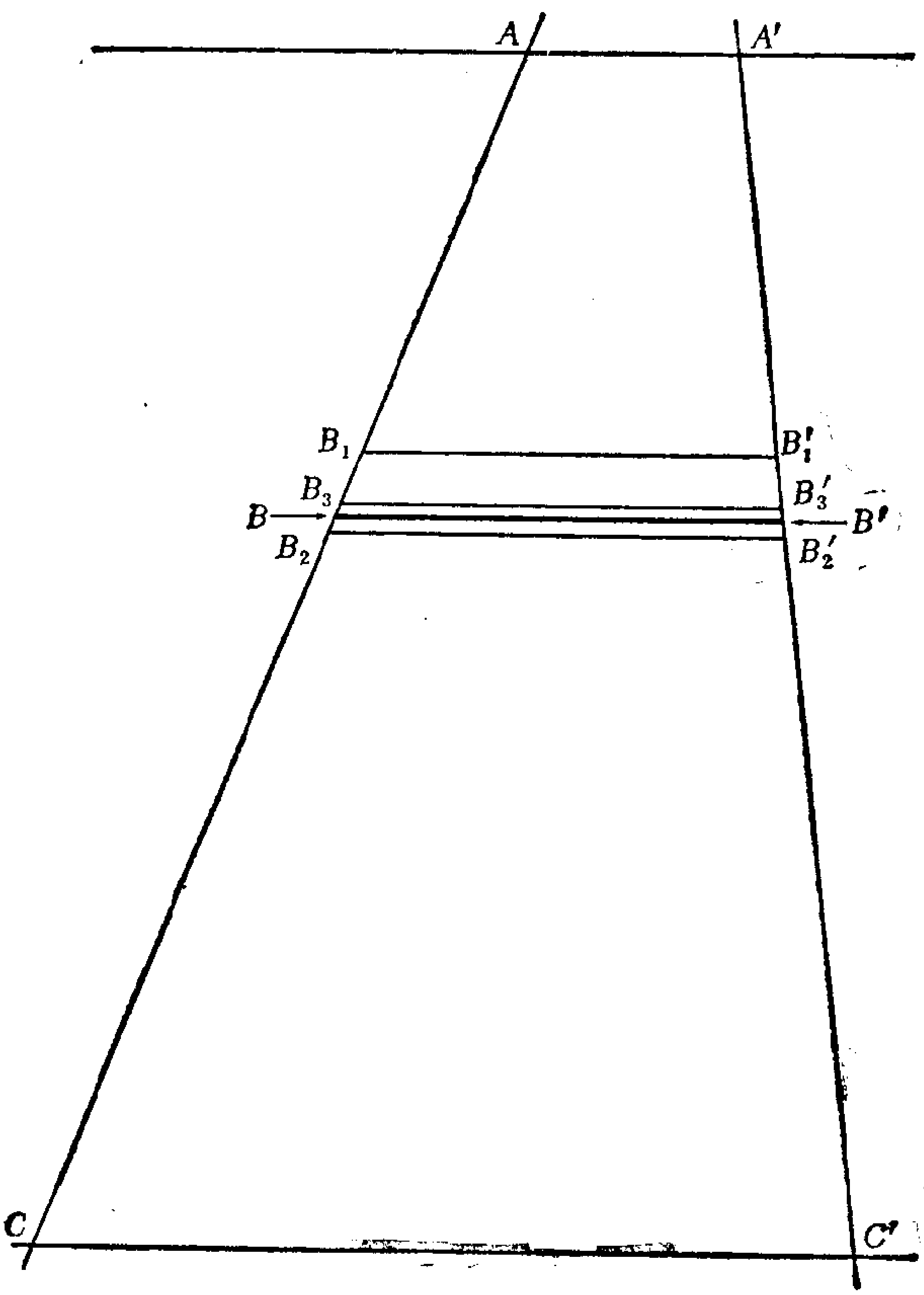


图 6.3

$$\lim_{n\to\infty} u_n = m.$$

现在，让线段AC的端点A和C不动，我们在这个线段上作点的序列B_n，使得对每一个n

$$\frac{AB_n}{B_nC}=u_n;$$

那末B_n趋近于B，比u_n趋近于m。在每个B_n作一条BB'的平行线(参看图6.3)，这样在$A'C'$上得到一个点B'_n。

从有理数情形得

$$\frac{A'B'_n}{B'_nC'}=u_n;$$

因此，当n增加时，这些比趋近于m。剩下我们要证明B'是所作的序列$B'_1, B'_2, B'_3, \cdots$的极限，直观上这是很明显的事实。

把它看成是一个"直观的事实"的理由是我们从图6.3得来的真实印象(在数学里直观总是受到尊重的，但并不过份强烈地依赖它)，也就是因为线段AB_n趋近于线段AB，变点B'_n随着B_n变，使得线段$A'B'_n$趋近于线段$A'B'$。这个事实的另一个说法是点B'_n随着B_n连续地变。我们将要说明，如果点B'_n趋近于一个极限，这个极限一定是B'。因此，为了要证明连续性，我们需要一个能推断极限的存在性的几何原理(不在毕达哥拉斯的几何里)。这个原理就是本书前面讨论过的波尔察诺-维尔斯特拉斯原理。

利用这个原理我们发现序列$B'_1, B'_2, B'_3, \cdots$确实有一个极限点；暂时把它叫做B''。B''是两个序列的极限点，其中一个序列在$A'B'$上，是$B'_1, B'_3, B'_5, \cdots$，另一个在$B'C'$上，是$B'_2, B'_4, B'_6, \cdots$。由此推出B''在两条线段$A'B'$和$B'C'$上；但是它们唯一的公共点是B'，因此$B''=B'$。这就在比值给定是m的情形下证明了定理。但是我们除了用到m是一个有理数序列的极限，以及这个序列从上面和下面趋近于它以外，

并没有用m的其他特殊性质。这对所有实数都是真的，因此这个证明完全具有一般性。

c）不可约情形　反证法　希腊几何学家们没有用刚才描述的那个连续性证明，而是依靠一个间接的论证。假设这个论断是假的，也就是说，或者

$$\frac{AB}{BC}>\frac{A'B'}{B'C'},\quad \text{或者}\quad \frac{A'B'}{B'C'}>\frac{AB}{BC}.$$

下面说明这个假设导出一个矛盾来。

让我们首先假设

$$\frac{AB}{BC}>\frac{A'B'}{B'C'},$$

那末有一个有理数$r=m/n$（m和n是整数），使得

$$\frac{AB}{BC}>r>\frac{A'B'}{B'C'}. \tag{6.1}$$

设D是在t上A和C之间的一个点，使得

$$\frac{AD}{DC}=\frac{m}{n}$$

（参看图6.4）。那末D在A和B之间，否则AB/BC就会小于或者等于r。通过D作一条直线l_4和l_2平行；它与t'相交于D'。现在D'在A'和B'之间，因为否则平行线段BB'和DD'就会相交。因此

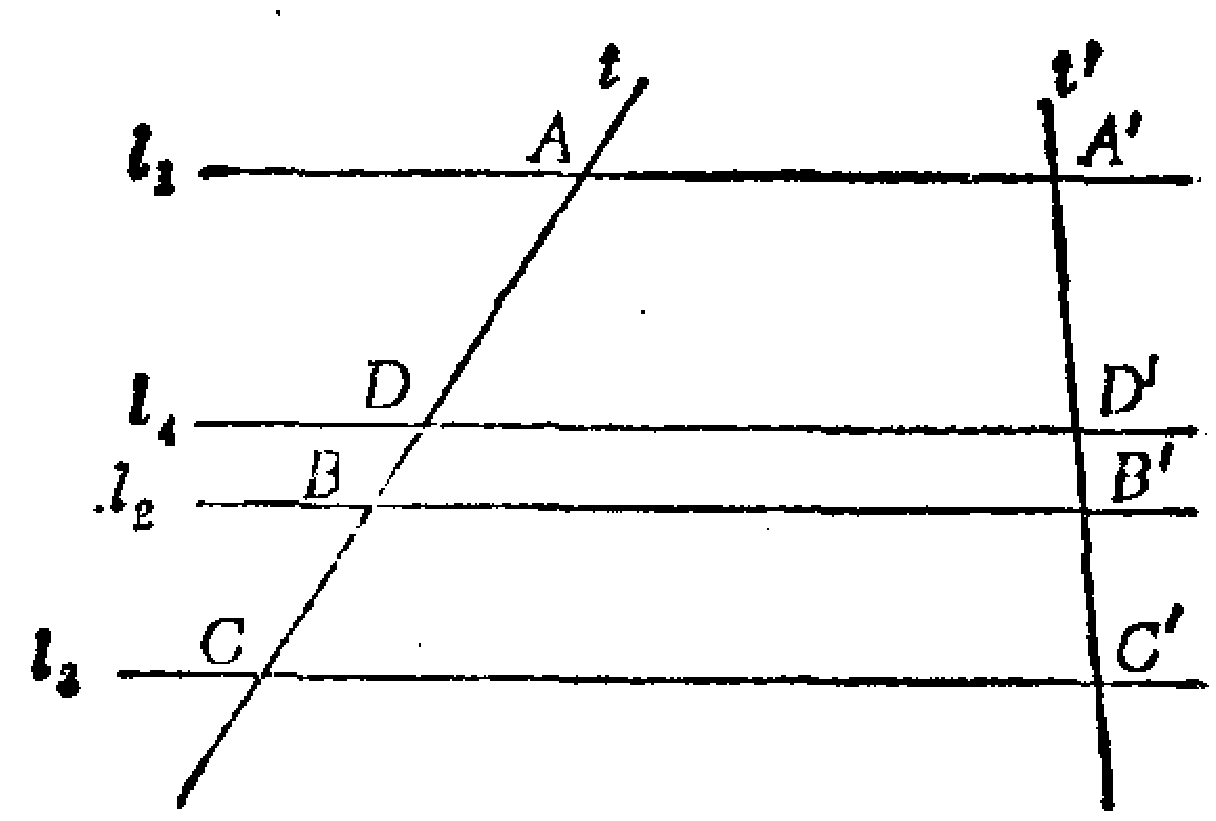


图 6.4

$$\frac{A'B'}{B'C'}>\frac{A'D'}{D'C'}.$$

但是根据我们从有理数情形所了解的结论，

$$\frac{A'D'}{D'C'}=\frac{AD}{DC}=r, \qquad \text{因此} \frac{A'B'}{B'C'}>r,$$

它与不等式(6.1)矛盾. 这样，假设

$$\frac{AB}{BC}>\frac{A'B'}{B'C'}$$

导出一个矛盾，因此它是假的.

类似地我们可以说明假设

$$\frac{A'B'}{B'C'}>\frac{AB}{BC}$$

导出一个矛盾. 因此

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

6.3 递推定义

对于一个数学对象的序列

第一个对象，第二个对象，第三个对象，…，

只要当说明每一个新的对象的时候，利用了前面一个已经定义了的事实，就称这个序列是递推构造的. 例如，考虑 x 轴上的点的序列

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots, \qquad (6.2)$$

它们的坐标S_n满足以下条件

$$\begin{aligned} &S_1=1, \\ &S_n=S_{n-1}+\frac{1}{n}, \qquad n=2,3,4,\cdots. \end{aligned} \qquad (6.3)$$

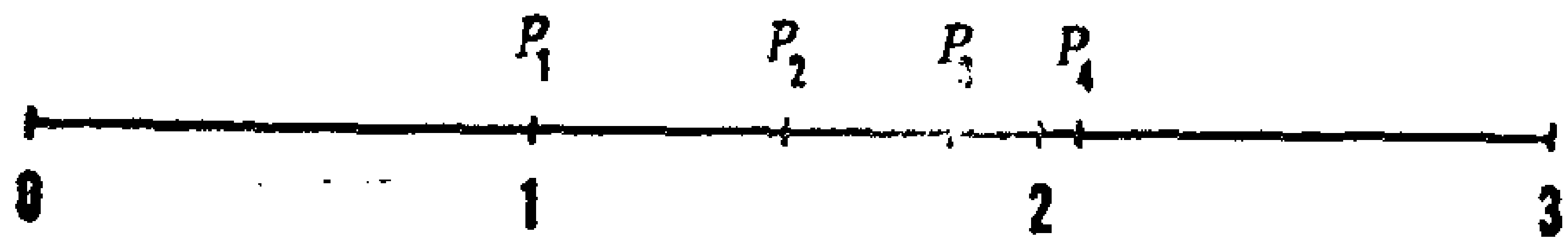


图 6.5

作为对比，注意 x 轴上点的序列

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \cdots, \tag{6.4}$$

它们的 x 坐标 a_n 定义成

$$a_n = n^2, \tag{6.5}$$

这些点是互相独立的；也就是说，我们能从公式(6.5)求 Q_5，用不着先求 Q_4。为了求出 P_5，根据(6.3)我们要先求出 P_4（图6.5）。

假定我们的熟人中有一个芝诺式的哲学家责难我们："(6.3)究竟定义了一个无限序列没有？"他可以说："我承认 P_1 是定义了的，而且 P_2 是定义了的，而且 P_3 是定义了的，而且你有耐心去作的那么多个点都是定义了的，但是不会更多。因此(6.3)只不过表明了怎样去作一个很大的有限序列而已。"数学家们毫不犹豫地把(6.3)看成是序列(6.2)对所有 n 的值的一个定义，也就是 $n=1,2,3,\cdots$，就好象他们接受(6.5)是序列(6.4)对所有 n 的值的一个定义一样。读者会回想起，在第四章后面一些之字形也使用了这个递推构造法。第五章中盘旋的长方形及之字形也一样，我希望读者在那里已经把它们作为很自然的过程接受下来了。

为了稍微充分一点阐明这件事，可以用语言来解释(6.3)。它包含两部分。第一步，也就是第一个数是1。以下的步骤是事情的核心：你现在在某一步，已经算出了某一个数。为了计算下一个数，你只要把这个数与步数的倒数加起来就行了。

注意每次使用过这个连续的归纳以后并不丢掉它；相反地，对下一步它永远是适用的。最后注意到，这个连续的归纳对应了给定自然数的方式：第一步——第一个数是1。下一步——下一个数比你现在有的那个数多一。

