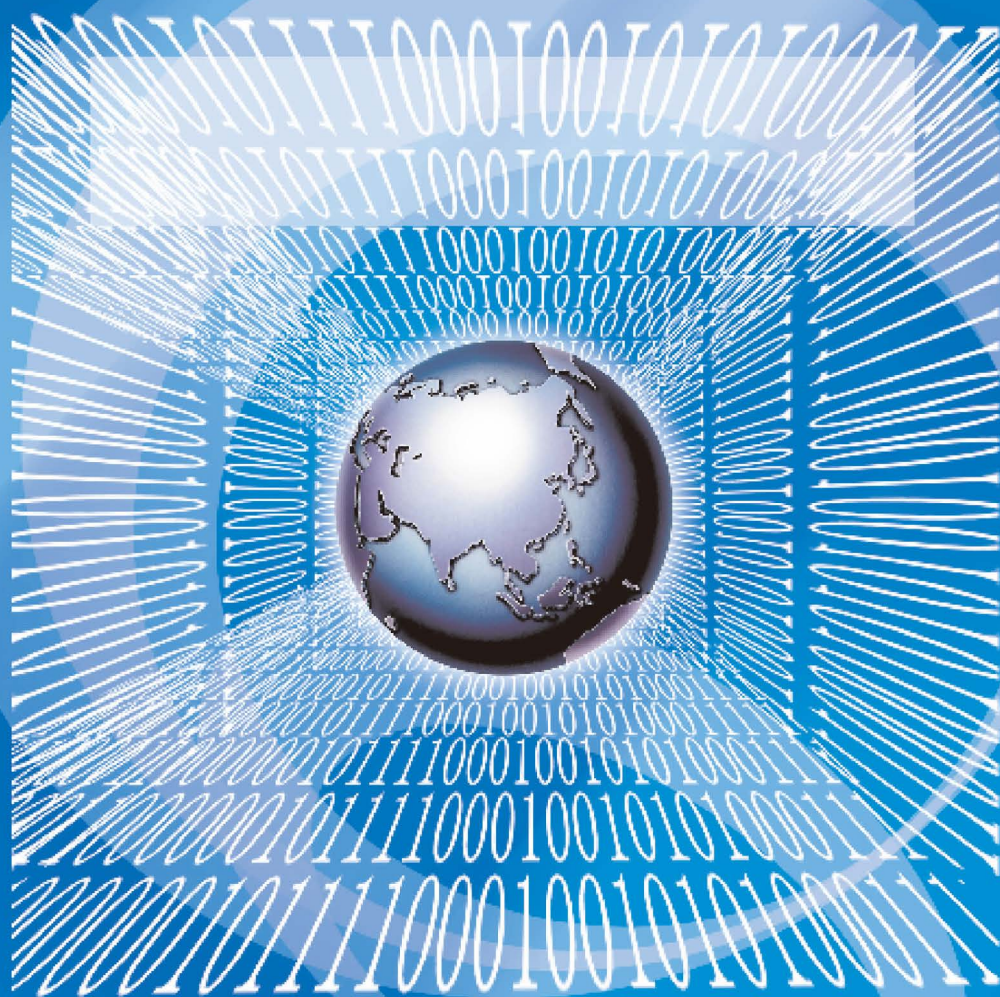


ISSN 0488-7395

数学通讯

SHUXUE TONGXUN



主管：中华人民共和国教育部

主办：华中师范大学 湖北省数学学会 武汉数学学会

ISSN 0488-7395



2019.

1

上半月



赏析几道以集合为载体的创新型试题

林运来

(福建省漳州开发区南滨大道318号厦门大学附属实验中学, 363123)

以集合为载体的创新型试题是高考、自主招生以及竞赛命题的热点,常与简易逻辑、函数、方程、不等式、几何等知识交汇在一起,以集合知识为工具,灵活考查相关概念和性质.解题时,往往需要根据相关概念和性质进行计算和推理,下面举例说明.

一、讨论集合元素个数

例1 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$, $B = \{2x | x \in A\}$, $C = \{x | 2x \in A\}$, 则 $B \cap C$ 的元素个数为_____.

解析 由已知得

$$B \cap C = \{2, 4, 6, \dots, 198\} \cap \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \frac{99}{2}\} = \{2, 4, 6, \dots, 48\},$$

所以 $B \cap C$ 的元素个数为 24.

评析 解答由描述法给出的集合问题时,抓住集合“代表元素”及其特征是解题的关键.

二、结合逻辑知识考查计数问题

例2 若集合 $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$, 且下列四个关系:

① $a = 1$; ② $b \neq 1$; ③ $c = 2$; ④ $d \neq 4$

有且只有一个是正确的, 则符合条件的有序数组 (a, b, c, d) 的个数是_____.

解析 根据题意可以分四种情况:

(1) 若 ① 正确, 则 $a = 1, b = 1, c \neq 2, d = 4$, 符合条件的有序数组有 0 个;

(2) 若 ② 正确, 则 $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 2, d = 4$, 符合条件的有序数组为 $(2, 3, 1, 4)$ 和 $(3, 2, 1, 4)$;

(3) 若 ③ 正确, 则 $a \neq 1, b = 1, c = 2, d = 4$, 符合条件的有序数组为 $(3, 1, 2, 4)$;

(4) 若 ④ 正确, 则 $a \neq 1, b = 1, c \neq 2, d \neq 4$, 符合条件的有序数组为 $(2, 1, 4, 3), (4, 1, 3, 2)$ 和 $(3, 1, 4, 2)$.

所以符合条件的有序数组共有 6 个.

评析 分类讨论时做到“不重不漏”是解题的关键.

三、结合新定义考查计数问题

例3 用 $|S|$ 表示集合 S 中的元素的个数, 设 A, B, C 为集合, 称 (A, B, C) 为有序三元组. 如果集合 A, B, C 满足 $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1$, 且 $A \cap B \cap C = \emptyset$, 则称有序三元组 (A, B, C) 为最小相交. 由集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的子集构成的所有有序三元组中, 最小相交的有序三元组的个数为_____.

解析1(参考答案) 由题意可知 A, B, C 三个集合不可能有一元集, 又因为 S 中只有 4 个元素, 则 A, B, C 中不可能有两个集合都有 3 个元素, 否则不能满足 $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1$, 但 A, B, C 中可能三个集合都含有 2 个元素, 也可能是一个集合有 3 个元素, 其它两个集合含有 2 个元素, 情形如下: 如果是三个集合都含有 2 个元素这种情形, $A = (a_1, a_2), B = (a_2, a_3), C = (a_3, a_1)$, 这种类型有 $C_4^3 = 4$ 种可能; 另外, 第 4 个元素 a_4 可任意加入上述 4 种可能中的每一个集合, 又形成不同的情形, 这样就又有 $3 \times 4 = 12$ 种. 于是就共有了 $4 + 12 = 16$ 种情形, 在每一种情形 (A, B, C) 中, 它们的顺序可能打乱, 每种可形成 $A_3^3 = 6$ 个, 因此共有 $16 \times 6 = 96$ 个有序三元组.

评析 参考解答技巧性强, 显得很 unnatural, 一般不容易想到. 数学语言包括文字语言、符号语言和图形语言, 高考中主要是用文字语言和符号语言, 辅之以图形语言表述、呈现试题内容, 考查的重点是文字语言, 并要求考生能够根据实际情况进行三种语言的转换. 美国数学家斯蒂恩说过: “如果一个特定的问题可以转化为一个图形, 那么

思维就整体地把握了问题。”有的数学问题,通过画图,往往能激发出解题灵感,有的问题在画出图形后答案也就呼之欲出. 解答此题若从图形入手,以形助数,不仅能使解题思路自然简洁,还能避繁就简,领悟“深刻寓于简单”的道理,进而发现数学之美.

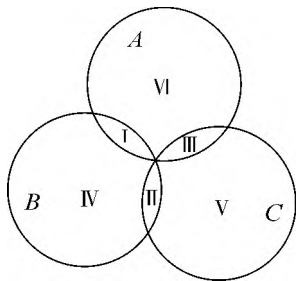


图 1

解析 2 由已知可得集合 A, B, C 之间的关系如图 1, 问题等价于从 1, 2, 3, 4 这四个数中先选出三个不同的数填入区域 I, II, III 中, 每个区域填入一个数, 剩下的一个数要么填入区域 IV, V, VI 之一, 要么不填, 共有 $A_4^3 + A_4^3 A_3^1 = 96$ 种不同的填法, 所以最小相交的有序三元组的个数为 96.

四、结合新定义讨论集合性质

例 4 设 S 是整数集 $\mathbb{Z}$ 的非空子集, 如果 $\forall a, b \in S$, 有 $ab \in S$, 则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T, V 是 $\mathbb{Z}$ 的两个不相交的非空子集, $T \cup V = \mathbb{Z}$, 且 $\forall a, b, c \in T$, 有 $abc \in T$; $\forall x, y, z \in V$, 有 $xyz \in V$, 则下列结论恒成立的是 ()

- (A) T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的
- (B) T, V 中至多有一个关于乘法是封闭的
- (C) T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭的
- (D) T, V 中每一个关于乘法都是封闭的

解析 取 $T = \mathbb{N}, V = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, 则 T 对乘法封闭, 而 V 对乘法不封闭, 排除 (D) 项. 令 $T = \{-1, 0, 1\}, V = \mathbb{Z} \setminus T$, 则 T, V 都对乘法封闭, 排除 (B)、(C) 两项, 应选 (A).

评析 根据题设条件“构造”出满足题意的集合是解题的“钥匙”.

五、结合高等数学知识讨论集合性质

例 5 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 $a, b \in P$, 都有 $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} \in P$ (除数 $b \neq 0$), 则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbb{Q}$ 是数域, 数集 $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 也是数域. 有下列命题:

- ① 整数集是数域;
- ② 若有理数集 $\mathbb{Q} \subseteq M$, 则数集 M 必为数域;
- ③ 数域必为无限集;
- ④ 存在无穷多个数域.

其中正确的命题的序号是 _____. (把你认为正确的命题的序号都填上)

解析 对 ①, 除法如 $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ 不满足, 所以排除;

对 ②, 取 $M = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, 对乘法如 $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \notin M$ 不满足, 所以排除;

对 ③, 数域有 1, 一定有 $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, \dots$, 依次类推必然包含整数集, 因而为无限集;

对 ④, 类比数域 $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, 可以构造数集 $F_1 = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, F_2 = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \dots$, 可以证明 $F_1, F_2, \dots$ 都是数域, 显然这样的数域有无限个.

故正确命题的序号是 ③④.

评析 引入“数域”这一新概念是命题的亮点, 试题通过“举例说明”的方式帮助考生理解“数域”这个概念, 考查学生是否能将对新概念的学习经验有效迁移到更为深入或更为复杂的问题情境中去, 既考查了考生阅读数学素材的能力, 又比较符合考生实际的认知水平, 能有效考查学生的数学素养.

利用新定义解决问题是高考和竞赛命题的一个热点, 此类创新型的概念理解题, 多以数系推广等高等数学知识为背景, 解题关键在于准确把握新概念, 根据定义合理进行推理论证.

六、结合子集个数讨论求和问题

例 6 设集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 定义 $\sum_{i=1}^n a_i$ 为集合 S 的“容积”. 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 求 A 的所有子集的“容积”之和.

解析 显然, 集合 A 的“容积”为 $\sum_{i=1}^8 i = 36$, 因为 A 的子集共有 2^8 个, 对集合 A 的子集按如下方式进行“配对”, 即若 $M \subseteq A, N \subseteq A$, 且 $M \cap N = \emptyset, M \cup N = A$, 则将集合 M, N “配对”, 则集合 M, N 的“容积”之和为 36, 所以集合 A 的所有子集的“容积”之和为 $\frac{1}{2} \times 36 \times 2^8 = 4608$.

评析 要求集合 A 的所有子集的“容积”之

和,即求集合 A 的所有子集的元素之和. 类比高斯计算“ $1+2+3+\cdots+100$ ”的方法,通过对集合 A 的子集进行两两配对,构造出“等和”,把求和问题转化为求积问题,使问题快速得解.

七、集合的分拆

例7 已知集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 选择集合 S 的两个非空子集 A, B , 使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选法有_____种.

解析 按集合 A 中最大的数可以分为四种情况:

(1) 若 A 中最大的数为 1, 则有 $1 \times (2^4 - 1) = 15$ 种不同选法;

(2) 若 A 中最大的数为 2, 则有 $2 \times (2^3 - 1) = 14$ 种不同选法;

(3) 若 A 中最大的数为 3, 则有 $2^2 \times (2^2 - 1) = 12$ 种不同选法;

(4) 若 A 中最大的数为 4, 则有 $2^3 \times 1 = 8$ 种不同选法;

所以符合题意的不同选法共有 $15 + 14 + 12 + 8 = 49$ 种.

评析 通过对集合 A 中最大的数进行讨论, 利用分步计数原理, 根据集合的非空子集个数的相关结论, 问题迎刃而解. 当然, 还可以把问题推广到一般情况:

已知集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, n\} (n \in \mathbf{N}^*)$, 选择集合 S 的两个非空子集 A, B , 使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选法有_____种.

读者不妨一试.

八、求未知数的值

例8 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是 5 个正整数, 从中任取 4 个数求和所得的集合为 $\{44, 45, 46, 47\}$, 求 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的值.

解析 记 $S = \sum_{i=1}^5 x_i$, 若 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 两两不等, 那么对 $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} (i \neq j)$ 都有 $S - x_i \neq S - x_j$, 这样 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 任取 4 个数求和共有 5 个不同的值, 与已知条件矛盾. 于是 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 中必有两个数相等, 根据对称性, 不妨设 $x_1 = x_2 = a, x_3 = b, x_4 = c, x_5 = d$. 则问题可以转化为:

对正整数 a, b, c, d , 集合 $\{a+b+c+d, 2a+b+c, 2a+b+d, 2a+c+d\} = \{44, 45, 46, 47\}$,

注意到集合元素的表达式关于 a 对称, 根据对称性, 只需讨论 a 在序列 a, b, c, d 中的大小.

(1) 若 $a < b < c < d$, 则

$$\begin{cases} a+b+c+d=47, \\ 2a+b+c=44, \\ 2a+b+d=45, \\ 2a+c+d=46, \end{cases}$$

所以 $4a = 41$, 矛盾.

(2) 若 $b < a < c < d$, 同(1)的解答可得 $a = 11, b = 10, c = 12, d = 13$.

(3) 若 $b < c < a < d$, 同(1)的解答可得 $4b = 39$, 矛盾.

(4) 若 $b < c < d < a$, 同(1)的解答可得 $4b = 38$, 矛盾.

综上所述, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的值为 $x_1 = x_2 = 11, x_3 = 10, x_4 = 12, x_5 = 13$ 及其转换.

评析 通过探究得出待求未知数的“特性”——其中必有两个数相等, 结合“对称性”, 有助于简化对问题的讨论.

结束语 集合是数学的基本概念, 集合是掌握和运用数学语言的基础, 是学好数学的重要工具之一, 是高考和竞赛的一个必考热点. 集合语言是现代数学的基本语言, 利用集合语言可以简洁、准确地表达数学内容, 简捷地进行数学运算. 因此, 教学时要立足课本, 掌握集合的概念及表示方法, 集合与元素的关系, 正确求出所要求的集合, 是解决问题的基础, 厘清集合与集合、集合与元素之间的关系, 合理进行集合运算是解题的关键.

解决集合有关的综合问题, 要重视数学思想和方法的应用. 解答与集合有关的问题时, 常用的思想方法有:

(1) 数形结合思想, 主要是韦恩图和数轴的使用, 利用图形的直观性, 以“形”助“数”, 形象、直观、简捷;

(2) 等价转化思想, 解答集合问题时, 有时需要对题设条件进行等价转化, 把问题转化为自己熟悉的问题来解决;

(3) 分类讨论思想, 分类讨论时要注意“标准”的寻求和“层次”的划分, 要做到“标准”讨论合理、自然, “层次”划分明确、清晰.

总之, 解答与集合有关综合问题时, 用好用活数学思想方法, 就能化繁为简, 化难为易, 收到简中求道之效.

(收稿日期: 2018-09-23)

借力“动态分析法”巧解题

沈世金

(江苏省石庄高级中学, 226531)

所谓“动态分析法”,就是指将静态的问题放置到一系列的运动变换过程中去加以思考分析. 这样处理具体问题,有利于从运动变换的角度对问题进行探究. 值得一提的是,必须注意具体的“动”的方式,通过在“动”中去关注、运用题设条件,有助于迅速分析、解决目标问题. 灵活运用这种将静态问题动态化的分析思想,往往可以得到简洁、新颖别致的解法.

类型一:借助“上下平移分析”,巧求取值范围.

处理与函数图象紧密相关的取值范围问题时,若能灵活借助上下平移直线加以分析,则往往有利于从动态变化中直接观察获解.