因此(6.3)建立了一个序列(6.2)的点和自然数的一一对应。这正好就是公式(6.5)对序列(6.4)所做的；(6.3)和6.5)是作一个序列的同样有效的方法。

在本节的最后，我们提及一些有趣的递推公式。数学里，最重要的递推定义的序列之一是

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040,$$
$$40320, 362880, 3628800, \cdots.$$

这是一个叫做“$n!$”的序列(读作“n阶乘”)，它是这样定义的：

$$1! = 1$$
$$(n+1)! = (n+1)\text{乘}n!, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

递推定义的概念包含了更一般的情况。例如，斐波那契级数用下面的条件来递推定义

$$f_1 = 1,$$
$$f_2 = 1;$$
$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots.$$

类似地，能够用这样的条件递推地定义一个序列

$$b_1 = 1,$$
$$b_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$b_3 = 1 + 1 + 2 = 4,$$
$$b_4 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8;$$
$$b_n = 1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots.$$

习　题

6.3　你能识别最后这个序列吗？

6.4　归纳法

用数学归纳作的形式证明有两个显著的路标，第一步和归纳步。因此它的构成完全象一个递推构造法，而且由于同样的理由，它是一个用表面上有限的形式安排成的一个断言的无限序列。让我们考虑一些例子并且在后面讨论一般原理。

例 1　断言：对任何值 $n=1,2,3,\cdots$ 整数 $1+4^n$ 不能被 3 整除。

用数学归纳法的证明　第一步：这个断言对 $n=1$ 是真的，因为 $1+4=5$ 不能被 3 整除。第一步证完了。

归纳步：如果这个断言对某个整数 k 是真的（也就是说，如果 $1+4^k$ 不能被 3 整除），那末它对整数 $k+1$ 也是真的（也就是说，$1+4^{k+1}$ 也不能被 3 整除）。下面是归纳步的证明。注意，因为 $4^{k+1}=4\cdot 4^k$，所以

$$
\begin{aligned}
(1+4^{k+1})-(1+4^k)&=4^{k+1}-4^k\\
&=4^k(4-1)=3\cdot 4^k.
\end{aligned}
$$

这说明 $(1+4^{k+1})$ 和 $(1+4^k)$ 的差能被 3 整除；因此其中一个能被 3 整除，当且仅当另一个能被 3 整除①。但是因为 $1+4^k$ 不能被 3 整除（根据归纳步的假设），由此得出 $1+4^{k+1}$ 也不能被 3 整除。这就是归纳法的结论，从而它已经被证明了。

---

① 如果 $a-b=3s$（s 是整数），那末 $a=b+3s$，和 $b=a-3s$。它推出 a 能被 3 整除，当且仅当 b 能被 3 整除；b 能被 3 整除，当且仅当 a 能被 3 整除。

习 题

6.4 回忆定义：整数 n 模一个整数 q 有余数 r 的意思是当 n 被 q 除时 r 是余数。证明“3 的规律”：一个整数 N 与它各位的和模 3 有相同余数；例如，47 158 和$25=4+7+1+5+8$都模 3 有余数 1。

6.5 归纳证明：

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),\quad n=1,2,3,\cdots.$$

例 2 断言(正如检查乘法表所提示的那样)

$$(1+2+\cdots+n)^2=1^3+2^3+\cdots+n^3,$$
$$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

证明 第一步：当 $n=1$，左端是 $1^2=1$ 并且右端也是 $1^3=1$。

归纳步：假设 k 使

$$(1+\cdots+k)^2=1^3+\cdots+k^3, \tag{6.6}$$

让我们研究

$$(1+\cdots+k+k+1)^2. \tag{6.7}$$

它有形式$(A+B)^2$，其中 $A=1+2+\cdots+k$，且 $B=k+1$。用$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，我们从(6.7)得到

$$(1+\cdots+k)^2+2(1+\cdots+k)(k+1)+(k+1)^2.$$

如果把习题 6.5 里要证明的公式用到中间项 $(n=k)$，我们有

$$(1+\cdots+k)^2+[k\cdot(k+1)](k+1)+(k+1)^2.$$

现在注意最后两项有一个公因子$(k+1)^2$。如果把项合并，这给了我们

$$(1+\cdots+k)^2+(k+1)^3. \tag{6.8}$$

到现在为止，还沒有用到假设(6.6)；如果现在把它用于(6.8)，就变成了

$$1+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3. \tag{6.9}$$

换句话说，表示式(6.7)已经变成了(6.9)。这完成了归纳步的证明，即如果我们的断言对一个整数k成立，那么它对$k+1$也成立；归纳法的证明现在已经完成了。

这些证明的逻辑是清楚的。为了证明某个提法的无限序列中的每一个都是眞的，方法是证明我们能一个接一个地无限地往下走，并且始终沒有找到一个是假的。我们从第一个开始以便确认沒有漏掉任何一个。

可惊的事情是看上去好象只做了一步(归纳步)，就把所有的事情都做完了，但是事实上这是一个不断的步骤，它一成不变地一次次地用"如果…，那末…。"的证明技巧；以上确实有无限多个论证，每做一步就是一个论证。

我们用来说明$\sqrt{2}$是无理数的最小整数原理和用来说明黃金中项m是无理数的无限下降原理，都和数学归纳法的证明密切联系。用一种形式取代另一种形式，重述一遍证明只需要化不多的一点功夫。我们把这些考虑留给勤奋的读者①。

6.5 应用于一个证明

对所有的n，前面n个连贯的正整数的和是$n(n+1)/2$，下面是关于这个事实的一个有效证明。我们在习题6.5里提到过它。我们鼓励读者把下面的证明解释成一个递推定义和

① 参看柯郎德，罗宾斯著，齐植来译，近代数学概观，中华书局，1951。第一章关于数学归纳法的讨论。

归纳证明的实例。

设

$$S=1+2+3+\cdots+n.$$

那么 S 也可以写成

$$S=n+n-1+n-2+\cdots+1.$$

把两个表达式加起来，得到

$$2S=n+1+n+1+n+1+\cdots+n+1=n(n+1).$$

因此

$$S=\frac{1}{2}n\cdot(n+1),$$

对 $n=1,2,3,\cdots$都成立。据说这个论证被高斯（Gauss，1771—1855）九岁时独立地想出来过。

6.6 快增序列

下面是把阿基米德做过的一个计算和几千年来讲给孩子们听的故事结合起来的一个稍微近代一点的故事。

假设在1750年有一对蚊子躲藏在新泽西州，并且假定它们随后不断繁殖，每年数量增加一倍。到1760年，就会有这一对蚊子的2^{10}个后代；这大约是10^3，并不是很多的。到1770年，它们有了2^{20}个子孙，这个数目超过了10^6，或者说一百万。到1800年，这个数目就会是2^{50}，它超过了一万兆(10^{16})。到现在为止数量就是2^{210}，它超过了10^{63}。

我们给一点这个数意味着什么的概念（1后面跟着63个零说来容易，理解起来难），让我们假设一百万个小蚊子钻进了一个每边长一英寸的小盒子里。这就要有10^{57}个盒子。用这些盒子，仔细地把它们堆积起来，我们可以做成一个大方块，每边10^{19}个盒子，当然每边就会是10^{19}英寸长。它超

过10^{14}英里长。太阳到地球的距离只有大约90 000 000英里，或者说小于10^8英里，冥王星是在距离小于$4\cdot10^{10}$英里的地方。因此，如果把太阳放在这个盒子的中央，甚至冥王星都会深深地落在里面；事实上，这个盒子里的空间超过了

$$(10^3)^3=10^9=\text{我们太阳系的十亿倍。}$$

让我们设想数 1,2,3,4,…以及数 2,4,8,16,32,64,…代表了某个人口增长的一连串普查记录；那末第一个序列越来越大沒有极限，但是第二个序列增长得比第一个快得无可比拟。

我们把这个想法给成一个数学形式，然后看看能证明什么。表6.1表明了这两个序列以及对应项的比(我已经把这些比的分数部分都舍掉了，从而把它们都变成了整数)。

表 6.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
$\frac{2^n}{n}$	2	2	2	4	6	10	18	32	56	100	186

表6.2指出 2^n永远大于 n，从第四项起，2^n大于 n^2，从第10项起，2^n大于 n^3。

表 6.2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331

在这里，数学归纳法有了一个新花样。我们能说对所有

的 n（大于零），2^n超过 n，但不能说对所有的 n，2^n 超过 n^2。我们可以猜测出下面的定理。

定理 1 对所有的大于零的 n，2^n超过 n。

定理 2 对所有的大于 4 的 n，2^n超过 n^2。

定理 3 对所有的大于 9 的 n，2^n超过 n^3。

在继续作更多的猜想之前，我们谈谈证明。我们面前的问题是：一个人能不能用数学归纳法，即使他不想从$n=1$开始，而是从 $n=4$，或者 $n=10$，或者从更后面的位置开始？

回答是能够的。理由很简单。任何一个关于序列 $N+1$，$N+2, N+3, \cdots$的提法能立刻翻译成一个对所有的 n，关于序列 $N+n$ 的提法。这就结束了论证。

为了说明这个论证，考察定理 2，并且把它重写成：对所有的整数 n，2^{n+4}超过$(n+4)^2$。你是否同意如果定理 2 是真的，新的提法对所有 n 也是真的？

习　题

6.6 根据这个程序重新阐述定理 3。

定理 1 的证明是非常简单的。第一步是对 $k=1$ 检验这个说法，它是真的。

现在是归纳步：设 k 表示一个整数，对它来说 2^k 超过 k。那末2^{k+1}超过 $2k$，并且因为 $2k$ 至少和 $k+1$ 一样大，从它推出2^{k+1}超过$k+1$，这就结束了证明。

定理 2 的证明只稍难一点；它利用$(n+1)^2=n^2+2n+1$这个事实。你会看到证明是很有意思的，因为归纳步的序数和第一步的序数大小颠倒了。

第一步，当 $k=5$，2^5超过5^2是真的。

对于归纳步，假设k是一个使2^k超过k^2的整数。那末2^{k+1}超过$2k^2$。现在，当k超过4时，k^2超过$4k$，$2k^2$超过k^2+4k；k^2+4k超过k^2+2k+2；k^2+2k+2超过$(k+1)^2$。这样我们就证完了。

习　题

6.7　说明定理2里的归纳步当k超过2时都是成立的。解释为什么这个事实不能让你证明对所有大于2的n，2^n超过n^2。

定理3的证明稍难一点，因为我们需要二项式定理

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1.$$

从这个容易作出结论，只要n超过3，$2n^3$就超过$(n+1)^3$。然后我们就能证明当n超过3时定理3的归纳步，但是当$n=4$时第一步是假的，我们必须从n超过9的情况开始。

虽然我们已经说明了怎样证明定理3，我们还是要用这个证明里所用的标准的代数符号重做一遍。“超过”一词用符号“$>$”代替。

定理3的第一步：对$k=10$，$2^{10}>10^3$。

归纳步：如果$2^k>k^3$，并且$k>9$，那末

$$\begin{aligned}2^{k+1}>2k^3=k^3+k^3>k^3+9k^2&>k^3+3k^2+6k\\&>k^3+3k^2+3k+3\\&>k^3+3k^2+3k+1\\&=(k+1)^3.\end{aligned}$$

这就完成了归纳步，也就完成了定理的证明。

能够猜测定理4, 5, 6, …，但是较难证明，因为它们需要关于二项式定理的更多的知识。尽管如此，我们还是应该去

谈它们，而且用一般的形式，因为我们要证明的是一个定理的无限序列，它依赖于一个整数，每一个定理又依赖于另一个整数，它是要用数学归纳法证明的。这是归纳法的又一种情况。

下面的定理是真的：

定理 N 对每个整数N，有一个最小的整数K（依赖于N），使得对所有的大于K的整数n

$$2^n超过 n^N。$$

对$N=1$，它变成了定理1，K是整数零；对$N=2$，得到定理2，K是4；对$N=3$，得到定理3以及$K=9$。合理的猜测是对$N=4,5,6,\cdots,10$，$K=16,25,36,\cdots,100$，一般地$K=N^2$。

希望读者把下面的一组习题推迟到把这一节读完再做，因为引进定理N是为了两个不同的目的。首先，它提示了无限过程（在这个情况是数学归纳法）怎样能是“串联”的，把每一步变成一个无限过程；其次，它提供了“无限的科学”的大师之一康托的某些论证的入门。第二个目的比第一个更重要些。

习　题

6.8 对于$N\geqslant4$，定理N中的常数K可以按以下步骤确定：

(a) 证明2的N次幂的N次幂是2的N^2次幂，即

$$(2^N)^N=2^{N^2}.$$

(b) 当$N\geqslant4$，从定理2得到一个推论：$2^N\geqslant N^2$。证明

$$2^{N^2}\geqslant(N^2)^N,$$

因此如果 $n=N^2$，那末 $2^n\geqslant n^N$。

6.9 证明：如果 $N\geqslant 2$，$2^k\geqslant k^N$，并且 $k\geqslant N^2$，那末

$$2^{k+1}>(k+1)^N.$$

6.10 由以上两个题证明：对于 $N\geqslant 1$，只要 n 超过 N^2，2^n 就超过 n^N①。

定理 N 是非常重要的，我愿意用数字实例提起对它的注意。它说明 2^n 比 n^{10} 增长快(直到第一百项左右才赶上)，并且 2^n 比 n^{1000} 增长快，尽管要到第百万项它才赶上这个序列。很清楚，n 的乘幂：$n^2,n^3,n^4,\cdots$ 增长得比 n 快(当 n 增长时)。因为 2^n 比 n 的任何乘幂都增长得快，所以称它比 n 增长超越地快。让我们看一些其它的"高速序列"。

用 4^n 给出的序列(当 n 增长时)比 2^n 增长得快，但并不超越地快，因为对所有的 n，

$$4^n=(2^2)^n=2^{2n}=(2^n)^2.$$

类似地，对所有整数 N，可以看出序列 $5^n,6^n,\cdots,N^n$ 增长得象高速序列 2^n 的乘幂一样。然而，象你能期待的那样，有一个序列比 2^n 增长超越地快。

定理 给定任何一个(正的增加的整数)序列 $a,b,c,d,\cdots$，序列 $2^{(2^a)},2^{(2^b)},2^{(2^c)},\cdots$ 增长得比序列 2^n 超越地快。