例1 (2018年四川成都一诊) 设函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 若 $x_1 x_2 < 0$, 且 $f(x_1) - f(x_2) = 0$, 则 $|x_2 - x_1|$ 的取值范围为()

- (A) $(\frac{\pi}{6}, +\infty)$. (B) $(\frac{\pi}{3}, +\infty)$.
(C) $(\frac{2\pi}{3}, +\infty)$. (D) $(\frac{4\pi}{3}, +\infty)$.

解析 如图1,先画出 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的大致图象,记点 $M(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $N(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 $|MN| = \frac{\pi}{6}$. 设点 A, A' 是垂直于 y 轴的直线 l 与函数 $f(x)$ 的图象的两个交点(A, A' 分别位于 y 轴两侧),这两个点的横坐标分别记为 x_1, x_2 , 则通过上下平移直线 l 分析可知: $|x_2 - x_1| = |AA'| \in (|MN|, +\infty)$, 即 $|x_2 - x_1| \in (\frac{\pi}{6}, +\infty)$, 故选(A).

评注 结合本题的解析思路,继续分析可知:

设函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, $x \in [-\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$, 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则当 $x_1 x_2 >$

0 时, $|x_2 - x_1|$ 的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{6})$; 当 $x_1 x_2 < 0$

时, $|x_2 - x_1|$ 的取值范围是 $(\frac{\pi}{6}, \pi]$.

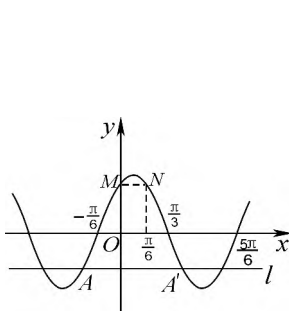


图1

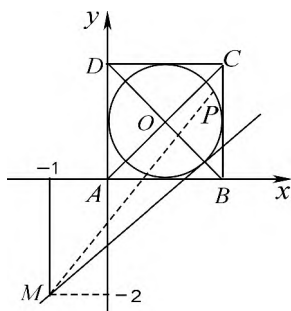


图2

类型二:借助“绕定点旋转分析”,巧解有关直线与圆的交汇问题

处理直线与圆的交汇问题时,若直线过定点,则可以让直线绕定点旋转分析,以便从动态变化中把握变化规律.

例2 (2018届高三年级西安八校联考(二)) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为2, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 动点 P 满足 $|\vec{OP}| = 1$, 若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AD}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$, 则 $\frac{2m+1}{2n+2}$ 的最大值为_____.

解析 如图2,建立平面直角坐标系 xAy , 则由题设知点 $B(2,0), D(0,2)$, 又 $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AD}$, 所以可得点 $P(2m, 2n)$, 所以 $\frac{2m+1}{2n+2} = \frac{1}{k_{PM}}$, 其中点 $M(-1, -2)$.

因为 $|\vec{OP}| = 1$, 所以易知点 P 的轨迹为圆 O , 且圆心坐标为 $(1,1)$, 半径为1.

于是,让过点 M 的且与圆 O 有公共点的直线绕着定点 M “旋转分析”易知:当过点 $M(-1, -2)$ 的直线与圆 O 的右下方相切时,直线 PM 的斜率取得最小值. 设过点 $M(-1, -2)$ 的直线为 $y +$

$2 = k(x+1)$, 则根据相切得 $\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ (舍去). 从而, k_{PM} 的最小值为 $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$, 故所求 $\frac{2m+1}{2n+2}$ 的最大值为 $\frac{3}{6-2\sqrt{3}}$, 即 $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

评注 本题难度较大, 综合性较强, 求解关键在于通过建系, 有利于从“数形结合”的角度理清题设已知条件; 而求目标式的最大值时, 关键在于根据目标式的几何意义加以思考.

类型三: 借助“开口的变化分析”, 巧解有关公共点问题

一般地, 若曲线是由具有公共点的两条射线组成, 且这两条射线的斜率互为相反数, 则处理该曲线与另一条曲线(或另一个函数的图象)的公共点问题时, 可让该曲线的开口逐渐变大加以分析, 以便从动态变化中获得较为直观、明了的认知.

例 3 (2018 年全国 I 卷) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$. 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho\cos\theta - 3 = 0$.

(1) 求 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

解析 (1) 因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho\cos\theta - 3 = 0$, 所以结合 $\rho^2 = x^2 + y^2, x = \rho\cos\theta$ 可得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, 即 $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

(2) 由(1)知曲线 C_2 是以点 $(-1, 0)$ 为圆心, 以 2 为半径的圆.

根据曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$ 可知, 曲线 C_1 是由关于 y 轴对称的两条射线组成, 且恒过定点 $(0, 2)$.

易知 $k \geq 0$ 不适合题意, 所以只需要考虑 $k < 0$ 的情形. 如图 3, 随着参数 k 的取值的不断增大(此时曲线 C_1 的开口也不断增大), 结合图形动态分析易知: 为满足曲线 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 则应满足曲线 C_1 的右支 $y = kx + 2 (x \geq 0)$ 恰好与曲线 C_2 表示的圆相切(此时曲线 C_1 的左支 $y = -kx + 2 (x \leq 0)$ 与曲线 C_2 表示的圆相交).

又根据直线 $y = kx + 2$ 与圆 $(x+1)^2 + y^2 =$

4 相切可得 $\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$, 结合 $k < 0$, 解得 $k = -\frac{4}{3}$.

综上, 所求曲线 C_1 的方程为 $y = -\frac{4}{3}|x| + 2$.

评注 参考该题的解析过程, 进一步探究易知: 当 $k < -\frac{4}{3}$ 时, 曲线 C_1 与 C_2 有 4 个不同的公共点; 当 $-\frac{4}{3} < k < 0$ 时, 曲线 C_1 与 C_2 有 2 个不同的公共点.

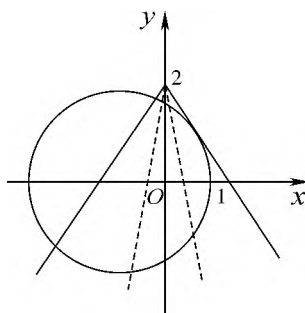


图 3

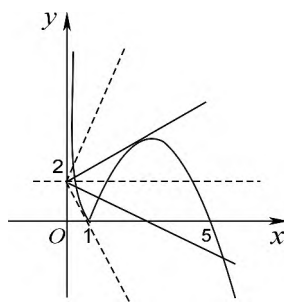


图 4

例 4 (成都市 2016 级高中毕业班摸底测试题 (理科)) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x \leq 1, \\ -x^2 + 6x - 5, & x > 1, \end{cases}$ 若曲线 $kx - |y - 2| = 0$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 4 个不同的公共点, 则实数 k 的取值范围是()

- (A) $(6 - 2\sqrt{7}, e)$. (B) $(6 - 2\sqrt{7}, 2)$.
(C) $(\frac{2}{3}, 2)$. (D) $(\frac{2}{3}, e)$.

解析 易知曲线 $kx - |y - 2| = 0$ 是由关于直线 $y = 2$ 对称的两条射线组成.

如图 4, 在同一坐标系内, 先画出函数 $f(x)$ 的图象, 再画曲线 $kx - |y - 2| = 0$.

先计算曲线的上支 $kx - y + 2 = 0 (y \geq 2)$ 与 $y = -x^2 + 6x - 5 (x > 1)$ 相切时 k 的取值. 将 $y = kx + 2$ 代入 $y = -x^2 + 6x - 5$ 整理得 $x^2 + (k-6)x + 7 = 0$, 从而根据相切得 $\Delta = (k-6)^2 - 28 = 0$, 解得 $k = 6 - 2\sqrt{7}$ 或 $k = 6 + 2\sqrt{7}$ (舍去, 根据切点的横坐标大于零可知).

再计算曲线的下支 $kx + y - 2 = 0 (y \leq 2)$ 与 $y = -\ln x (0 < x \leq 1)$ 相切时, k 的取值.

设切点坐标为 $(x_0, -\ln x_0)$, 则因为曲线的下支经过点 $(0, 2)$, 又对 $y = -\ln x$ 求导得 $y' = -\frac{1}{x}$,

所以可得 $-\frac{1}{x_0} = \frac{2 - (-\ln x_0)}{0 - x_0}$, 解得 $x_0 = \frac{1}{e}$, 所以 $-k = -\frac{1}{x_0} = -e$, 所以 $k = e$.

易知 $k \leq 0$ 不适合题意, 所以只需要考虑 $k > 0$ 的情形. 随着参数 k 取值的不断增大(此时曲线的开口也不断增大), 结合图形动态分析易知: 为满足函数 $f(x)$ 的图象与曲线有 4 个不同的公共点, 则应满足 $6 - 2\sqrt{7} < k < e$. 故选(A).

评注 如果认为曲线的上支 $kx - y + 2 = 0 (y \geq 2)$ 与 $y = -x^2 + 6x - 5 (x > 1)$ 相切时, 切点为(3, 4), 则容易误选(C)或(D); 如果认为曲线的下支 $kx + y - 2 = 0 (y \leq 2)$ 与 $y = -\ln x (0 < x \leq 1)$ 相切时, 切点为(1, 0), 则容易误选(B)或(C).

参考该题的解析过程, 进一步探究易知: 当 $0 < k < 6 - 2\sqrt{7}$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与曲线有 6 个不同的公共点; 当 $k = 6 - 2\sqrt{7}$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与曲线有 5 个不同的公共点; 当 $k = e$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与曲线有 3 个不同的公共点; 当 $k > e$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与曲线有 2 个不同的公共点.

总之, 结合上述归类解析可知: 若将静态问题看作是某一系列运动变换过程中某一瞬间的相对状态, 则往往有利于从整体上把握问题, 认清实质, 同时也为分析、研究问题开辟了一个崭新的思维角度——静态问题“动态分析”!

(收稿日期: 2018-09-08)

例谈化归思想在数学解题中的运用^{*}

鄢宇生 胡典顺

(华中师范大学数学与统计学学院, 430079)

所谓化归思想, 是将问题由难化易、由繁化简的思维策略, 它是一种重要的解题思想, 也是一种强大的解题手段. 化归思想的运用有助于认清问题的根本, 把握问题的关键核心. 因此, 如何培养学生更好地运用化归思想是一个重要的问题. 下面, 笔者将结合几道高考题, 从解题思路来解析其中化归思想的运用.

一、从正面到反面

例 1 (2013·陕西高考) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

(1) 推导 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式;

(2) 设 $q \neq 1$, 证明数列 $\{a_n + 1\}$ 不是等比数列.

分析 这里只讨论问题(2). 证明一个数列是等比数列的方法很多, 比较容易, 但证明一个数列不是等比数列却不太容易. 此时, 正面解题遇到

了瓶颈, 就要想到从问题的反面入手. 要证明“若 $q \neq 1, \{a_n + 1\}$ 不是等比数列”不容易, 但证明其等价的逆否命题“若 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列, 则 $q = 1$ ”却不难. 此时, 只需利用等比数列的概念和性质, 从假设的结论出发反向推导出 $q = 1$, 即可证明此题.

解 假设 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列, 则对任意的 $k \in \mathbf{N}_+$,

$$(a_{k+1} + 1)^2 = (a_k + 1)(a_{k+2} + 1),$$

$$a_{k+1}^2 + 2a_{k+1} + 1 = a_k a_{k+2} + a_k + a_{k+2} + 1,$$

$$a_1^2 q^{2k} + 2a_1 q^k = a_1 q^{k-1} \cdot a_1 q^{k+1} + a_1 q^{k-1} + a_1 q^{k+1},$$

$$\text{因为 } a_1 \neq 0, \text{ 所以 } 2q^k = q^{k-1} + q^{k+1}.$$

$$\text{因为 } q \neq 0, \text{ 所以 } q^2 - 2q + 1 = 0, \text{ 即 } q = 1,$$

^{*} 2018年华中师范大学国创A类项目——师范生数学核心素养和基于四基四能教学能力建设的研究(AA20180419172318431C).

这与已知矛盾.

所以假设不成立,故 $\{a_n + 1\}$ 不是等比数列.

评注 本题遵循了化归思想中正难则反的原则,即正面遇到困难时,可考虑设法从反面入手解决问题.通过“化正为反”的反证法,我们假设结论的反面成立,推导出与原题设矛盾的结果,从而否定假设并肯定了结论.熟练掌握反证法,利用反证法化正为反、化难为易,有助于我们解决直接证明较为困难的问题.

二、变陌生为熟悉

例2 (2014·浙江高考) 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$,则 a 的最大值是_____.

分析 题目未知数较多,容易导致我们做题时思路不清晰而迷失方向.不妨先进行化简,通过 $c = -(a + b)$ 消去 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 中的 c ,得到 $2b^2 + 2ab + 2a^2 - 1 = 0$.若将 a, b 其中之一视作变元,那么原问题就转化为熟悉的一元二次方程问题.题目要求 a 的最大值,我们不妨将 b 视作变元,再根据“实数解 b 一定存在”这一隐含条件,确定判别式 Δ 的取值范围,从而解出 a 的取值范围,最终得到 a 的最大值.

解 把 $c = -(a + b)$ 代入 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$,得 $2b^2 + 2ab + 2a^2 - 1 = 0$.

视 b 为自变量,则关于 b 的方程 $2b^2 + 2ab + 2a^2 - 1 = 0$ 一定有实数解,那么 $\Delta = (2a)^2 - 8(2a^2 - 1) \geq 0$,化简得 $a^2 \leq \frac{2}{3}$,即 $-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 a 的最大值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

评注 本题遵循了化归思想中的熟悉化原则,将陌生的问题转化为熟悉的问题,利于我们运用熟知的知识和经验来解决问题.通过等价转换法,我们将多元的最值问题化归为一元二次方程实数解的存在问题,在新和旧、生和熟的两个问题间搭建起沟通的桥梁,从而化生为熟、化难为易地解决了问题,加深了不同知识间的相互理解,丰富密集了数学知识的网络.

三、从间接到直接

例3 (2017·课标全国) 设 x, y, z 为正数,且 $2^x = 3^y = 5^z$,则 ()

- (A) $2x < 3y < 5z$
(B) $5z < 2x < 3y$
(C) $3y < 5z < 2x$

(D) $3y < 2x < 5z$

分析 本题的难点在于如何运用好条件 $2^x = 3^y = 5^z$.题目所给关系式 $2^x = 3^y = 5^z$ 在形式上显得过于间接,不利于我们实现比较 $2x, 3y, 5z$ 大小的目的,必须将其转化.看到指数,我们往往会联想到对数,不妨令 $2^x = 3^y = 5^z = k$,则 x, y, z 均可表示成以 k 为真数的对数形式.如此一来,我们通过换元法得到了 x, y, z 较为直观的联系.再利用对数性质,通过作商法比较大小,便可解决此题.

解 令 $2^x = 3^y = 5^z = k (k > 1)$,则 $x = \log_2 k, y = \log_3 k, z = \log_5 k$.

因为 $\frac{2x}{3y} = \frac{2\lg k}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 3}{3\lg k} = \frac{\lg 9}{\lg 8} > 1$,所以 $2x > 3y$;

因为 $\frac{2x}{5z} = \frac{2\lg k}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 5}{5\lg k} = \frac{\lg 25}{\lg 32} < 1$,所以 $2x < 5z$.

故选(D).

评注 本题遵循了化归思想中的直观化原则,将抽象问题化归为直观问题来解决.本题使用换元法将一个或多个变元构成的数学表达式中的一部分用新变元表示,使复杂的函数、方程或不等式问题转化为易于解决的基本问题.掌握好换元法,运用换元思想解题,使复杂问题简单化、间接问题直接化,从而找到解题的捷径.

四、由特殊看一般

例4 (2014·课标全国) 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$,且 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$,则 ()

- (A) $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ (B) $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$
(C) $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (D) $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

分析 本题的直接做法是使用三角函数关系式,化简转化 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$ 得出结果.考虑到是选择题,应寻求更为高效的方法.分析发现,题中 α, β 并不是定值.只要满足条件 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$, α 或 β 可以为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中的任意值,所以不妨取一种方便计算的特殊情况.令 $\beta = \frac{\pi}{6}$,再通过 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$ 求出 $\alpha = \frac{\pi}{3}$.代入选项验证可得(B)正确.

$$\text{解 取 } \beta = \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } \tan \alpha = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$= \sqrt{3}$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 代入选项得(B) 正确.

评注 本题运用化归思想中的特殊化方法, 把原问题形式向特殊形式转化, 通过证明特殊化后的问题解决原问题, 起到化难为易的效果. “特殊值法”是常见的特殊化方法, 通过特殊值代替题设普遍条件, 得出特殊结论来考察一般情形. “从一般问题到特殊解法再到一般结论”的思维转化过程, 在降低解题难度的同时也提升了解题速度.