因此，序列 $2^2,2^{(2^2)},2^{(2^3)},\cdots$ 增长得比序列 $2,2^2,2^3,\cdots$ 超越地快。

作为对所有 N 都适用的定理 N 的一个应用，可以推出这个定理(稍用一点推理)。

① 定理N的证明较困难，作者把它分解成习题6.8至6.10。但作者对每一小题的提法与后面的解答不完全一致，而后面的解答又有错误。因此，我们将两处都作了一些改动。——译者

对任意的给定序列永远有一个比它超越地快的序列，这个事实提示了下面的归纳构造法。假设我们取了一个快的序列，如2^n，然后一个超越地快的序列，然后第三个，比第二个超越地快，然后永远继续下去。现在我们在哪里？我们是不是已经得到了能够构造出来的最快的“东西”？

下面的定理说不是的。它的证明要用康托对角线论证法，它是在1870年发明的，是基础数学最伟大的思想之一，在数学的所有分支里都有很多应用。我们已经在第三章中用过它。

定理 假设给了一个序列的序列$S_1, S_2, S_3, \cdots$，(第一个以后的)每一个比上一个增长得快，让我们把整个系统排成一个长方形的阵，S_k的数占第k行，S_k的第n项在阵的第n列。那末，对角线序列，也就是第一个序列的第一项，紧接着第二个序列的第二项，紧接着第三个序列的第三项，等等，它增长得比给定的序列中的任何一个都快。

为了说明这个定理，设S_k表示n的k次幂的序列，也就是n^k ($n=1,2,\cdots$)。表6.3展示了长方形阵的前面几行的前面几项。

表 6.3

S_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	·
S_2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	·
S_3	1	8	27	64	125	216	343	·	·	·	·
S_4	1	16	81	256	625	1296	·	·	·	·	·
S_5	1	32	243	1024	3125	·	·	·	·	·	·
S_6	1	64	729	·	·	·	·	·	·	·	·
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

对角线序列是

$$1,\ 4,\ 27,\ 256,\ 3125,\ \cdots;$$

容易看出，一般项是n^n。这个序列增长得比n超越地快，事实上，它还增长得比2^n超越地快。

6.7 狄利克雷盒子或者鸽子洞原理

有一个称作狄利克雷(Dirichlet)盒子原理的重要的证明技巧。它说，如果物体的个数比盒子个数多，并且把所有物体都放到盒子里去了，那末至少有一个盒子必须容纳多于一个的物体。当举行一次重要的全国大会时，在报社记者和旅馆房间问题里，就会出现这个原理的一个常规应用。

a) 有限情形 这个原理的一个简单应用是：设L表示平面上的一条直线，并且设P,Q和R是三个不同点，它们中间没有一个在直线上；那末线段PQ,QR或RP中至少有一条和直线不相交(图6.6)。这是因为直线把平面只分成了两"边"，在三个点里，有两个一定在同一边，能够用一条和直线不相交的线段联结起来。得到了断言。

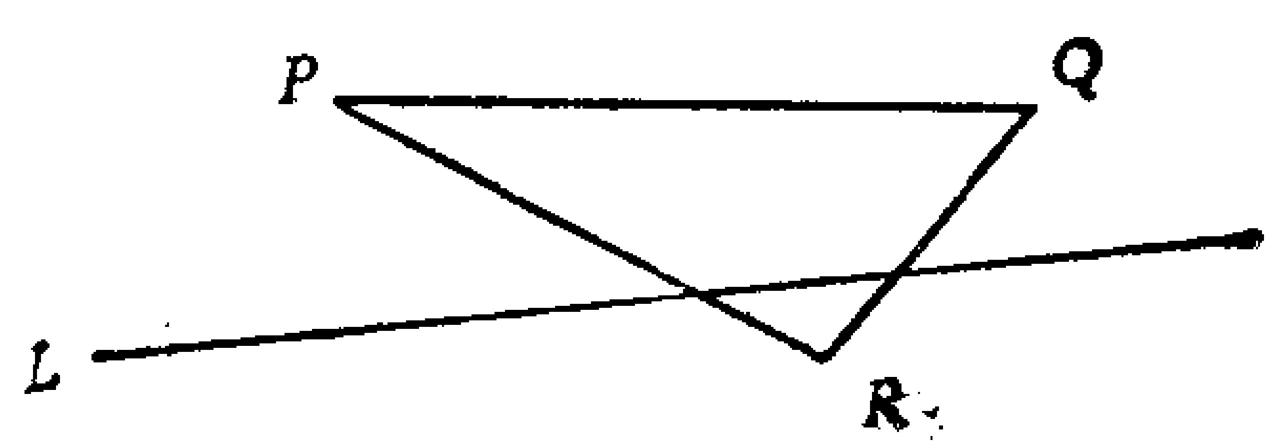


图 6.6

b) 可数无限多个物体 有限个盒子 斐波那契序列

下面我们把狄利克雷盒子原理用到一个关于斐波那契序列的有趣问题上去。但是首先我们必须回忆关于整除性和剩余的一些事实。

设N是一个给定的整数。如果任意另一个整数被N除，可能有下面的余数：0(如果这个整数被N整除)，1，2，3，…，

$N-1$。换句话说，余数(也叫模N的余数)永远是N 个数中间的一个。特别地，如果我们取多于N个数，譬如说

$$b_1, \ b_2, \ \cdots, \ b_N, \ b_{N+1}, \ \cdots, \ b_m,$$

把它们都用N除，我们从盒子原理知道至少有两个 b 一定有相同的余数。

现在我们问下面的问题：假定有一个整数的序列

$$b_1, \ b_2, \ b_3, \ \cdots,$$

我们写下它们模N的余数序列，

$$r_1, \ r_2, \ r_3, \ \cdots.$$

在这个序列里，两个相邻的余数会不会重复出现？换句话说，有沒有一对r_i, r_{i+1}和另一对r_j, r_{j+1}使

$$r_i = r_j, \qquad r_{i+1} = r_{j+1}?$$

为了回答这个问题，让我们先数一下可能的余数

$$0, \ 1, \ 2, \ \cdots, \ N-1$$

里面能形成多少个不同的数对。因为这些数对的第一个数能取N个值中的任何一个，又因为第二个也能取N个值中的任何一个，所以可能有N^2个不同的有次序的数对。现在，一个$t+1$项的序列

$$b_1, \ b_2, \ b_3, \ \cdots, \ b_t, \ b_{t+1}$$

有 t 个相邻的数对

$$(b_1, b_2), \ (b_2, b_3), \ \cdots, \ (b_{t-1}, b_t), \ (b_t, b_{t+1}).$$

因此，由盒子原理，任何一个多于 N^2+1个数的序列的余数（模N），一定包含有至少两个完全相同的相邻项的数对。

例 如果$N=3$，余数的可能的值是0,1和2。所有可能的$3^2=9$个数对是

0,0；0,1；0,2；1,0；1,1；1,2；2,0；2,1；2,2。

考虑在纽约第八大街独立线上的连贯的 $11=N^2+2>$

N^2+1个地下铁道车站：

$$4,\ 14,\ 23,\ 34,\ 42,\ 50,\ 59,\ 72,\ 81,\ 86,\ 96.$$

余数（模 3）的序列是

$$1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0;$$

因为我们写下了$3^2+2=11$个车站，我们知道在余数的序列里有重复的数对。事实上，第二和第三项以及第六和第七项构成完全相同的数对；还有第五和第六以及第九和第十也是同样的数对。

现在我们可以问：一个序列的多少项以后会得到一个重复的相邻的三项余数（模N），或者重复的相邻的四项余数？这些问题都能用同样的方法来回答，但是我们将只讨论数对并把我们的知识用于一个特殊的序列，就是斐波那契序列

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597, \\ 2584,\ 4181,\ 6765,\ 10946,\ 17711,\ \cdots. \end{array}\right\} \qquad (6.10)$$

它是用递推关系

$$\left.\begin{array}{l} f_1=f_2=1, \\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}, \qquad 对 n\geqslant 2 \end{array}\right\} \qquad (6.11)$$

来定义的。我们将证明下面拉格朗日观察的结果①：

定理 设N是一个大于或者等于 2 的整数。那末斐波那契序列的余数（模N）最多在N^2+1项以后重复。更精确地说，第一对余数，就是1, 1, 在N^2+2项之内又出现，整个序列从这里开始是重复的。

在给出证明之前，让我们在一些简单的情形下验证这个

① 这个观察结果能在欧拉(Euler)的一本关于初等代数的教科书里找到（在欧拉失明以后不久，由他口述写于1766年）。它被翻译成了很多种文字，拉格朗日本人译成了法文。

断言。

对$N=2$，(6.10)的余数是

$$1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots.$$

第四和第五项等于第一和第二项，同样的三项1,1,0,看来一次又一次地重复。注意$N^2+1=5$，在五项之内，有一对重复出现了。

对$N=3$，(6.10)的余数是

$$1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ \cdots.$$

第九和第十项与第一和第二项一样。这里

$$N^2+1=10.$$

对$N=4$，(6.10)的余数是

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0,\ \cdots;$$

从第七和第八项开始重复。注意$N^2+1=17$；从盒子原理我们知道在18项之内必然出现重复的数对，但是实际上它出现得早多了。

对$N=5$，(6.10)的余数是

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 3,\ 1,\ 4,\ 0,\ 4,\ 4,$$
$$3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 4,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ \cdots;$$

在这里$N^2+1=26$，但是第一对在21项之内已经出现了，这个循环看来是重复的。

拉格朗日定理的证明　除了盒子原理以外(它告诉我们任意一个原始序列的余数序列会在N^2+2项之内显出一个重复的相邻的数对)，我们必须利用斐波那契序列

$$f_1,\ f_2,\ \cdots$$

的特点，它是由递推公式(6.11)所定义。这个关系告诉我们，一旦一对余数重复了，也就是一旦发现一对f_k, f_{k+1}，它和前面的一对f_i, f_{i+1}有相同的余数，那末我们必定可以期望

f_{k+2}和f_{i+2}有相同的余数，f_{k+3}和f_{i+3}有相同的余数等等。

为了看到这一点，我们回忆“f_i和f_k有相同的余数(mod N)”的意思是它们除以N时有相同的余数，也就是说，

$$f_i = q_i N + r_i, \qquad f_k = q_k N + r_k, \qquad r_i = r_k;$$

或者用另一种写法

$$f_i \equiv r_i \pmod N, \quad f_k \equiv r_k \pmod N, \quad r_i = r_k;$$

因此

$$f_i \equiv f_k \pmod N.$$

符号$u \equiv v \pmod N$读作“u和v恒等模N”，它的意思仅仅是$u-v$被N整除。注意，如果

$$u \equiv v \pmod N \quad 及 \quad x \equiv y \pmod N,$$

那末

$$u+x \equiv v+y \pmod N \quad 及 \quad u-x \equiv v-y \pmod N,$$

因为如果$u-v$和$x-y$被N整除，那末它们的和

$$(u-v)+(x-y)=(u+x)-(v+y)$$

也是这样，它们的差

$$(u-v)-(x-y)=(u-x)-(v-y)$$

也是这样。

用这个符号，盒子原理的结果是说在序列里有这样的项，使

$$f_i \equiv f_k \pmod N \quad 及 \quad f_{i+1} \equiv f_{k+1} \pmod N.$$

从它推出

$$f_i + f_{i+1} \equiv f_k + f_{k+1} \pmod N.$$

但是从递推关系(6.11)，我们看出在这个恒等式的左边就是f_{i+2}，右边是f_{k+2}。因此

$$f_{i+2} \equiv f_{k+2} \pmod N.$$

同样的理由表明

$$f_{i+3} \equiv f_{k+3} \pmod{N},$$
$$f_{i+4} \equiv f_{k+4} \pmod{N},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

到现在为止，我们已经说明了斐波那契序列的余数(mod N)序列是周期的。但是还必须说明这个循环从头上的一对1，1开始。

这是容易的，假定序列的周期是 p，因此从某一项开始，譬如说从$j=s$开始，对所有的 j

$$f_j \equiv f_{j+p} \pmod{N} \quad (j \geqslant s). \tag{6.12}$$

我们要说明f_s事实上是序列的第一项。

如果$s>1$，那末f_s不是序列的第一项，但是这样我们能从递推公式求出前面一项f_{s-1}，并且作如下讨论：

$$\begin{aligned} f_{s-1} &= f_{s+1} - f_s \\ &\equiv f_{s+1+p} - f_{s+p} \pmod{N} && \text{由 (6.12)} \\ &= f_{s+p-1} && \text{由递推关系。} \end{aligned}$$

因此 $$f_{s-1} \equiv f_{s-1+p} \pmod{N}.$$

如果$s-1=1$，重复的循环从f_1开始，证明已经完成了。

如果$s-1>1$，通过和上面相同的推理我们说明

$$f_{s-2} \equiv f_{s-2+p} \pmod{N}.$$

因为 s 是一个有限数，把这个过程依次用在$s-1$，$s-2$，$s-3$，…上，最后用到 1 而导出来

$$f_1 \equiv f_{1+p} \pmod{N}.$$

这就完成了拉格朗日定理的证明。

注意证明只用到递推公式

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \qquad n \geqslant 2,$$

并没有用到初始条件，$f_1 = f_2 = 1$。它的意思是说拉格朗日定理对任意的满足 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ 的序列都成立，不

管我们把a_1和a_2取成什么值。

习　题

6.11　考虑序列1, 1, 5, 13, 41, …，它是按照当 $n>2$ 时，$a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$ 的规则构造的。证明一个和拉格朗日附注类似的结果，但是注意到模 6 这个序列就成了1, 1, 5, 1, 5, …。

6.12　把拉格朗日附注推广到所有象下面这样构造的序列：对$n>2$时，$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}$，在这里$\alpha$和$\beta$ 是任意给定的整数。

6.13　把拉格朗日附注推广到在第三项以后

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}+\gamma a_{n-2}$$

的情形。

6.14　把拉格朗日附注再进一步推广。

c）不可数无限多个物体，可数无限多个盒子。下面说明狄利克雷盒子在无限集合情形的一个应用，假定不管什么原因，在平面上已经给我们选了不可数无限多个长方形。我们将要证明的定理的惊人之处是它和这些长方形的选取方式没有关系——有关的只是它们有不可数无限多个。