五、视未知为已知

例 5 (2015 · 课标全国) 设函数 $f(x) = e^{2x} - a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数.

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$.

分析 这里只讨论问题(2). 结合(1)中结论与(2)中问题, 容易发现, 问题(2)等价于证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x_0) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$ (x_0 为 $f'(x)$ 的零点). 我们下意识地想到先通过 $f'(x_0) = 0$ 解出 x_0 , 再将其代入 $f(x)$ 的做法. 但是, x_0 的值无法解出, 可 x_0 这一关键条件又不能忽视. 于是, 我们不妨将 x_0 先视为已知, 比较 $f(x_0)$ 与 $2a + a \ln \frac{2}{a}$ 在形式上的特点, 注意利用关系式 $f'(x_0) = 0$ 化简 $f(x_0)$, 使其向 $2a + a \ln \frac{2}{a}$ 的形式不断靠拢, 最终通过比较得出结论.

证明 由(1)知, 当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增且有唯一零点, 记为 x_0 . 所以, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增. 从而, 在 $(0, +\infty)$ 上, 恒有 $f(x) \geq f(x_0)$ 成立.

此时, 只需证明 $f(x_0) = e^{2x_0} - a \ln x_0 \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$ 成立即可.

因为 x_0 为 $f'(x)$ 的零点, 所以 $f'(x_0) = 2e^{2x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$, 即 $x_0 = \frac{a}{2e^{2x_0}}$.

将 $x_0 = \frac{a}{2e^{2x_0}}$ 代入 $f(x_0) = e^{2x_0} - a \ln x_0$ 进行

化简, 得 $f(x_0) = \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a \ln \frac{2}{a}$.

又由基本不等式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 &= 2a\left(\frac{1}{4x_0} + x_0\right) \\ &\geq 2a \cdot 2\sqrt{\frac{1}{4x_0} \cdot \frac{1}{x_0}} = 2a, \end{aligned}$$

所以,

$$f(x_0) = \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a \ln \frac{2}{a} \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}.$$

故当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq f(x_0) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$,

结论得证.

评注 本题运用了化归思想中的变量代换法, 通过引入新变量进行代换, 简化了原式结构, 优化了解题思想, 另辟蹊径地绕过阻碍直达目的. 视未知为已知的“设而不求”思想, 不需我们求出所设未知数, 只是根据题目本身的特点, 将其消去或代换, 使问题轻松解决. 思辨地认识问题, “设而不求”地巧解问题, 是化归思想在运用中的生动体现.

六、总结与建议

通过以上例题我们发现, 在用常规思路方法遇到了困难, 或为了高效解题, 化归思想所提供的转化策略便显示出重要作用. 我们要学会运用化归思想, 寻找有利于问题解决的变换途径.

在化归思想的运用中, 有几个要点需要我们注意: 第一, 明白把什么问题进行转化, 即理清化归对象; 第二, 知道化归到何处去, 即知晓化归目标; 第三, 懂得如何进行化归, 即理解化归方法.

化归思想的运用不仅有助于解题, 更是对数学核心素养潜移默化的培养. 将一般问题化归为特殊问题, 我们抽象出数学概念之间的关系与一般规律, 提升数学抽象素养; 将正面问题化归为反面问题, 我们依据逻辑规则反向思考, 推导等价命题简化问题, 培养逻辑推理素养; 将抽象问题化归为具体问题, 我们借助几何直观和空间想象, 感知问题的直观形态, 训练直观想象素养.

以上五道例题, 只体现了化归思想的冰山一角. 在化归思想中, 还有直接转化法、构造法、坐标法等众多方法, 我们要根据实际情况灵活变通, 活学活用. 冰冻三尺非一日之寒, 化归思想的熟练掌握和运用需要长期的努力积累. 我们应该在日常解题中反复思考, 遇到困难要勇于尝试多种思路方法, 学会合理巧妙地运用化归思想解决各种问题, 在化归思想的运用中逐渐形成数学核心素养.

(收稿日期: 2018-09-03)

三法并举,破解三角形问题

黄清波

(福建省南安市国光第二中学,362321)

题目 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, $AC = 2\sqrt{19}$, $2AB = 3BC$, $AD = 2BD$, $\triangle BCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则 $AD =$ _____.

本小题主要考查解三角形、三角恒等变换等基础知识;考查推理论证能力、运算求解能力、数据处理能力等;考查化归转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等;考查逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算等,处于压轴题位置,难度较大,学生得分率极低.虽是一道小题,却蕴含着丰富的数学思想方法,耐人寻味.

一、解法探究

1. 三角法

“三角法”是利用正弦定理、余弦定理、三角形内角和定理、三角形面积公式,适时、适度进行“角化边”或“边化角”,同时结合三角函数的性质、三角恒等变换公式、同角三角函数基本关系式等进行化简与求值.

解法1 如图1,已知 $\angle ABC = 120^\circ$, $AC = 2\sqrt{19}$, $2AB = 3BC$, 由余弦定理,可得 $AB = 6$, $BC = 4$.

设 $BD = x$, $\angle CBD = \theta$, 则 $AD = 2x$.

在 $\triangle BCD$ 中,

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin \theta$$

$$= 2x \sin \theta = 2\sqrt{3}.$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理可得

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos(120^\circ - \theta),$$

$$\text{即 } 4x^2 = 36 + x^2 - 12x \cos(120^\circ - \theta),$$

$$\text{化简得 } x^2 - 6 = 2x \cos \theta.$$

$$\text{又 } 2\sqrt{3} = 2x \sin \theta, \text{ 所以 } (x^2 - 6)^2 + 12 = 4x^2,$$

解得 $x = 2\sqrt{3}$ 或 $x = 2$.

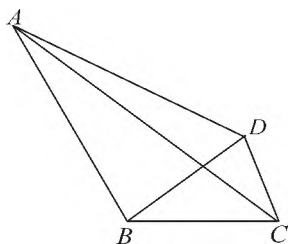


图1

当 $x = 2$ 时, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = 120^\circ$, 不合题意.

所以 $AD = 2x = 4\sqrt{3}$.

2. 解几法

“解几法”是根据三角形的结构特征,适当地建立平面直角坐标系,找出三角形相应顶点的坐标,便能快捷解得三角形的各个要素.解题思路明确、清晰,解题过程简洁.

解法2 已知 $\angle ABC = 120^\circ$, $AC = 2\sqrt{19}$, $2AB = 3BC$, 由余弦定理,可得 $AB = 6$, $BC = 4$.

以 BC 所在直线为 x 轴,过点 B 且垂直于 BC 的直线为 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy (如图2), 则 $B(0, 0)$, $A(-3, 3\sqrt{3})$.

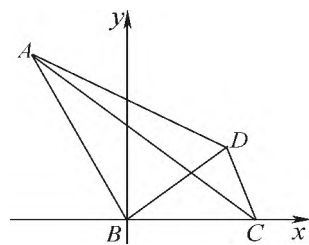


图2

因为 $\triangle BCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 所以点 D 的纵坐标为 $\sqrt{3}$, 设 $D(x_0, \sqrt{3})$, 由 $AD = 2BD$ 得 $\sqrt{(-3 - x_0)^2 + (3\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{x_0^2 + 3}$, 解得 $x_0 = 3$ 或 $x_0 = -1$ (不合, 舍去), 所以 $D(3, \sqrt{3})$, 所以 $AD = 4\sqrt{3}$.

3. 平几法

“平几法”是以逻辑推理作为工具解决问题,解题过程中经常要引入辅助线和运用大量的几何定理公理,对学生的空间想象能力和逻辑推理能力要求较高,运用得好,往往可以巧妙地避开复杂的运算,简化解题过程.

解法3 过点 D 作 DE 垂直 BC 于点 E , 过点 A 作 AF 垂直 BC 于点 F , 分别延长 AD , BC 交于点 G (如图3).

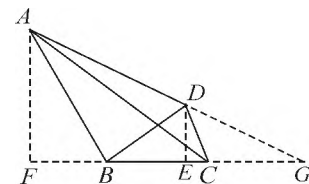


图3

已知 $\angle ABC = 120^\circ$, $AC = 2\sqrt{19}$, $2AB = 3BC$, 由余弦定理, 可得 $AB = 6$, $BC = 4$. 所以 $AF = 3\sqrt{3}$, $BF = 3$.

又 $\triangle BCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 所以 $DE = \sqrt{3}$.

又 $DE \parallel AF$, 所以 $\frac{GD}{GA} = \frac{DE}{AF} = \frac{1}{3}$, 所以 $AD = 2DG$, 又 $AD = 2BD$, 所以 $BD = DG$, $BE = EG$.