断言是，存在一个圆而且存在一个给定的长方形的不可数集合使得这个圆在每个长方形的内部。这就是说，它位于长方形内部并且和长方形的边不相交。下面是证明；在技巧上它是很容易的，但是在第一次遇到它时可能显得很难。

证明能在“有理圆”里选这个圆，有理圆是半径及中心坐标都为有理数的圆。这些圆的集合是可数的，因为

$$\aleph_0^3=\aleph_0;$$

参看第3.9节。下面用反证法证明。不管怎么给定一个长方形的集合，如果没有一个有理圆在这个集合的不可数无限多个长方形里面，那么它们每一个都最多在可数无限多个长方形里面(也许有限个，也许没有)。现在，因为$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$(参看第3.9节)，由此推出在我们的集合里，有一个有理圆在里面的全体长方形的总和最多是一个长方形的可数集合。因为给定的集合是不可数的，一定有剩下的长方形；也就是说，在给定的集合里，一定有长方形，在它们的内部没有任何有理圆！

我们强调了这段话，因为它是荒谬的。每一个长方形的内部至少有一个有理圆(容易看出来有无限多个)，我们已经导出了一个矛盾，并完成了证明。以上依靠的是每个长方形内部有有理圆这个提法，它是真的。这个推理方法是符合数学传统的，一方面它触及一个难点，另一方面，去证明它的前景是乐观的。下面是断言的证明。

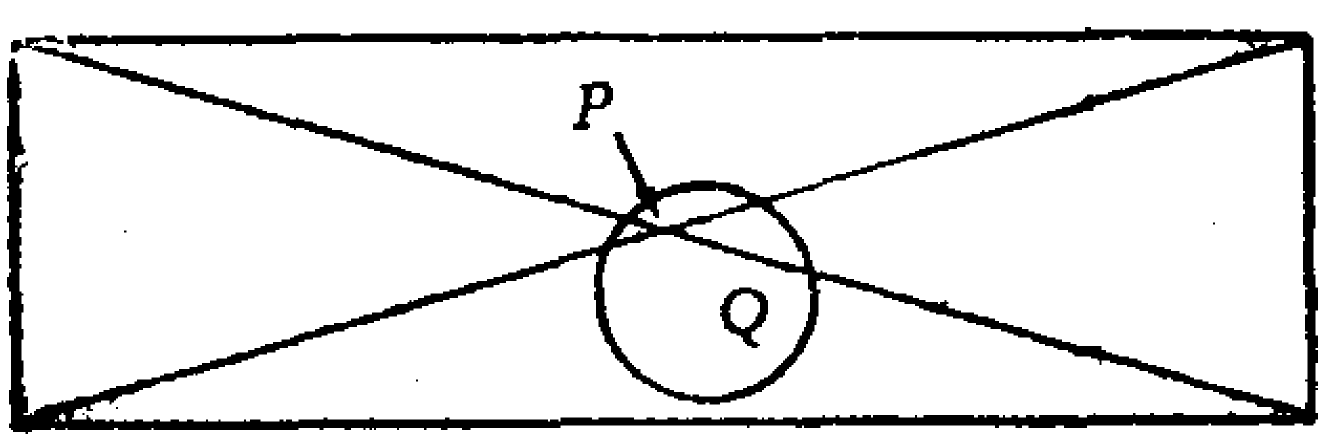


图 6.7

设在平面上给定了一个长方形，并且设P表示它的中心；参看图6.7.如果P的两个坐标都是有理数，那么选P是圆心并且选半径是任意一个小于短边一半的有理数。然而，如果P的两个坐标不都是有理数，那么(容易做到)选一个两个坐标都是有理数的点Q，它在长方形的内部(P是这样的点的一个序列的极限点)。现在，求出Q到每一边的距离并且选一个小于这四个距离的有理数作为半径，把Q用作圆心。这就完成了每一个长方形都有有理圆在内部的证明。

已经证明的事实说明了在分析里面可数和不可数集合的

重要区别。注意到作一个长方形的可数集合使它们互相不重叠是多么容易；我们已经说明了每一个不可数集合一定非常实质地互相重叠(图6.8)。

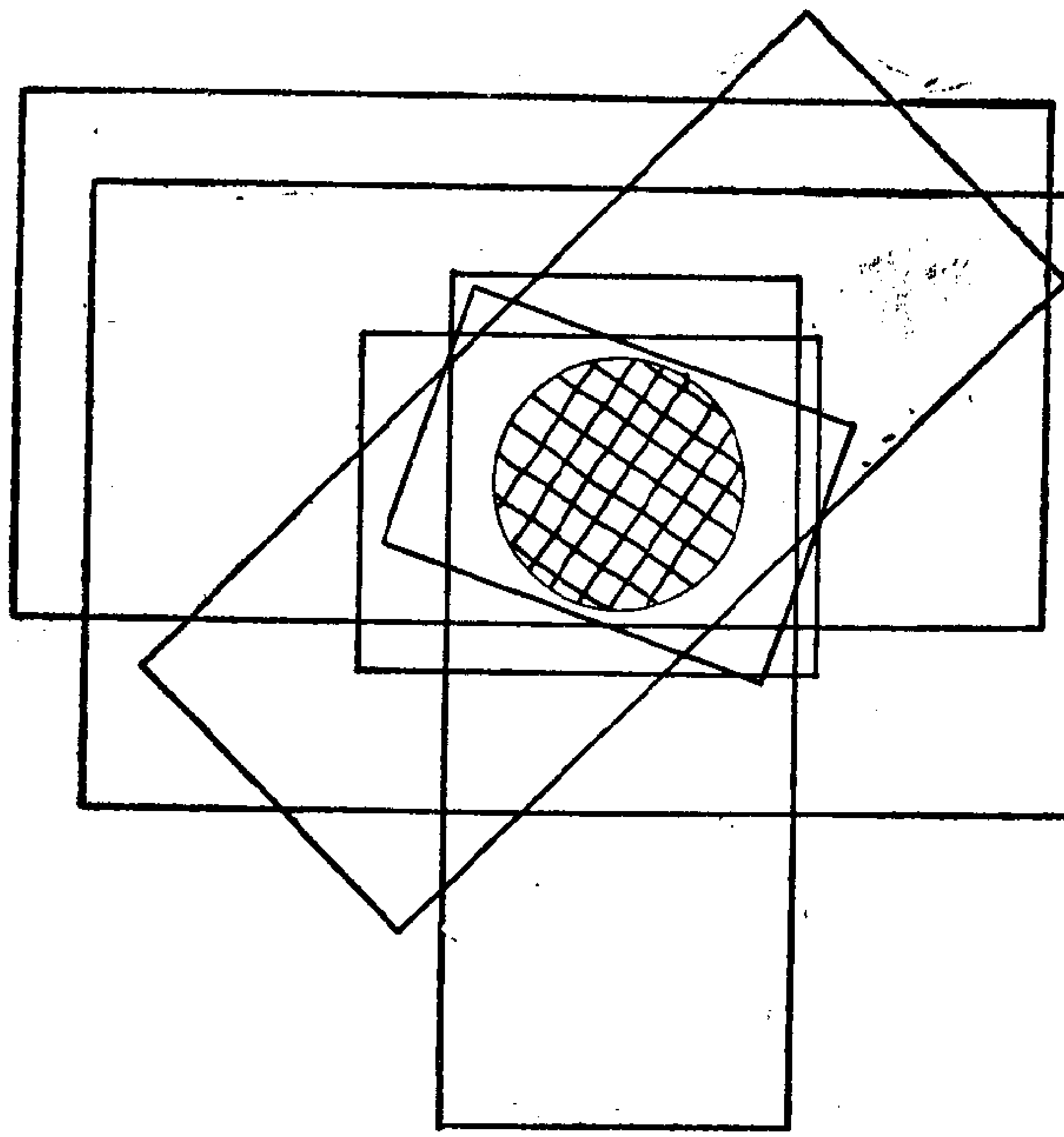


图 6.8 重叠长方形的例子，在这里实质的重叠是用一个包含在它们每一个内部的圆来衡量的

下面的习题是按照以上讨论所表明的思路来证明的。读者会发现它们值得思考，但它们是不容易的。第二个习题是用来解决第三个习题的一个组成部分。

习　题

6.15 暂时，我们把一个长方形叫做特殊的，如果它和

坐标系的关系是这样的：它的边在直线

$$x=a,\quad y=b,\quad x=c,\quad y=d$$

上，$a\neq c$和$b\neq d$，并且a,b,c,d是有理数。证明这些长方形的集合是可数无限大。

6.16 设P是一个给定长方形里面的一点。说明P包含在给定长方形里面的一个特殊长方形内。

6.17 假设给了你一个平面上的不可数的点集合X。证明在X里面存在一点P，使得每一个包含P的长方形都包含X的不可数多个点。（点P叫做集合X的聚点。）

6.18 假定不管什么原因给了你直线上（或者平面上）的一个不可数的点集合X。证明在X里存在一个点的序列$P_1,P_2,P_3,\cdots$和一个也在X里的点P，使得P是序列$P_1,P_2,P_3,\cdots$的极限点。

这是很难说明的，因为关于X知道得很少。在这里介绍它是因为它象关于最小上界的波尔察诺-维尔斯特拉斯原理一样，是求极限的一个有力工具。它代表了不可数无限大的最重要的应用之一。

习题解答

第二章

2.1 这是一个乐曲集合的无限序列，第一个集合包含一个声部或者一种乐器的乐曲，第二个集合包含两个表演者的乐曲，第三个包含三个表演者的乐曲等等①。

2.2 这是垒球里面四种类型击球的周期序列。重复的点子指出我们要一次又一次地重复同样类型的序列。

2.3 同一天出生的同胞兄弟姐妹的集体构成了这个序列的各项。第一项是所有的有一个同一天出生的同胞兄弟姐妹的个人作成的集体，第二项是所有有两个同一天出生的同胞兄弟姐妹的个人作成的集体等等。超过这个无限序列的某一点以后，所出现的项都是空集。

2.4 这里我们有一个一星期中每一天的名称的表。在这种情形，重复的点子代表星期六和星期日的缩写。

2.5 这是一个周期序列，它的每一项是一个星期每一天的英文名称的第一个字母，根据每天的次序，从对应于星期一(Monday)的字母M开始。第一项在后面六项以后又出现了，从那时起整个周期不断重复。

2.6 这三个集合的第一个是所有形式为$n=3q$的整数n的全体，在这里q是一个整数。容易看出，这个集合包括

① 我能知道"五重奏(唱)"，"六重奏(唱)"，"七重奏(唱)"，"八重奏(唱)"，但是我在这里卡住了。在没有一个怎么继续下去的清晰的规则的情况下，我同意一个学生的意见，他把这个问题称作是不清楚的，并且认为所有的回答都是正确的。

数0, 3, 6, 9, …。

第二个集合由所有形式是$n=1+3q$的整数 n 组成。因为每个数用 3 除时余数是 1，所以无限序列1, 4, 7, 10, …里面的数属于第二个集合。

第三个集合里的数都有形式$2+3q$，在这里 q 是一个整数，因此每一个数除以 3 时有余数 2。这样，第三个集合有元素2, 5, 8, 11, …。

因为每个整数除以 3 时有余数 0, 1, 2 中的一个而且只有一个，所以我们知道这三个不相重叠的无限集合在一起合成了整个整数的集合。

2.7 如果 q 能整除 n，那末$n=qb$，并且$n+1=qb+1$，在这里 b 是一个整数。换句话说，如果 n 能被 q 整除，$n+1$ 除以 q 时就有余数 1，因此 n 和$n+1$没有公共的因子。

2.8 考察一下这些表所提示的一般原理，它是：对于每一个 $k-k$ 乘法表，表上数字的和是前面 k 个正整数和的平方，在这里 k 是任意一个正整数。在任意一个下磬折形里面的整数的和是这个磬折形里的最小整数的三次方。

2.9 $$\frac{1}{7}=1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}$$

$$+5\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-6}+\frac{1}{7}\cdot10^{-7}$$

$$=0.142857+0.000000142857+\frac{1}{7}\cdot10^{-14}$$

$$=0.142857142857\cdots.$$

类似地，

$$\frac{1}{9}=1\cdot 10^{-1}+\frac{1}{9}\cdot 10^{-2}=0.111111\cdots.$$

$$\frac{1}{11}=0\cdot 10^{-1}+9\cdot 10^{-2}+\frac{1}{11}\cdot 10^{-3}=0.090909\cdots.$$

$$\frac{1}{99}=0\cdot 10^{-1}+1\cdot 10^{-2}+\frac{1}{99}\cdot 10^{-3}=0.010101\cdots.$$

每一个有限小数可以写成 $a/10^k$ 的形式，在这里 a 是一个整数；例如

$$3.572=\frac{3572}{10^3}.$$

如果 a 包含因子2^s和(或)5^t，$0<s,t\leqslant k$，那末$a/10^k$不是最简分数，可以象下面那样简化：

$$\frac{a}{10^k}=\frac{2^s\cdot 5^t\cdot b}{2^k\cdot 5^k}=\frac{b}{2^{k-s}\cdot 5^{k-t}}=\frac{b}{2^r\cdot 5^m}.$$

2.10 符号0.9090909090…和0.0909090909…分别是10/11和1/11的无限小数表示。当我们“加”这些表示式的时候，得出的符号是0.999 999 999 9…，而10/11与 1/11的和是(11/11)＝1。

2.11 因为

$$n\div m=n\times\frac{1}{m},$$

这个方法是清楚的。例如，为了做 7 除以 9，我们在图2.4的表里查 9 的倒数并且写

$$7\div 9=7\times\frac{1}{9}=7\times 0.111\cdots=0.777\cdots.$$

2.12 以Q为圆心，作一个半径为PQ的圆；参看图2.7。以P为圆心，同样的半径转动圆规求出这个圆和第一个圆的交点P_1和Q_1。

其次，把圆规打开到宽度P_1Q_1；以P_1和Q_1为圆心分别作圆。它们的交点之一(在P和Q右边的那一个)就是所要求的点R。

为了看出P,Q,R是共线的并且$PQ=QR=d$，注意到P_1PQ和Q_1PQ是两个等边三角形，具有共同的底边PQ，PQ被线段P_1Q_1在点M二等分（参看图2.7），并且P_1Q_1R是等边三角形，底边是P_1Q_1，它的高MR在通过P和Q的直线上。