又 $EF = 2EG$, 所以 $BE = BF = 3$, 所以 $BD = 2\sqrt{3}$, 所以 $AD = 4\sqrt{3}$.

点评 本题得分率极低, 一是放在压轴题位置, 心理暗示, 造成考生知难而退; 二是解题思路不清, 入题困难, 计算复杂, 过程较长. 解法 1 综合性较强, 需熟练掌握三角形各个要素的转化、求解规律; 解法 2 关键是建立合适的平面直角坐标系, 找点的坐标, 将数与形完美地结合起来, 降低了问题的思维难度, 解题有一定的规律性, 便于学生掌握; 解法 3 对学生的空间想象能力和逻辑推理能力要求较高, 一方面需要对图形进行分割、补全、添加辅助线等. 另一方面, 要熟练掌握初中、高中几何定理公理及运用.

二、试题链接

例 1 (福建莆田市 2018 届质检理科卷第 16 题) 在四边形 $ABCD$ 中, $AC = BC$, $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$, $CD = 4$, $AD = 2$, 则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为_____.

解 (三角法) 如图 4, 设 $\angle ADC = \theta$, $AC = a$.

在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理, 有 $AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2 \cdot DA \cdot DC \cdot \cos \theta$, 即 $a^2 = 20 - 16\cos \theta$.

则四边形 $ABCD$ 面积

$$S = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \sin \theta + \frac{1}{2} \times a \times a \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 4 \sin \theta + \frac{1}{4} a^2 = 4 \sin \theta + \frac{1}{4} (20 - 16 \cos \theta)$$

$$= 4 \sin \theta - 4 \cos \theta + 5 = 5 + 4\sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$$

$$\leq 5 + 4\sqrt{2},$$

故四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $5 + 4\sqrt{2}$.

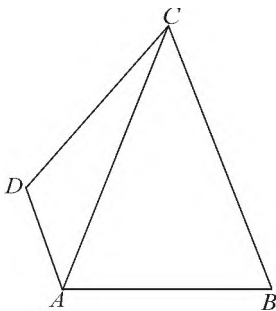


图 4

例 2 (2018 年高考全国卷 I, 文 16) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$, $b^2 + c^2 - a^2 = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

解 (三角法) 由 $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$ 得

$$\sin B \sin C + \sin C \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\text{因为 } \sin B \sin C \neq 0, \text{ 所以 } \sin A = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } b^2 + c^2 - a^2 = 8, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\text{所以 } bc = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

例 3 (2016 年高考全国卷 III, 理 8) 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\cos A =$ ()

(A) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

(C) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

(D) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

解 (解几法) 如图 5, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D , 设 $BC = 3a (a > 0)$, 则由已知条件可得 $AD = BD = a$, $DC = 2a$.

以 D 为原点, DC, DA 所在直线分别为 x 轴, y 轴建立平面直角坐标系, 则 $B(-a, 0), C(2a, 0), A(0, a)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (-a, -a), \overrightarrow{AC} = (2a, -a)$.

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-a^2}{\sqrt{2}a \cdot \sqrt{5}a} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

故选 (C).

例 4 (2015 年高考全国卷 I, 理 16) 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$, $BC = 2$, 则 AB 的取值范围是_____.

解 (平几法) 如图 6, 延长 BA, CD 相交于点 F , 过 C 作 $CE \parallel DA$ 交 AB 于 E .

$$\text{在 } \triangle BCE \text{ 中, } \frac{BE}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ}, \text{ 得 } BE = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

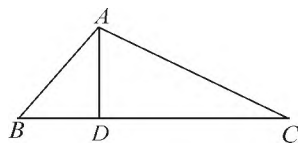


图 5

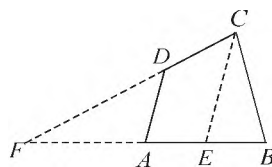


图 6

在 $\triangle BCF$ 中, $\frac{BF}{\sin 75^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ}$, 得 $BF = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

当 DA 向右平移, 无限接近 CE 时, AB 无限接近 BE .

当 DA 向左平移, 无限接近点 F 时, AB 无限接近 BF .

故 AB 的取值范围是 $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

例5 (2014年高考全国卷I, 理16) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a = 2$, 且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

解 (平几法) 因为 $a = 2$, 所以 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$ 可化为

$$(a+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C,$$

由正弦定理可得 $(a+b)(a-b) = (c-b)c$, 即 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$.

由余弦定理得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2},$$

又 $0 < A < \pi$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2$ 为定长, $A = \frac{\pi}{3}$ 为定角.

如图7, 由同弧所对的圆周角相等可知, 点 A 的运动轨迹为优弧 $\widehat{BC}$ (不包括端点), 则易知: 当点 A 位于优弧中点时, $\triangle ABC$ 的面积最大, 此时 $\triangle ABC$ 为正三角形, 面积为 $\sqrt{3}$.

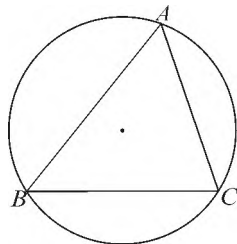


图7

以上几个题还可以给出多种解法, 留给读者联想借鉴完成.

总之, 解三角形的“三法”的准确定位是并举, 即不宜人为地、凭主观划分它们的优劣, 而应具体问题具体分析. 哪怕受教学时间的限制, 在课堂上尽可“择其善着而从之”, 但对另外的方法应稍作提示引导, 让学生在课下尝试、讨论, 并对“三法”进行比较. 这对学生能力的提高大有裨益.

(收稿日期: 2018-07-30)

揭开思维谜团 突破解题障碍 ——从武汉市2018年高三九月调考压轴试题说起

李红春

孔 峰

(湖北省武汉市黄陂区第一中学盘龙校区, 430312)(湖北省武汉市教育科学研究院, 430032)

武汉市2019届高三九月调考刚结束便引发关注, 尤其是压轴试题延续近几年全国高考课标卷试题风格, 题干简洁, 融函数、不等式于一体, 主要考查导数的运算、利用导数研究函数的单调性、极值、零点、不等式的证明等问题, 考查数形结合、函数方程、分类讨论、化归与转化等基本数学思想, 考查学生综合分析问题和解决问题的能力.

作为起点考试, 试题难度适中, 但从考后学生答题情况来看, 得分并不理想, 尤其是第(1)问. 笔者有幸参与了此题命题, 本文主要谈谈“标答”背后的一些鲜为人知的思考, 希望对大家提升解题能力有所启发.

1. 试题及解答

题目 (2018年武汉市高三九月调考理科第

22题) 已知函数 $f(x) = x - ae^x + 1$ 有两个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $e^{x_1} + e^{x_2} > 2$.

解答 (1) 解法1 由 $f(x) = 0$ 得 $x - ae^x + 1 = 0$, 即 $a = \frac{x+1}{e^x}$.

设 $m(x) = \frac{x+1}{e^x}$, 则 $m'(x) = \frac{-x}{e^x}$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 递增; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 递减; 所以 $m(x)_{\text{极大}} = m(0) = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时,

$$m(1 + \frac{1}{a}) = \frac{1 + \frac{1}{a} + 1}{e^{1 + \frac{1}{a}}} < \frac{2 + \frac{1}{a}}{(1 + \frac{1}{a})^2}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a}} < \frac{2 + \frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a}} = a.$$

如图1,由 $m(-1) = 0$,而 $1 + \frac{1}{a} > 0$,故直线 $y = a$ 与函数 $y = m(x)$ 的图像的两个交点的横坐标分别在区间 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1 + \frac{1}{a})$ 内,故 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1 + \frac{1}{a})$ 内各有一个零点.

解法2 由 $f(x) = x - ae^x + 1$ 得 $f'(x) = 1 - ae^x$.

若 $a \leq 0$,则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增, $f(x)$ 至多只有一个零点,舍去;

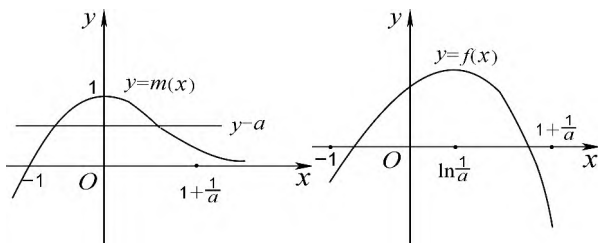


图1

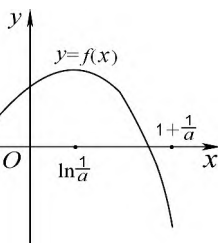


图2

若 $a > 0$,由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \ln \frac{1}{a}$,当 $x \in (-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$,函数 $f(x)$ 递增;当 $x \in (\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,函数 $f(x)$ 递减;所以 $f(x)_{\text{极大}} = f(\ln \frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a}$.若 $f(x)$ 有两个零点,则必须 $\ln \frac{1}{a} > 0$,即 $0 < a < 1$.