此外，如果$PQ=d$，那末

$$P_1Q_1=2P_1M=d\sqrt{3} \quad 和 \quad MR=\frac{1}{2}P_1Q_1\sqrt{3}=\frac{3d}{2};$$

$$QR=MR-MQ=\frac{3d}{2}-\frac{d}{2}=d.$$

这个方法告诉我们怎样作在一条直线上的点的一个无限序列。简单地取两个点，把它们称作P和Q，得到R，然后对Q和R重复上面的作图，得到R'等等。

2.13 假设P在Q的左边。把直尺与P和Q对齐使它的右端在Q处，在尺上P点处作一个记号。这个记号把尺分成两部分，长度是$PQ=d$的那部分在右边，有较小长度d'的那部分在左边。作线段PQ以后，把直尺和线段PQ对齐，使得直尺上的分点落在Q。这时直尺的右端和Q的距离是d，并在PQ的延长线上。把这个延长线的端点记作Q_1。再把直尺沿着直线按从Q到Q_1的方向

移动，直到分点在新点 Q_1 上。这个直尺的右端点就会落在通过 P 和 Q 的直线的一点 Q_2 上，到 Q 的距离是 $2d$。为把过 P 和 Q 的 直 线无限地向右延长，只须无限地继续这个过程。

为了把通过 P 和 Q 的 直 线向左延长，我们只要反演刚才描述过的方法。

如果 d' 比 d 长，同样的办法也是行的，但是把 d 和 d' 的作用交换一下，就会更经济一些。

2.14 一旦确定了路的方向和进入山的那一点，只要对准每三个相邻的路标就行了。这可在每一步检查。

2.15 相继的中点趋近于一个到 A 的距离等于 AB 的 长 度的2/3的点。

2.20 (a) 把一条线段分成 5 个相等的部分，拿一份，扔掉 3 份。这时剩下一份，我们拿了已经分配的1/4。如果我们一次又一次地重复同 样 的过程，每一次把剩下的一份分成 5 个相等的部分，我们将保 持 拿已经分配的总量的1/4，并且剩下一个原来线段的越来越小的量以备再分配。因此

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots=\frac{1}{4}.$$

(b)
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}+\cdots=\frac{1}{7},$$

(c)
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots=\frac{1}{9}.$$

2.21 把线段分成 n 个相等部分，拿它们中的 m 个，留下 m 个以备继续用，扔掉剩下的 $n-2m$ 份。因此 $m+(n-2m)$

$=n-m$ 份已经分配了，并且我们拿 m 份；因此我们拿了已经分配的总数的 $m/(n-m)$。

用同样方式处理剩下的部分，把它分成 n 个相等的部分，拿 m 份，扔掉 $n-2m$ 份，留下 m 份以备继续用。用这个方法继续下去，我们永远拿已经分配部分的 $m/(n-m)$，而准备继续用的部分越来越小。

2.22 从 $4=2\cdot 2$ 得出 $\sqrt{4}=2$，因此 $\sqrt{4}$ 是有理数，为了证明 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}$ 是无理数，我们只需要考虑：

(a) 如果假设 $\sqrt{3}=p/q$，在这里 p/q 是（在所有等价的分数里）有最小分母的那一个，那末我们有

$$1<\frac{p}{q}<2,$$

$$q<p<2q,$$

$$0<p-q<q,$$

以及

$$3q^2=p^2,$$

$$3q^2-pq=p^2-pq,$$

$$q(3q-p)=p(p-q),$$

它蕴涵了和原始假设相矛盾的

$$\frac{p}{q}=\frac{3q-p}{p-q}.$$

(b) 假设 $p/q=\sqrt{5}$，p/q 是有最小分母的分数。那末 $p=\sqrt{5}q$ 和 $2<p/q<3$ 给出

$$2q<p<3q,$$

$$0<p-2q<q$$

以及

$$p^2=5q^2,$$

$$p^2-2pq=5q^2-2pq,$$

$$p(p-2q)=q(5q-2p),$$

因此 $$\frac{p}{q}=\frac{5q-2p}{p-2q},$$

在这里$p-2q<q$。

2.23 从$p=\sqrt{7}q$和$2<p/q<3$我们得到

$$2q< p <3q,$$
$$0<p-2q<q;$$
$$p^2=7q^2,$$
$$p^2-2pq=7q^2-2pq,$$
$$p(p-2q)=q(7q-2p)。$$

这样 $$\frac{p}{q}=\frac{7q-2p}{p-2q},$$

它与$\sqrt{7}$能表示成两个整数p和q的比，以及q是最小可能的分母的假设矛盾。

2.24 $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$。如果$\sqrt{8}=p/q$，那末$2\sqrt{2}=p/q$，或者$\sqrt{2}=p/2q$(这是一个矛盾，因为$\sqrt{2}$是无理数)。

2.25 $p=\sqrt{n}q$和$k^2<n<(k+1)^2$蕴涵了

$$k^2<\left(\frac{p}{q}\right)^2<(k+1)^2,$$

$$k<\frac{p}{q}<k+1,$$

$$kq< p <(k+1)q,$$
$$0<p-kq<q。$$

因为$p^2=nq^2$，

$$p^2-kpq=nq^2-kpq,$$

$$p(p-kq)=q(nq-kp),$$

$$\frac{p}{q}=\frac{nq-kp}{p-kq} \quad (p-kq<q).$$

如果有一个分数，它的平方是整数n，我们把它的分母写得尽可能小，譬如说$p/q=\sqrt{n}$，并且根据假设，$q\neq1$，那末$q^2\neq1$。因此分数p^2/q^2在整数k^2和$(k+1)^2$之间，我们能造出上面的矛盾来。

2.26 如果$\sqrt{s}$不是一个整数，那末，由习题2.25，s不是一个分数的平方。但是如果$2\sqrt{s}=n$，在这里n是一个整数，那末s等于分数$(n/2)^2$。因此，要不是$\sqrt{s}$是一个整数，我们就卷入到一个矛盾里去了。

2.27 为了证明$12.5\times a=100a/8$我们只要注意

$$12.5=12+\frac{1}{2}=\frac{24+1}{2}=\frac{25}{2}=\frac{100}{8}.$$

2.28 设a是任意一个整数，它的各位数字是$a_ka_{k-1}\cdots a_0$。那末我们可以写

$$\begin{aligned}
a&=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0\\
&=a_k(10^k-1+1)+a_{k-1}(10^{k-1}-1+1)\\
&\quad+\cdots+a_1(10-1+1)+a_0\\
&=a_k99\cdots9+a_k+a_{k-1}99\cdots9+a_{k-1}\\
&\quad+\cdots+a_1\cdot9+a_1+a_0\\
&=3[a_k(33\cdots3)+a_{k-1}(33\cdots3)+\cdots+a_1\cdot3]\\
&\quad+a_k+a_{k-1}+a_{k-2}+\cdots+a_1+a_0.
\end{aligned}$$

因为右边的第一个表达式是3的倍数，所以a与右边的第二项，也就是a的各位数字的和除以3有同样的余数。另一个说法是a与它的各位的和属于同一个同

余类(模 3)。如果$a_k+a_{k-1}+\cdots+a_0<10$，证明已经完了。如果不是，设

$$a_k+a_{k-1}+\cdots+a_0=b$$
$$=b_j10^j+b_{j-1}10^{j-1}+\cdots+b_1\cdot10+b_0,$$

和上面一样地作下去；最后各位数字的和将小于 10，我们将达到根数 $r(a)$。这说明了 a 以及它的各位数字的和 b，以及 b 的各位数字的和 c 等等，一直到$r(a)$都在同一个模 3 同余类里。

2.29 (a)和(b) 让我们考虑小数的无限序列

$$a_1=0.1111\cdots,$$
$$a_2=0.101010\cdots,$$
$$a_3=0.100100100\cdots,$$
$$a_4=0.1000100010001\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_k=0.1000\cdots1000\cdots1000\cdots,$$

注意到a_k的周期是 k。

(c) 0.101 001 000 100 001 000 001 000 000 1…。

第 三 章

3.1 对于 $AB':B'B=m:n$，m和n是正整数的情形，这个定理的证明与第六章第6.2(a)节给的证明基本上一样。对于 $m=\sqrt{2},n=1$，这个定理能用第6.2(b)和6.2(c)节不可约情形的方法来证明。

3.2 这样的长方形不存在，因为它会导致方程$1=0\cdot x$，在这里 x 是另一边的长度。但是，它和算术里的规则：对无论什么 x，$x\cdot0=0$矛盾。

3.3 作侧边长度是 x 和 1 的直角三角形ADC(参看图 3.6)。

过C点画斜边AC的垂直线。把AD延长与这条垂直线相交于B。线段DB就有所要求的长度$y=1/x$，因为直角三角形ACB的高CD的长度是长度$AD=x$和$DB=y$的比例中项：

$$\frac{y}{1}=\frac{1}{x}.$$

3.4 抛物线$y=x^2$是点(x,y)的轨迹，使对每一个横坐标x，纵坐标y满足关系式

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{1}.$$

这个关系式再一次提示我们作一个直角三角形，使斜边上的高有长度x而且把斜边分成长度是1和y的线段。在图3.7里对两个给定的x值x_1和x_2作了这个图，对应的y的值是y_1和y_2。（作图的细节留给读者。）

图3.8所表示的抛物线现在既可以用从图3.7的作图里得到的值(x,y)作为图上点的坐标来作图，也可以象下面指出的那样直接在坐标平面上进行作图：对每个横坐标x，求点$Z(x,-1)$，把它和原点O联起来，在O点作一条已经得到的线段的垂直线，这条垂直线和一条与y轴相距x个单位的垂直线相交，定出一个点$W(x,y)$。在直角三角形OWZ里，斜边上的高的长度是x，把ZW分成长度是1和y的线段，因此每个这样作的W满足关系式

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{y} \quad \text{或者} \quad y=x^2.$$

3.5 如果x是一个给定的长度，那末$\sqrt{x}$总能用关系式

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$$

来作图。

例如在图3.7里，和以前一样，设 $AE=1$，把 AE 延长到 B，使 EB 具有给定的长度 x，用 AB 作直径画半圆。过 E 的 AB 的垂直线和这个半圆相交于一点 O，直角三角形 AOB 的高 EO 就有长度 $\sqrt{x}$。

长度 $\sqrt{x}$ 也能从图3.8的抛物线读出：只要求一点，它到水平轴的距离是 x；它到垂直轴的距离就是 $\sqrt{x}$。

3.6 为了近似地求一个数 a 的立方根 $\sqrt[3]{a}$，只要定出图 $y=x^3$ 和水平线 $y=a$ 的交点 P，并测量 P 的横坐标；P 的坐标是 $(\sqrt[3]{a}, a)$。

3.8 一个细心的作图会显示出当 n 变得越来越大时，量 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 变得越来越小。

3.9 设 $a=\sqrt{n+1}$，$b=\sqrt{n}$。那末

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1,$$

或者

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

很清楚，当 n 变得越来越大时，分母 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ 变得越来越大；从上面的恒等式得出，量 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 变得越来越小；也就是说，把 n 取得足够大，能够使 $\sqrt{n+1}$ 和 $\sqrt{n}$ 的差要多么小就有多么小（它永远大于0）。

3.10 我们把这个表达式乘以

$$\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

得到

$$\sqrt{n}\frac{2n+1-2n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}.$$

当 n 越来越大时，$1/n$变得越来越小，因此这个表达式趋近于

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3.11 如果$0<y<\pi/2$，那么(参看图3.15)，$\sin y<y<\tan y$；用 $\tan y$除，我们得到

$$\cos y<\frac{y}{\tan y}<1.$$

当 y 减小时，$\cos y$趋近于 1，使$y/\tan y$ 挤在 1 和一个接近 1 的数之间。

3.12 (a) **定理3.1的证明** 设S是有极限 L 的序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$，假设 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 是S的任意一个子序列S'(也就是说，S' 是一个无限序列，它的项是 S 的一些或者全部的项，排列的顺序和它们在 S 中出现的顺序一样)。

S 有极限 L 的意思是序列$(x_1-L), (x_2-L), (x_3-L), \cdots$趋近于 0；也就是说，对于每个整数 n，最多有有限项(依赖于 n)x_k-L $(k=1,2,3,\cdots)$ 的绝对值大于$1/n$。但是如果S'是一个S的子序列，那末序列$(y_1-$

L),(y_2-L),…的每一项都恒等于某一项 x_k-L，因此，对于每个整数 n，最多能有有限项 $y_{k'}-L$ ($k'=1,2,3,\cdots$) 的绝对值大于$1/n$。

因此，一个有极限 L 的无限序列的每个子序列也有极限 L。

(b) **定理3.2的证明** $a+x-(a+L)=x-L$，因此如果 $(x_1-L),(x_2-L),(x_3-L),\cdots$趋近于零，那末

$$[a+x_1-(a+L)],[a+x_2-(a+L)],\cdots$$

也趋近于零；因此$a+x_1,a+x_2,a+x_3,\cdots$有极限 $a+L$。

(c) **定理3.3的证明** 我们希望说明，只要序列x_i以 L 作为极限，那末对每个整数 m，除了有限项kx_i以外，满足

$$|kx_i-kL|<\frac{1}{m}.$$

换句话说，我们知道对每个 n，除了有限个x_i外以，满足

$$|x_i-L|<\frac{1}{n}.$$

特别地，取 n 是大于或者等于$|k|m$的最小的整数。那末除了有限项以外

$$|kx_i-kL|=|k||x_i-L|<|k|\frac{1}{n}$$

$$\leqslant|k|\frac{1}{|k|m}=\frac{1}{m}.$$

这个论证对所有的整数 m 都成立。

(d) 我们首先证明：如果$x_1,x_2,x_3,\cdots$有极限 L 并且y_1,

$y_2, y_3, \cdots$有极限M，那末$x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \cdots$有极限$LM$。

按照提示，写

$$x_iy_i - LM = x_iy_i - x_iM + x_iM - LM$$
$$= x_i(y_i - M) + M(x_i - L).$$

根据假设，对每个整数n，除了有限个x_i, y_i以外，

$$|x_i - L| < \frac{1}{n} \quad 并且 \quad |y_i - M| < \frac{1}{n}.$$

此外，因为x_i有一个极限，所以除了有限个以外，当然有一个界，譬如说是C。所以

$$|x_iy_i - LM| \leqslant |x_i|\,|y_i - M| + M\,|x_i - L|$$
$$\leqslant C\frac{1}{n} + M\frac{1}{n} = (C + M)\frac{1}{n}.$$