如图2所示,一方面, $-1 < \ln \frac{1}{a}$,而 $f(-1) = -ae^{-1} < 0$;

另一方面, $1 + \frac{1}{a} > \ln \frac{1}{a}$,而

$$f(1 + \frac{1}{a}) = (1 + \frac{1}{a}) - ae^{1 + \frac{1}{a}} + 1$$

$$< (1 + \frac{1}{a}) - a(1 + \frac{1}{a})^2 + 1$$

$$= -a < 0,$$

故 $f(x)$ 在区间 $(-1, \ln \frac{1}{a})$ 和 $(\ln \frac{1}{a}, 1 + \frac{1}{a})$

各有一个零点,满足题意.

综上:当 $0 < a < 1$ 时 $f(x)$ 有两个零点.

(2) **解法1** 由 $f(x_1) = 0$ 得 $x_1 - ae^{x_1} + 1 = 0$,即 $e^{x_1} = \frac{x_1 + 1}{a}$,同理 $e^{x_2} = \frac{x_2 + 1}{a}$,于是待证式

$$e^{x_1} + e^{x_2} > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + 1}{a} + \frac{x_2 + 1}{a} > 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2a - 2.$$

由 $a \in (0, 1)$,则 $2a - 2 < 0$,故只需证: $x_1 + x_2 > 0$,由(1)知 $-1 < x_1 < 0 < x_2$,则 x_2 和 $-x_1$ 均属于区间 $(0, +\infty)$,而函数 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减, $m(x_1) = m(x_2)$,则

$$x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow x_2 > -x_1$$

$$\Leftrightarrow m(x_2) < m(-x_1) \Leftrightarrow m(x_1) < m(-x_1).$$

设 $G(x) = m(x) - m(-x)$, $x \in (-1, 0)$,则

$$G'(x) = m'(x) + m'(-x) = \frac{-x}{e^x} + \frac{x}{e^{-x}} = x(e^x - e^{-x}) > 0,$$

所以 $G(x)$ 在 $(-1, 0)$ 递增,则 $G(x) < G(0) = 0$,于是 $x \in (-1, 0)$ 时 $m(x) < m(-x)$.

因此, $m(x_1) < m(x_2)$,即证明了: $x_1 + x_2 > 0$.

解法2 同上,先证: $x_1 + x_2 > 0$,则

$$e^{x_1} + e^{x_2} \geq 2 \sqrt{e^{x_1} \cdot e^{x_2}} = 2e^{\frac{x_1 + x_2}{2}} > 2.$$

2. 困惑及解疑

第(1)问学生入手不难,但在论证函数零点个数问题这一关键节点,要么束手无策,要么以图代证,思维不够严谨.看到命题中心提供的以上两种参考答案后,学生们更加困惑了,第(1)问两种解法,在论证 $f(x)$ 的零点存在性时均取点“ $1 + \frac{1}{a}$ ”,宛如神来之笔,这是如何想到的呢?

其实,我们可以这样思考:设存在 $x_0 > 0$ 使得 $m(x_0) < a$,即 $\frac{x_0 + 1}{e^{x_0}} < a$,这是个超越不等式,无法直接求解,如果能放缩为常规的有理不等式就好了,为了保持不等号方向的不变性,需将分母缩小,联想到基本结论“ $x > 0$ 时, $e^x > x^2$ ”,则要 $\frac{x_0 + 1}{e^{x_0}} < a$ 成立,只需 $\frac{x_0 + 1}{x_0^2} \leq a$,解之得只需 $x_0 \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}$,我们可以取 $x_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}$,但它比较复杂,我们不妨放缩,比如: $\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a} <$

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4a + 4a^2}}{2a} = \frac{1 + 2a + 1}{2a} = 1 + \frac{1}{a}, \text{于是便}$$

可取 $x_0 = 1 + \frac{1}{a}$.

事实上, x_0 的取值不唯一. 由于 $0 < a < 1$, 则 $1 + \frac{1}{a} < \frac{2}{a}$, 我们还可取 $x_0 = \frac{2}{a}$, 这时论证过程如下:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{2}{a}\right) &= \frac{\frac{2}{a} + 1}{e^{\frac{2}{a}}} < \frac{\frac{2}{a} + 1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{2a + a^2}{4} \\ &< \frac{2a + a}{4} < a. \end{aligned}$$

3. 思考及应用

以上寻找“取值点”的思维过程可以简单概括为: 设出“取值点”, 利用分析法, 列出不等关系, 借助“基本导数不等式”, 将超越不等式通过放缩转化为有理不等式, 不断寻找式子成立的充分条件, 或求解, 或代值尝试, 直到找出合适的取值.

“一枝独秀不是春, 一花引来百花开”, 下面我们来领略这种方法的广泛应用.

例 1 (2018 年武昌区高三五月调考题简编) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 有两个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 求 a 的取值范围.

解法 1 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$, 若 $a \leq 0$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 至多一个零点, 舍去; 若 $a > 0$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{a}$, 当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减, 则 $f(x)_{\text{极大}} = f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a}$, 要使 $f(x)$ 有两个零点, 其必要条件是 $\ln \frac{1}{a} > 0$, 则 $0 < a < 1$, 下面说明充分性:

由 $e > a$, 则 $\frac{1}{e} < \frac{1}{a}$, 而 $f(\frac{1}{e}) = -\frac{a}{e} < 0$, 于是 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{a})$ 有一个零点, 又由 $\frac{4}{a^2} > \frac{1}{a}$, 而 $f(\frac{4}{a^2})$

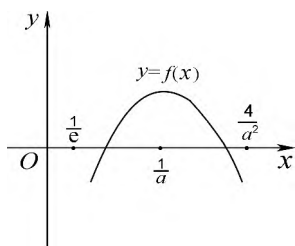


图 3

$$= \ln \frac{4}{a^2} - a \cdot \frac{4}{a^2} + 1 = 2 \ln \frac{2}{a} - \frac{4}{a} + 1 < 2\left(\frac{2}{a} - 1\right) - \frac{4}{a} + 1 = -1 < 0, \text{于是 } f(x) \text{ 在区间 } \left(\frac{1}{a}, \frac{4}{a^2}\right)$$

有一个零点, 如图 3 所示, 故 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 必定有两个零点.

解法 2 同解法 1, 先得出 $0 < a < 1$, 并分析出 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{a})$ 上有一个零点.

另一方面, 由 $e^{\frac{2}{a}} > \frac{1}{a}$, $f(e^{\frac{2}{a}}) = \frac{2}{a} - a \cdot e^{\frac{2}{a}} + 1 < \frac{2}{a} - a\left(\frac{2}{a}\right)^2 + 1 = \frac{a-2}{a} < 0$, 故 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{a}, e^{\frac{2}{a}})$ 上有一个零点, 故 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 必定有两个零点.

思考: 对于解法 1, $\frac{4}{a^2}$ 其实是这样取到的: 设存在 $x_0 > \frac{1}{a}$ 使得 $f(x_0) < 0$, 即 $\ln x_0 - ax_0 + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x_0 < ax_0 - 1 \Leftrightarrow x_0 < e^{ax_0 - 1}$, 这是一个无理不等式, 无法直接求解, 如果能放缩为常规的有理不等式就好了, 为了保持不等号的方向的不变性, 可寻求不等式成立的充分条件, 如将不等式右边缩小后不等式还能成立, 由结论“ $x > 0$ 时, $e^x > x^2$ ”, 则只需 $x_0 \leq (ax_0 - 1)^2$, 即 $a^2 x_0^2 - (1 + 2a)x_0 + 1 > 0$, 即只需 $x_0 \geq \frac{1 + 2a + \sqrt{1 + 4a}}{2a^2}$, 我们可以取 $x_0 = \frac{1 + 2a + \sqrt{1 + 4a}}{2a^2}$, 但这个值太复杂, 由 $a \in (0, 1)$, $\sqrt{1 + 4a} < 1 + 2a$, 所以 $\frac{1 + 2a + \sqrt{1 + 4a}}{2a^2} < \frac{1 + 2a}{a^2} < \frac{4}{a^2}$, 所以才取 $x_0 = \frac{4}{a^2}$.