现在，任意给一个整数m，我们就能达到

$$|x_iy_i - LM| \leqslant \frac{1}{m},$$

只要把整数n选得使

$$\frac{C+M}{n} < \frac{1}{m},$$

因此对每个整数m，除了有限项x_iy_i以外，

$$|x_iy_i - LM| < \frac{1}{m}.$$

为了证明定理3.4，$x_1^2, x_2^2, \cdots$的极限是L^2，把以上的结果用到$y_i = x_i$和$L = M$。为了证明$x_1^k, x_2^k, \cdots$的极限是L^k，我们只要把论证重复$k-1$次。

3.13 (a) 这个问题并不是很容易的。拿情形$0 < r < 1$来说。

一个标准的证明是这样进行的：

因为$1/r>1$，$1/r=1+h$，$h>0$。现在对每个 n

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n=(1+h)^n>1+nh,$$

当 n 增加时，$(1+h)^n$无限地增加。因此倒数r^n趋近于零。

当 $n\to\infty$时，$(1+h)^n$ 无限地增加的断言也能借助于下一节的波尔察诺-维尔斯特拉斯原理来证明。因为如果 L 是任意一个对所有 n 使

$$(1+h)^n\leqslant L$$

的数，那末对所有 n

$$(1+h)^{n-1}\leqslant\frac{L}{1+h}=L'<L;$$

因此，给定这个序列的任意一个上界 L，存在一个小一些的上界 L'。这样一个序列和波尔察诺-维尔斯特拉斯原理是不相容的。

现在让我们假定$r=1$。那末$r^2=1$，$r^3=1$，$r^4=1,\cdots$，序列$(r-1),(r^2-1),\cdots$的每一个数等于0。因为这个序列没有一项超过$1/n$（$n>0$），所以这个序列趋近于0，当$r=1$时，$r,r^2,r^3,\cdots$有极限1。

(b) 从恒等式

$$a(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=a(1-x^n)$$

我们得

$$a\cdot1+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r};$$

因为当$|r|<1$时，r^n 趋近于0，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{1}{1-r}, \qquad -1<r<1.$$

因此，任意一个比值 r 的绝对值小于 1 的无穷几何级数 $a+ar+ar^2+\cdots$的和是 $a/(1-r)$。

3.14 在正文里作的有理数序列用小数形式表示是

$$\begin{array}{l}
1.\,0\ 000000000\cdots,\\
.5\ 0\ 00000000\cdots,\\
2.00\ 0\ 0000000\cdots,\\
.333\ 3\ 333333\cdots,\\
3.0000\ 0\ 00000\cdots,\\
.25000\ 0\ 0000\cdots,\\
.666666\ 6\ 666\cdots,\\
1.5000000\ 0\ 00\cdots,\\
4.00000000\ 0\ 0\cdots,\\
.200000000\ 0\ \cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{array}$$

我们将构造一个数，它的第 k 位小数永远是数字 2 和 3 中间的一个，但是与这个表里的第 k 个数的第 k 位小数不同。

让我们把 3 选成它的第一位小数，因为 3 与第一个数的第一位小数不同。让我们把 3 选成这个正在作的数的第二位小数，因为 3 与表上第二个数的第二位小数不同。类似地，再选 3 ($\neq 0$)作为第三位小数，2 ($\neq 3$)作为第四位小数，3 ($\neq 0$)作为第五位，3 ($\neq 0$)作为第六位，3 ($\neq 6$)作为第七位等等，如果第 k 个数的第 k 位小数是 3；那末我们要选 2。

3.15 在把字母表的字母分类之前，为了确定起见我们考虑字母 T。我们把情况简化成考虑恒等的字母 T 的一个不可数集合(例如竖笔一英寸长，顶部的横笔也一英寸长)，它的顶点标以字母 A,B,C，参看图3.18(a)。

在任意的有限大小的一张纸上，一个这样的 T 的不可数集合一定包含一个 T 的不可数子集合，使得标记是 A 的各顶点互相在譬如说1/8英寸之内。在这个集合里有一个不可数的子集合使得标记是 B 的各顶点互相在1/8英寸之内。在这个集合里，有一个不可数的子集合使得标记是 C 的顶点互相在1/8英寸之内。

现在，设 ABC 和 $A'B'C'$[参看图3.18(b)]是两个这样描述的 T。它们互相交叉。这能用初等几何来证明，根据的是一条直线把平面分成两个区域(称作直线的两侧)，以及连接直线不同侧的点的线段一定和直线交叉这个事实。这就证实了在一页上不可能写不可数个全等的不交叉的 T。注意，如果我们仅仅要求距离 AA' 和 BB' 小，T 可能象在图3.19里那样的位置，并不交叉。我们在这里将不处理 T 可以改变大小的情况，但是同样的结果也是可以证明的。

字母表里所有包含字母 T 的图形的字母(也就是说两条线段或曲线相交，至少有一条线段伸展得超过交点)和 T 属于同一类。它们是 A,B,E,F,H,K,P,Q,R,T,X,Y。

对所有其它的字母，把它们的一个不可数集合七拼八凑地写在一页上是可能的。图3.20(a),(b)分别对字母 L,O 说明了这个事实。在每个情形，一条线段包含不可数个点的事实为我们提供了解决的线索。

第 四 章

4.1 省略了短语"如果这个极限存在"。仅当 L_n 有一个极限，提法 $L=\lim\limits_{n\to\infty}L_n$ 才有意义，在这个情况，它断言了 L 是这个极限的值。

4.2 直接计算底边在 x 轴上，顶点在曲线 $y=x^2$ 上的等边三角形的边长 $S_1, S_2, \cdots$ 是有点麻烦的；幸亏在这个题目里所提的问题可以不用计算而容易地回答：所得的之字形的长度还是 2，因为象例 2 里一样，它的长度是从点(1, 0) 到原点距离的两倍。

4.3 我们计算距离

$$B_1T=1,\quad B_3T=\frac{1}{2},\quad B_5T=\frac{1}{4},\quad \cdots,$$

$$B_{2n+1}T=\frac{1}{2^n},\ \cdots$$

它趋近于零。因此 T 是序列

$$B_1,\ B_3,\ \cdots,\ B_{2n+1}$$

的极限。

距离 $B_{2n}B_{2n-1}$ 能表示成边长为 $1/2^{n-1}$ 的等边三角形的边，因此这些距离也趋近于 0。

根据三角不等式，长度之间有下述关系：

$$B_{2n}T\leqslant B_{2n}B_{2n-1}+B_{2n-1}T.$$

当 n 增加时右边的每一项趋近于零(根据我们上面说明的)，因此它们的和趋近于零。因此 T 也是有偶数下标的点的极限。

4.4 点 $Z(\sqrt{2}, \sqrt{2}/3)$ 是点的序列 $D_1, D_2, \cdots$ 的极限。D_1,

$D_2, \cdots$的横坐标是

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},\quad x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8},$$

$$\cdots,\ x_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right),\ \cdots.$$

当把这些有限几何级数加起来时，它们具有形式

$$x_1=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right),\qquad x_2=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4}\right),$$

$$x_3=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{8}\right),\quad \cdots,\qquad x_n=\sqrt{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right],\cdots;$$

因为序列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$趋近于零，所以这些数任意靠近$\sqrt{2}$。这说明了$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$，这就是短语“$Z$的横坐标是$D_1, D_2, \cdots$的横坐标的极限”的意思。

为了证明$D_1, D_2, \cdots$的纵坐标

$$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right),$$

$$y_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right),\cdots,$$

$$y_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],\ \cdots$$

有极限$\sqrt{2}/3$，我们对这些有限几何级数求和，得到

$$y_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}\right]=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

当 $n\to\infty$ 时，$(-1/2)^n$ 趋近于零，因此 y_n 有极限 $\sqrt{2}/3$。

从横坐标有极限 $\sqrt{2}$ 以及纵坐标有极限 $\sqrt{2}/3$ 的事实，我们能用毕达哥拉斯定理证明序列 $D_1,D_2,\cdots$ 有极限 $Z(\sqrt{2},\sqrt{2}/3)$。我们把距离 D_nZ 表示成

$$(D_nZ)^2=(\sqrt{2}-x_n)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-y_n\right)^2.$$

右端的项当 $n\to\infty$ 时趋近于零，因此它们的平方趋近于零，并且它们的平方和也趋近于零。因此距离 D_nZ 趋近于零，Z 确实是序列 $D_1,D_2,\cdots$ 的极限。

4.5 分别把 $D'_1,D'_2,\cdots$ 的横坐标和纵坐标表示成 $x_1,x_2,\cdots$ 及 $y_1,y_2,\cdots$。从例4′的作图以及我们关于例4的知识，很清楚有

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right),$$

$$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right),\cdots,$$

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\pm\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots\pm\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots\pm\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}}{\frac{5}{4}}+\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}}{2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}\right],\quad 对\ n\geqslant 2,\quad n\ 偶数,$$

$$x_{n+1}=x_n\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n/2},\quad 因此\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{3\sqrt{2}}{5},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n/2}=\frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

对纵坐标，我们有

$$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right),$$

$$y_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right),\cdots,$$

$$y_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots\pm\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\cdots\pm\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\cdots\pm\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}}{\frac{5}{4}}-\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}}{2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}\right],\quad 对\ n\geqslant 2,\quad n\ 偶数,$$

$$y_{n+1} = y_n \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n/2},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\sqrt{2}}{5} = \lim_{n\to\infty} y_{n+1}.$$

正象我们在问题4.4的解答里看到的那样，它蕴涵着点$(3\sqrt{2}/5, \sqrt{2}/5)$是序列$D'_1, D'_2, \cdots$的极限点。

4.6 把每一点E_1, E_2, E_3等等，垂直投影到y轴(这就是我们计算一个点的纵坐标时本质上所做的事)。把这些点叫做F_1, F_2, F_3等等。现在如果我们让f_n表示E_n的纵坐标，那末f_n也是OF_n的长度。注意数的序列$f_2, f_4, f_6, \cdots$是不断增加而且有上界的。根据波尔察诺-维尔斯特拉斯原理这个序列有一个极限f^*。过一会我们要说明f^*也是奇序数的f_n，即$f_1, f_3, f_5, \cdots$的极限，这个序列从上面的一侧趋近于它(读者如果愿意，可以自己去证明这个结论)。因此整个序列有极限f^*，它是从两侧趋近于极限。有一个点F^*(在y轴上)对应于f^*，它好象是点$E_1, E_2, E_3, \cdots$的极限的投影；但是并不是这样，我们已经看到了，点$E_1, E_2, \cdots$沒有极限。

下面是奇序数的f_n的序列有极限f^*的一个证明。对每个n，

$$f_{2n-1} - f^* = (f_{2n-1} - f_{2n}) + (f_{2n} - f^*),$$

第二个括号中的数是负的(参看图4.10)。右边的第一项正好是$\sqrt{2}/2n$。对于第二项我们沒有公式；但是因为序列f_{2n} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 收歛到f^*，根据极限的定义我们知道当n足够大时所有这些项是很小的。因

此我们能确实知道当 n 足够大时，右边是两个很小的数的差，它也是很小的。这说明了 f_{2n-1} 靠近 f^*（对大的 n）从而结束了证明。

4.7 例 5 说明（参看上面问题的解）一个平面上点的序列可能没有极限点，尽管它们的投影的序列有一个极限点。断言(a)要是加上"如果给定的点的序列有极限"就是正确的了；我们过一会要证明它。

断言(b)是真的。设 Q_n 是给定序列里的点，Q 是它的极限点，P_n 是 Q_n 的投影，P 是 Q 的投影。那末 $P_nP=Q_nQ\cos\alpha_n$，在这里 α_n 是线段 Q_nQ 和作投影的那条直线的夹角。因为 $|\cos\alpha_n|\leqslant 1$，由此推出 $|P_nP|\leqslant|Q_nQ|$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}Q_nQ=0$，由此推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|P_nP|=0$，因此 Q 的投影 P 确实是序列 P_n 的极限点。

这同时也证明了点的序列的投影的极限是极限的投影，只要它们有极限。如果 P^* 是投影的极限，P 是极限 Q 的投影，那末 $\lim\limits_{n\to\infty}P_nP^*=0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}P_nP=0$ 蕴涵着 P 和 P^* 重合。

4.8 设

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$$

因为对 $k>1$ 我们有 $k>k-1$，由它推出，对所有 $k>1$

$$\frac{1}{k}<\frac{1}{k-1} \quad 及 \quad \frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}\ .$$

因此 $$S_n<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}. \tag{1}$$

现在我们注意到，对 $k=2,3,\cdots$,

$$\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

把(1)的右边各项重写成

$$S_n<1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}.$$

这就证明了对 $n=1,2,\cdots,S_n<2$.

4.9 根据毕达哥拉斯定理，我们可以把任意一条线段 OP_k 用前面的一条表示出来：

$$OP_k^2=OP_{k-1}^2+\frac{1}{(k-1)^2}. \qquad (1)$$

然后，我们把 OP_{k-1}用前面的一条表示出来并且代入(1)

$$OP_k^2=OP_{k-2}^2+\frac{1}{(k-2)^2}+\frac{1}{(k-1)^2}.$$

这样继续下去，我们求得

$$OP_k^2=OP_1^2+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k-1)^2},$$

并且因为 $OP_1=1$,我们有(用上一个题解答里面用过的记号)

$$OP_k^2=1+S_{k-1}.$$

我们已经看到,对所有的 $n,S_n<2$。因此 $OP_n^2<1+2=3$,并且对所有的 n

$$OP_n<\sqrt{3}. \qquad (2)$$

之字形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的长度是

$$L_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

我们已经看到(第71页)，调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$没有极限。

为了证明点P_k的投影Q_k(在半径是3，圆心是O的圆上)无限次地旋转，只要说明OP_n和OP_{n+1}之间的角α_n的和变成任意的大。为了看到这一点，考虑

$$\sin\alpha_n=\frac{1/n}{OP_{n+1}}=\frac{1}{nOP_{n+1}}.$$

根据结果(2)，知道

$$\frac{1}{nOP_{n+1}}>\frac{1}{n\sqrt{3}},\qquad 对\ n=1,2,\cdots;$$

此外，对于任意的锐角α，我们有$\sin\alpha<\alpha$(参看图3.15)。由此

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\cdots&>\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots\\&>\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\cdots\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right),\end{aligned}$$

故角的和超过调和级数(乘以常数因子$1/\sqrt{3}$)，因此是无限大。

很清楚，序列$P_1,P_2,\cdots$不能有一个极限点，因为如果它有，在某一个点(譬如说P_N)之后的所有点就必须在圆的一个小扇形上，显然现在不是这样。

4.10 (a) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right].$$

在方括号里的量是一个以前处理过的调和级数。已经求出它是无限大．因此，常数乘调和级数是无限大，级数(a)发散。

(b)
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$$
$$=\frac{1}{4\cdot 1-1}+\frac{1}{4\cdot 2-1}+\frac{1}{4\cdot 3-1}$$
$$+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\cdots$$

因为

$$\frac{1}{4n-1}\geqslant\frac{1}{4n}\quad 对\ n=1,2,\cdots,$$

所以级数(b)的每一项大于发散级数

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{4n}+\cdots$$
$$=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right],$$

的对应项，因此级数(b)发散。

(c) 因为对$n>1$, $n>\sqrt{n}$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$$

和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$
$$>\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

因此级数(c)发散。

(d) 这个级数的各项比(c)的对应项还要大，因此(d)当然发散。

4.11 (a) 如果对平面上所有的直线，P的投影都是P_n的投影的极限，那末特别地，对一个坐标系的两条垂直的轴这也是真的。把P_n在x轴及在y轴上的投影分别表示成x_n, y_n，把P的投影表示成x与y。那末，参看图4.15(a)，

$$(P_nP)^2=(x_n-x)^2+(y_n-y)^2$$

因为x_n趋近于x并且y_n趋近于y，所以

$$\lim_{n\to\infty}(P_nP)^2=0,$$

即P_n趋近于P。

(b) 很清楚，从给定的论据只在一条直线上成立的事实不能推断出这个结果，如例5(第75页)所表明的那样。

(c) 如果给定的论据对任意两条不平行的直线，譬如说l_1和l_2是真的，取一条(譬如l_1)作为x轴。可以表明(用解析几何或者线性代数的方法)平面上的任何直线，例如y轴，都能表示成两条给定的不平行直线的线性组合。此外，P_n在y轴上的投影y_n能用x_n和P_n在直线l_2上的投影z_n表示出来[参看图4.15(b)]，如果x_n和z_n有极限，y_n就有一个极限y。因此P是P_n的极限的问题能化成(a)中解决了的问题。

第 五 章

5.1 假设$\sqrt{2}$是有理数，也就是说单位正方形的对角线的长度是p_1/q_1，这里p_1和q_1是整数。那末边长为q_1个单

位的正方形具有长度为 p_1 的对角线。

现在作下面的等腰直角三角形的序列：第一个的侧边长 q_1，斜边长 p_1，参看图5.4(b)。过把斜边分成线段长 q_1 与 p_1-q_1 的点作斜边的垂直线。这条垂直线把第一个三角形割下一个角，这个角就是我们的第二个三角形，很清楚它与第一个相似，它的侧边长 q_2 并且斜边长 p_2。我们观察到[参看图5.4(b)]

$$q_2=p_1-q_1,$$

$$p_2=q_1-q_2=q_1-(p_1-q_1)=2q_1-p_1.$$

现在我们重复地作图，割下下一个角上的三角形。它的侧边长

$$q_3=p_2-q_2=2q_1-p_1-(p_1-q_1)=3q_1-2p_1,$$

它的斜边长

$$p_3=q_2-q_3=p_1-q_1-(3q_1-2p_1)=3p_1-4q_1.$$

我们继续不停地往下割角，总是得到和前面所有的三角形都相似的等腰直角三角形。第 n 个三角形的侧边长 q_n，它的斜边长 p_n，这些长度满足关系式

$$q_n=p_{n-1}-q_{n-1}, \qquad p_n=q_{n-1}-q_n.$$

因为 $p_{n-1}=q_{n-2}-q_{n-1}$，所以我们可以把第 n 条侧边的长度 q_n 表示成

$$q_n=q_{n-2}-2q_{n-1}, \qquad n>2,$$

也就是说，用前面两个三角形的侧边长来表示。

现在考虑序列 $q_1,q_2,q_3,\cdots$。因为 p_1 和 q_1 是整数，$q_2=p_1-q_1$ 是整数，$q_3=q_1-2q_2$ 是整数，一般来说，对所有 $n>2$，$q_n=q_{n-2}-2q_{n-1}$ 都是整数。从我们的作图明显看出，接连的三角形的侧边长度是减少的，也就是说

$$q_1>q_2>q_3>\cdots.$$

因此$\sqrt{2}=p_1/q_1$是有理数的假设导出了一个无限减少的正整数序列，而这样的序列是不存在的。我们的结论：$\sqrt{2}$是无理数。

为了把这个方法用在$\sqrt{5}$上，假设$\sqrt{5}=r_1/s_1$，在这里r_1和s_1是整数．把图5.5的长方形放大，使它的边长是$s_1, 2s_1$；那末它的对角线是r_1。我们的作图导出相似的直角三角形，侧边长$s_n, 2s_n$并且斜边长r_n。递推关系是

$$s_n = r_{n-1} - 2s_{n-1}, \qquad r_n = s_{n-1} - 2s_n,$$

因此 $$s_n = s_{n-2} - 2s_{n-1} - 2s_{n-1} = s_{n-2} - 4s_{n-1},$$

这个相似三角形的短侧边长度的序列$s_1, s_2, s_3, \cdots$又是一个减少的整数的无限序列。

这些例子说明怎样能用这个方法来证明：对于能写成两个整数平方和：$k=a^2+b^2$的任意整数k，$\sqrt{k}$是一个无理数①。我们已经对$k=1^2+1^2$和$k=2^2+1^2$用了它。推广的细节留给读者。

5.3 第k个分数F_k从上一个分数F_{k-1}形成如下：

$$F_k = \frac{1}{1+F_{k-1}}.$$

如果

$$F_{k-1} = \frac{p}{q}, \qquad \text{那末} \quad F_k = \frac{1}{1+\dfrac{p}{q}} = \frac{q}{p+q}.$$

5.4(a) 表达式$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots}}}$的有限部分的序列是按下

---

① 这是错误的．例如$k=3^2+4^2=25$，$\sqrt{k}=5$就不是无理数．这里使用的方法其实只能证明$\sqrt{a^2+1}$是无理数．——译者

面的样子构成的：

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1-\sqrt{1}},\ \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1}}},\ \cdots.$$

当我们计算这些数时，我们发现这是序列1, 0, 1, 0, …，它没有极限。

(b) 因此m满足 $m^2+m=1$，所以它的倒数满足

$$\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau}=1 \quad \text{或者} \quad 1+\tau=\tau^2.$$

有限部分的序列的项 a_i：

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \cdots$$

满足递推公式

$$a_1=\sqrt{1},\quad a_n=\sqrt{1+a_{n-1}},\quad \text{对 } n=2,3,\cdots. \tag{1}$$

我们将用第3.8节的波尔察诺-维尔斯特拉斯定理说明增加的序列 $a_1, a_2, \cdots$有一个极限。为了这样做，我们必须找一个界B，使得 $a_1<a_2<\cdots<B$。

a_i 增加的事实蕴涵着对 $n=1,2,\cdots, a_{n+1}-a_n>0$。从(1)我们有

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \left[\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+a_{n-1}}\right]\frac{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}\\
&=\frac{(1+a_n)-(1+a_{n-1})}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}.
\end{aligned}$$

因为对所有的i，$a_i>0$，所以在最后的表达式里的分母大于2。因此对所有的n

$$a_{n+1}-a_n<\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})$$

并且

$$a_{n+1}-a_n<\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ (a_{n-1}-a_{n-2})\right]$$

$$<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}(a_2-a_1). \tag{2}$$

其次我们把 a_{n+1} 写成形式

$$a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

并且对括号里的每个表达式用不等式(2)：

$$a_{n+1}<\frac{1}{2^{n-1}}(a_2-a_1)+\frac{1}{2^{n-2}}(a_2-a_1)$$

$$+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=(a_2-a_1)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right]+a_1.$$

在方括号里的表达式不超过 2，因此

$$a_{n+1}<2(a_2-a_1)+a_1=2(\sqrt{2}-1)+1=2\sqrt{2}-1,$$

这个数是序列所有各项的界。

注意我们没有用到这个序列的极限是 $\tau=1/m=1+m=1.618\cdots$这个事实。我们所作的界

$$B=2\sqrt{2}-1=1.828\cdots$$

比这个极限稍微大一点。

5.5 计算到六位小数这些比值是

$$\frac{5}{8}\approx0.625\ 000;\quad \frac{8}{13}\approx0.615\ 385;\quad \frac{13}{21}\approx0.619\ 048;$$

$$\frac{21}{34}\approx0.617\ 647;\quad \frac{34}{55}\approx0.618\ 182;\quad \frac{55}{89}\approx0.617\ 978.$$

分数

$$\frac{377}{610}\approx 0.618\ 033 \quad 及 \quad \frac{610}{987}\approx 0.618\ 034$$

是序列的第17及第18项。

5.6 序列里每个后继的分数在数量上更接近于m.m和分数1/2,2/3,3/5,5/8,8/13的差分别近似等于0.118 034,0.048 633,0.018 034,0.006 966和0.002 649.从形式上看每一项与无限连分式也更接近一些。至于以上事实的一般证明，例如可参看在这套丛书里已出版的C.D.奥尔德斯的书《连分数》的第三章(特别是定理3.7)。

5.7
$$m^5=2m-3m^2=5m-3;$$
$$m^6=5m^2-3m=5-8m;$$
$$m^7=5m-8m^2=13m-8;$$
$$m^8=13m^2-8m=13-21m;\ \cdots.$$

如果f_n是斐波那契序列的第n项，m的n次乘幂的公式是

$$m^n=(-1)^n(f_{n-1}-f_nm).$$

对τ相应的情况是

$$\tau^4=3\tau+2;\quad \tau^5=5\tau+3;\ \tau^6=8\tau+5;\ \cdots;\tau^n=f_n\tau+f_{n-1}.$$

5.8 问题5.8的一个完整的解答在第六章129—133页给出。

5.9 在相继的长方形里顶点排列的方式反映出的事实是：每个长方形的短边(也就是排在最后的那两个顶点的连线)是下一个长方形的长边(也就是排在中间位置的那两个顶点的连线)。在每一种情况下，从第一个顶点画一条45°线，就到了下一个长方形的第一个顶点。

5.10 这个之字形的每一条后继的线段的长度都是从前面一条线段的长度按因子$m<1$缩短的。因此，这个之字

形的长度是下述无穷几何级数的和

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot m+\sqrt{2}\cdot m^2+\sqrt{2}\cdot m^3+\cdots$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1-m}=\frac{\sqrt{2}}{m^2}.$$

问题3.13(第57页)的解答证明了，任何首项是 a 公比是 $r<1$ 的无穷几何级数的和的公式是 $a/(1-r)$。

5.11

绕T的四分之一周角数(度数)		从T到螺线上的点的距离
1/6	(15°)	$AT\cdot m^{1/6}$
1/3	(30°)	$AT\cdot m^{1/3}$
1/2	(45°)	$AT\cdot m^{1/2}$
5/6	(75°)	$AT\cdot m^{5/6}$
4/3	(120°)	$AT\cdot m^{4/3}$
3/2	(135°)	$AT\cdot m^{3/2}$
5/3	(150°)	$AT\cdot m^{5/3}$
5/2	(225°)	$AT\cdot m^{5/2}$
…	…	…
$\frac{2n+1}{2}$	$\left(\frac{2n+1}{2}\cdot 90°\right)$	$AT\cdot m^{(2n+1)/2}$

5.12 如果 t 取负值，我们得到螺线从 AT 按逆时针方向的延长，当 t 的值变得越来越小时(也就是说，当 t 趋近于 $-\infty$时)，R 无限增加。

5.13 为了用图5.11上的螺线把数 R_1乘以一个数 R_2(在这里把距离 AT 取作度量的单位)，我们用直尺定出螺线上到 T 的距离是 R_1与 R_2的点 P_1与 P_2:

$$P_1T=R_1,\qquad P_2T=R_2.$$

现在我们随着螺线从点 A 到点 P_1，用 a_1表示螺线的径

向向量从 TA 到 TP_1所必须转动的角。(注意如果 $R_1<1$，那末我们按顺时针方向到达 P_1，α_1将取正值；如果 $R_1>1$，那末我们按逆时针方向到达 P_1，α_1 将取负值。)其次，我们随着螺线从 A 到 P_2，量出径向向量从 TA 到 TP_2所必须转动的角 α_2。现在我们把角 α_1和 α_2加起来，从 A 点开始，永远沿着螺线把直线 AT 转动 $\alpha_1+\alpha_2$角。这就导出一个螺线上的点 P_3，它到 T 的距离是

$$P_3T=R_1\cdot R_2.$$

这个方法就是指数式的乘法规律的几何解释：给定

$$R_1=m^{\alpha_1},\qquad R_2=m^{\alpha_2},$$

我们已经求出

$$R_1\cdot R_2=m^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

5.14 如果径向向量 $TP_1, TP_2, \cdots, TP_n$ 具有相同的方向，但有不同的大小 $R_1, R_2, \cdots, R_n$，那末，从通过 T 与 A 的直线出发，这条直线通过曲线上的点从 A 到 P_1，到 P_2，$\cdots$，到 P_n 时，对应的转角 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 互相只差 2π 弧度(绕 T 的一周，也就是 4 个四分之一周角)的整数倍。这个性质对应了长度 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 代表的数的对数仅仅首数不同，也就是说，仅仅是对数的整数部分不同。(如果 α 用四分之一周度量，这些对数相差 4 的倍数。)如果 α 是在$4k$ 和$4(k+1)$四分之一周角之间，$\alpha-4k$ 对应的是尾数，而且确定了直线 TP 的方向，而首数$4k$ 确定点 P 在螺线的哪一个“环”上。

第六章

6.1 相反地，假设存在整数 a 和 b 使

$$\frac{a}{b}\cdot(1+\sqrt{2})=1。$$

$$1+\sqrt{2}=\frac{b}{a},$$

或者

$$\sqrt{2}=\frac{b}{a}-1=\frac{b-a}{a}.$$

但是如果 b 和 a 是整数，$b-a$ 也是一个整数，最后一个等式说明$\sqrt{2}$是有理数，这是假的。因此$1+\sqrt{2}$的倒数不是有理数。

6.2 设 d 是 a 与 b 的最大公因数，设 x 与 y 是整数。那末很清楚，整数

$$ax+by=c=a'dx+b'dy=d(a'x+b'y)$$

能被 d 整除。

反过来，如果 c 可以被 a 与 b 的最大公因数 d 整除，那末我们可以用下面的方法求出整数 x 与 y 使

$$ax+by=c.$$

我们把方程用 d 除，得

$$a'x+b'y=c',$$

在这里 a' 与 b' 是互质数。在这种情况下已知存在整数 x_1 与 y_1，使

$$a'x_1+b'y_1=1;$$

这样整数 $x=c'x_1$，$y=c'y_1$将满足

$$a'x+b'y=c',$$

因此也有 $ax+by=c$（参看这套丛书已出版的C.D.奥尔德斯的《连分数》中关于欧几里得算法的讨论）。

6.3 2^{n-1}, $n=1,2,3,\cdots$.

6.4 当$N=1$,很清楚N以及它的各位的和模3有相同的余数。这证明了归纳法的第一步。

假设k是一个整数，使k以及它的各位的和模3有相同余数，也就是说

$$k=3q+r, \quad 0\leqslant r<3,$$

并且k的各位的和由

$$3s+r, \quad 0\leqslant r<3$$

给出来。

为了证明归纳步，我们必须说明$k+1$以及它的各位的和当除以3时有相同的余数。当$0\leqslant r+1<3$，我们有

$$k+1=3q+(r+1);$$

在另一种情况下

$$k+1=3(q+1).$$

如果一个数k的最后m $(m\geqslant 0)$位都是9，当把1加到k上，这些9都会变成0，但是不等于9的第一位会增加1。因为k的各位的和是$3s+r$，所以我们可以把$k+1$的各位的和写成下面的形式

$$(3s+r)+1-9m,$$

它等于 $$3(s-3m)+(r+1).$$

因此$k+1$与$k+1$的各位的和模3有相同的余数。

6.5 这个断言对$n=1$是真的。假定对$n=k$，

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1),$$

考虑$n=k+1$的情形。用归纳法假设我们得到

$$1+2+\cdots+k+k+1=\frac{1}{2}k(k+1)+k+1,$$

它能写成

$$\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k+1=\frac{1}{2}(k^2+3k+2)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

因为这是 $n(n+1)/2$的形式，证完。

6.6 对所有整数 n，2^{n+9}超过$(n+9)^3$。

6.7 当k是一个大于 2 的整数，那末

$$2k^2>k^2+2k+2>(k+1)^2$$

是眞的；为了说明这一点，注意当$k>2$时，$k-2>0$，并且因为k是一个整数，$k-2\geqslant 1$，$k\geqslant 3$，因此$k(k-2)>1$，或者$k^2>2k+1$。因此

$$2k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1,$$

也就是说，$2k^2>(k+1)^2$。

这个事实不能让我们证明对所有的$n>2$，2^n超过n^2，因为，为了要用$2^{k+1}>2k^2$，我们必须假定$2^k>k^2$，而2^3超过3^2是不眞的。

6.8 (a) 对$N=1$，我们有$(2^1)^1=2=2^{(1^2)}$。如果当$N=k$，

$$(2^k)^k=2^{(k^2)},$$

那末

$$\begin{aligned}(2^{k+1})^{k+1}&=(2^k\cdot 2)^{k+1}=(2^k\cdot 2)^k(2^k\cdot 2)\\&=(2^k)^k\cdot 2^{2k}\cdot\ 2=2^{(k^2+2k+1)}\\&=2^{[(k+1)^2]}.\end{aligned}$$

(b) 根据本题的(a)

$$2^{N^2}=(2^N)^N\geqslant(N^2)^N.$$

6.9 如果 $N\geqslant 2$，$2^k\geqslant k^N$，并且 $k\geqslant N^2$，那末

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k\geqslant 2k^N=k^N+k^N\geqslant k^N+N^2k^{N-1},$$

因此

$$\begin{aligned}
2^{k+1}&\geqslant k^N+Nk^{N-1}+N(N-1)k^{N-1}\\
&\geqslant k^N+Nk^{N-1}+N(N-1)k^{N-2}\\
&>k^N+Nk^{N-1}+\frac{N(N-1)}{2}k^{N-2}+\frac{N(N-1)}{3}k^{N-2}\\
&\geqslant k^N+Nk^{N-1}+\frac{N(N-1)}{2}k^{N-2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{3}\\
&\quad\times k^{N-3}\\
&=k^N+Nk^{N-1}+\frac{N(N-1)}{2}k^{N-2}\\
&\quad+\frac{N(N-1)(N-2)}{2\cdot 3}k^{N-3}+\frac{N(N-1)(N-2)}{2\cdot 3}k^{N-3}\\
&\geqslant\cdots\\
&\geqslant k^N+Nk^{N-1}+\frac{N(N-1)}{2!}k^{N-2}\\
&\quad+\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}k^{N-3}+\cdots\\
&\quad+\frac{N(N-1)\cdots[N-(N-2)]}{(N-1)!}k^{N-(N-1)}+1\\
&=(k+1)^N.
\end{aligned}$$

6.10 定理 1 至 3 已经证明过了。

对于$N\geqslant 4$，由题6.8，只要 $n=N^2$，就有$2^n\geqslant n^N$，再由题6.9，只要 $n>N^2$，就有$2^n>n^N$。

6.11 让我们在现在的情形下模仿拉格朗日定理的证明（第130—133页）并且来观察什么样的修改是必需的。

盒子原理告诉我们，任何余数（mod N）的序列在N^2+2项以内有重复的相邻的数对。如果a_i, a_{i+1}和a_k, a_{k+1}这两对有相同的余数，那末从

$$a_i \equiv a_k \pmod N \quad 及 \quad a_{i+1} \equiv a_{k+1} \pmod N$$

我们得到

$$3a_i \equiv 3a_k \pmod N \ 及\ 2a_{i+1} = 2a_{k+1} \pmod N.$$

从它推出

$$2a_{i+1} + 3a_i \equiv 2a_{k+1} + 3a_k \pmod N,$$

或者
$$a_{i+2} \equiv a_{k+2} \pmod N.$$

用同样的推理

$$a_{i+3} \equiv a_{k+3} \pmod N,$$
$$a_{i+4} \equiv a_{k+4} \pmod N,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

它说明了由$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$给出的余数（mod N）的序列是周期的。

设序列的周期是p。那末从某个j，譬如说$j=T$，开始

$$a_j \equiv a_{j+p} \pmod N \qquad (j \geqslant T).$$

假设a_T不是序列的第一项。从递推公式我们有

$$\begin{aligned} 3a_{T-1} &= a_{T+1} - 2a_T \\ &\equiv a_{T+1+p} - 2a_{T+p} \pmod N \\ &= 3a_{T+p-1} \pmod N. \end{aligned}$$

因此
$$3a_{T-1} \equiv 3a_{T-1+p} \pmod N,$$

或者
$$3(a_{T-1} - a_{T-1+p}) \equiv 0 \pmod N.$$

很清楚，只要我们假定3和N是互质数，就能得出结

论

$$a_{T-1}\equiv a_{T-1+p} \pmod N;$$

否则，N不一定是 $a_{T-1}-a_{T-1+p}$ 的因子。因为T是一个有限整数，这个过程一次次地用到$T-1, T-2, T-3, \cdots$，最后一定导致

$$a_1\equiv a_{1+p} \pmod N。$$

因此，由 $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$定义的序列的余数 (mod N)($N\geqslant 2$)的序列(在这里初始值 a_1和 a_2可以是任意给定的整数)是周期的。如果 3 和N是互质数，那末周期部分从 a_1的余数开始。

6.12 由任意的初始的整数 a_1与 a_2及

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}$$

定义的任意序列的余数 (mod N)($N\geqslant 2$)的序列是周期的；在最多 N^2+2项之内会出现一对重复。如果N和 β 是互质数，那末周期部分从 a_1的余数开始。

6.13 任意的由

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}+\gamma a_{n-2}, \qquad n\geqslant 3$$

定义的序列的余数 (mod N) 的序列在 N^3+3 项里有重复的三项组出现。如果N与 γ 是互质数，余数 (mod N) 的序列从开始起就是周期的。

6.14 一般，把第 $(n+1)$ 项表示为前面 n 项的线性组合(在第 n 项以后)，按这个规律构造的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的余数 (mod N) 的序列从开始起是周期的，并将在 N^n+n 项以内重复，只要当N与递推公式里最前面的那一项的系数没有大于 1 的公共因子。

6.15 因为所有有理数的集合是可数的，所以对所有有理数 a，直线 $x=a$ 构成了可数无限多条直线。同样，对

有理数 b，c，d，直线 $y=b$，$x=c$，$y=d$ 的集合也都是可数的。因为所有的特殊长方形由四条边组合而成，每条边都来自这些集合，于是我们得 $\mathscr{A}_0\cdot\mathscr{A}_0\cdot\mathscr{A}_0\cdot\mathscr{A}_0\cdot=\mathscr{A}_0$ 个可能的特殊长方形。（它甚至包括一对对边重合的退化长方形。因此，不退化的特殊长方形当然构成了一个可数集合。）

6.16 设 p 是点 (x_0, y_0)，设 d 是从 P 到给定长方形上任意点的最短距离。那么存在数 $\delta_1<d/4$ 与 $\delta_2<d/4$ 使

$$x=x_0+\delta_1=a \quad \text{及} \quad x=x_0-\delta_2=a'$$

是有理数，又存在数 $\varepsilon_1<d/4$ 与 $\varepsilon_2<d/4$ 使

$$y=y_0+\varepsilon_1=b \quad \text{及} \quad y=y_0-\varepsilon_2=b'$$

是有理数。从它得出特殊长方形 R 的四条边在直线 $x=a, x=a', y=b, y=b'$ 上，并且 P 点在这个长方形内部。进一步，因为 R 的直径的长度是

$$\sqrt{(\delta_1+\delta_2)^2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}<d,$$

从 P 到 R 上最远点的距离小于从 P 到给定长方形的最短距离。因此，特殊长方形整个在给定的那一个里面。

6.17 我们要证明在集合 X 中存在一点 P，使得每一个包含 P 的长方形都包含 X 的不可数多个点，如果这样的点不存在，那末对于集合 X 中每一点，都能找到一个长方形，使它的内部只包含属于 X 的点的一个可数集合。在这种情况下，习题6.16的解答表明，X 的每一点在一个特殊长方形里，这个特殊长方形整个在那个上面取定的长方形里，因此这个特殊长方形也最多只包含可数无限多个 X 的点。我们已经证明了（习题6.15）所有特殊长方形的集合有势 $\mathscr{A}_0$，因此，我们选取的那些特殊长方

形的集合当然也是可数的。此外，因为这些特殊长方形中的每一个包含X的点的一个可数集合，从$\mathscr{A}_0\cdot\mathscr{A}_0=\mathscr{A}_0$推出集合$X$是可数的。但是这个结论与假设矛盾；因此，一定存在$X$中的一点$P$，使得每一个包含$P$的长方形都包含不可数多个属于集合$X$的点。

6.18 取点P为习题6.17解答里得到的点，以及一个逼近P的减小的区间序列(平面情形是长方形)。在每个这样的区间里，从X提供的不可数无限多个点里取一个点。这给了X的点的一个序列$P_1, P_2, P_3, \cdots$，它构成了所要求的收敛序列。这样的证明称作“非构造性的”，因为它没有提供一个真正定义每个点P_n的手段。因为我们对X除了知道它是不可数的以外，不知道别的任何东西，所以可供我们使用的选择方法是没有的。

参考文献

[1] Cajori, Florian, A History of Mathematics, New York and London, The Macmillan Company, 1919.

[2] 柯朗特著，朱言钧译，柯氏微积分学，上海中华书局，1949.

[3] 柯朗德，罗宾斯著，齐植粱译，近代数学概观，上海中华书局，1951.

[4] Coxefer, H.S.M.,Introduction to Geometry, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1961.

[5] Davis, Philip J., The Lore of Large Numbers, Vol.6, New Mathematical Library, New York and New Haven, Random House, Inc.and Yale University, 1961.

[6] Eves, Howard, An Introduction to the History of Mathematics, New York, Rhinehart and Company, 1958.

[7] Frankel, Abraham A., Abstract Set Theory, Amsterdam, Holland, North-Holland Publishing Company, 1953.

[8] Hardy, Godfrey H.,A Course of Pure Mathematics, Cambridge, Cambridge University Press, 1938.

[9] Heath, Thomas L.,Manual of Greek Mathematics, London and New York, Oxford University Press, 1931.

[10] Hilbert, David and Cohn-Vossen, Stephan, Geometry and the Imagination, New York, Chelsea, 1952.

[11] Neugebauer, Otto, The Exact Sciences in Antiquity, Copenhagen, Denmark and Princeton, New Jersey, E. Munksgaard and Princeton University Press, 1951.

[12] Niven, Ivan, Numbers, Rational and Irrational, Vol.1, New Mathematical Library, New York and New Haven, Random House, Inc.and Yale University, 1961.

[13] C.D.奥尔德斯，连分数，北京大学出版社，1984.

[14] Rademacher, Hans and Toeplitz, Otto, The Enjoyment of Mathematics, Princeton, Princeton University Press, 1957.

[15] Steinhaus, Hugo, Mathematical Snapshots, New York, G.E. Stechert and Company, 1938(2nd ed.,London and New York, Oxford University Press, 1960).

[16] Wilder, Raymond L.,Introduction to the Foundations of Mathematics, New York, John Wiley and Sons, Inc.,1952.

[17] U.M.亚格龙，几何变换，北京大学出版社即将出版.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝无限的用处－作者：Ｌ·兹平　　出版社：　出版日期：１９８５年１０月第１版　页数：１７９
作者＝
页数＝１０００
ＳＳ号＝０
出版日期＝

目录
正文