对于解法 2, 我们是这样思考的, 鉴于 $f(x)$ 中含有对数, 为了好算, 还要取的值必须和 a 有关, 我们不妨设要取的数形如 $e^{\frac{n}{a}}$ 的形式, 则 $f(e^{\frac{n}{a}}) = \frac{n}{a} - a \cdot e^{\frac{n}{a}} + 1 < 0$, 同样需要将无理不等式进行放缩, 则只需 $\frac{n}{a} - a\left(\frac{n}{a}\right)^2 + 1 < 0$, 由于 $\frac{1}{a} > 1$, 为了好求解, 进一步探寻其成立的充分条件, 则只需 $\frac{n}{a} - \frac{n^2}{a} + \frac{1}{a} < 0$, 即 $n^2 - n - 1 > 0$, 显然 $n \geq 2$ 时均满足题意, 于是我们可以取 $x_0 = e^{\frac{2}{a}}$.

例 2 (2017 年全国卷 I) 已知 $f(x) = ae^{2x}$

$+(a-2)e^x - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

解 (1) $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^x - 1)(2e^x + 1)$, 易得: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减; 当 $a > 0$ 时, 易得 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上递减, 在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上递增.

(2) 若 $a \leq 0$, 由(1)知, $f(x)$ 至多一个零点; 若 $a > 0$, 由(1)知 $f(x)_{\min} = f(\ln \frac{1}{a}) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$,

① 当 $a = 1$ 时, 由于 $f(\ln \frac{1}{a}) = 0$, $f(x)$ 只有一个零点;

② 当 $a > 1$ 时, $f(\ln \frac{1}{a}) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a > 0$, $f(x)$ 没有零点;

③ 当 $0 < a < 1$ 时, $f(\ln \frac{1}{a}) < 0$, 且 $\ln \frac{1}{a} > 0$, 如图4所示, 由 $f(-1) = \frac{a}{e^2} + \frac{a}{e} + 1 - \frac{2}{e} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上只有一个零点, 而

$$\begin{aligned} f(\ln \frac{3}{a}) &= ae^{2\ln \frac{3}{a}} + (a-2)e^{\ln \frac{3}{a}} - \ln \frac{3}{a} \\ &= a \cdot (\frac{3}{a})^2 + (a-2) \cdot \frac{3}{a} - \ln \frac{3}{a} \\ &= \frac{3}{a} + 3 - \ln \frac{3}{a} > \frac{3}{a} + 3 - (\frac{3}{a} - 1) \\ &= 2 > 0, \end{aligned}$$

且 $\ln \frac{3}{a} > \ln \frac{1}{a}$, 故 $f(x)$ 在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上只有一个零点.

综上所述: 若 $f(x)$ 有两个零点, 则 $0 < a < 1$.

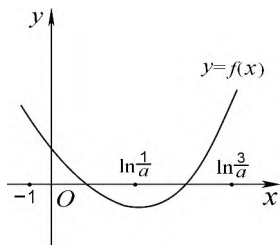


图4

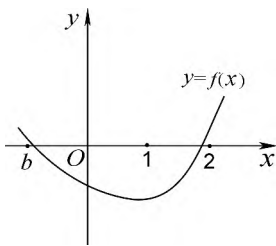


图5

思考 上述解答中最难的地方在于怎么想到取 $\ln \frac{3}{a}$ 这个地方的函数值来论证? 其实这里也

有缘由: 由于极值点为 $\ln \frac{1}{a}$, 我们要取的数必须比它大, 结合 $0 < a < 1$, 我们采用待定系数法, 尝试选取具有相同结构的 $\ln \frac{n}{a}$, 其中 $n \in \mathbf{Z}^*$, 且 $n > 1$, 这时设 $f(\ln \frac{n}{a}) = ae^{2\ln \frac{n}{a}} + (a-2)e^{\ln \frac{n}{a}} - \ln \frac{n}{a} > 0$, 即 $a(\frac{n}{a})^2 + (a-2) \cdot \frac{n}{a} - \ln \frac{n}{a} > 0$, 由结论“ $\ln x \leq x-1$, 当且仅当 $x=1$ 取等号”知, 上式成立的充分条件是: $a(\frac{n}{a})^2 + (a-2) \cdot \frac{n}{a} - (\frac{n}{a} - 1) > 0$, 即 $\frac{n}{a}(n-3) + n + 1 > 0$, 而 $n=3$ 时这个式子显然成立.

例3 (2016年全国卷I, 理科第21题改编) 已知 $a > 0$, 求证 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点.

解 $f'(x) = (x-1)(e^x + 2a)$, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 递减, $(1, +\infty)$ 递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(1) = -e < 0$, $f(2) = a > 0$, 取 $b < 0$ 且 $b < \ln \frac{a}{2}$, 则 $f(b) > \frac{a}{2}(b-2) + a(b-1)^2 = a(b^2 - \frac{3}{2}b) > 0$, 如图5所示.

故函数 $f(x)$ 在区间 $(b, 1)$ 和 $(1, 2)$ 各有一个零点.

思考: 以上解法中 b 满足的条件是如何想到的呢? 这里有一个待定系数法的思考过程, 首先我们需要寻找的数 b 比1小, 且越小越好, 则 e^b 可无限趋近于0, 而 $a > 0$, 则一定存在正数 λ 满足 $e^b < \lambda a$, 将 e^b 放大为和 a 有关的式子 λa 后, 便于计算, 此时

$$\begin{aligned} f(b) &= (b-2)e^b + a(b-1)^2 \\ &> (b-2)\lambda a + a(b-1)^2 \\ &= a[(b-1)^2 + \lambda(b-2)], \end{aligned}$$

于是只需 $(b-1)^2 + \lambda(b-2) > 0$, 观察知 $\lambda = \frac{1}{2}$ 是符合题意的.

数学解题崇尚自然, 只有自然的解答我们才能学得会, 很多看似“冰冷”的解答背后往往隐藏着火热的思考. 我们学习解题, “知其然”更要“知其所以然”, 教师“授人以鱼”更要“授人以渔”.

(收稿日期: 2018-09-08)

探究三角形中的最值问题的常见解法

李 凯 郑 玲

(广东省珠海市斗门区第一中学, 519000)

纵观近几年的数学高考和竞赛中的真题及模拟题, 三角形中的最值问题是一个高频考点. 常见的题型有与长度、面积、角度有关的最值. 学生常常感到困惑. 事实上, 掌握了破解此类问题的常见解法, 则能以不变应万变.

一、一道 2018 年高考题的四种解法

引例 (2018 年高考江苏卷 13 题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + c$ 的最小值为_____.

解法 1 (建立直角坐标系, 借助不等式)

如图 1, 以 B 为坐标原点, BD 所在直线为 x 轴建立直角坐标系, 则 $A(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2})$, $C(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$, $D(1, 0)$.

因为 A, D, C 三点共线, 则 $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{DC}$, 而 $\overrightarrow{AD} =$

$(1 - \frac{c}{2}, -\frac{\sqrt{3}c}{2})$, $\overrightarrow{DC} = (\frac{a}{2} - 1, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$, 所以

$$(1 - \frac{c}{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{\sqrt{3}c}{2} \cdot (\frac{a}{2} - 1) = 0,$$

$$\text{化简得 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1.$$

因此

$$4a + c = (4a + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}) = 5 + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c}$$

$$\geqslant 5 + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}} = 9,$$

当且仅当 $c = 2a = 3$, 即 $c = 3, a = \frac{3}{2}$ 时取

等号, 故 $4a + c$ 的最小值为 9.

解法 2 (利用面积公式, 借助不等式)

由题意可知, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$, 由角平

分线性质和三角形面积公式得

$$\frac{1}{2}ac \sin 120^\circ = \frac{1}{2}a \times 1 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2}c \times 1 \times \sin 60^\circ,$$

化简得 $a + c = ac$, 即 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$. 下同解法

1.

解法 3 (利用正弦定理, 借助不等式)

设 $\angle BDA = \alpha$, 在 $\triangle ABD, \triangle BCD$ 中分别用正弦定理, 有 $\frac{1}{\sin A} = \frac{c}{\sin \alpha}$, $\frac{1}{\sin C} = \frac{a}{\sin \alpha}$, 所以 $\frac{1}{c} = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$, $\frac{1}{a} = \frac{\sin(\alpha - 60^\circ)}{\sin \alpha}$, 两式相加化

简得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$. 下同解法 1.

解法 4 (函数法)

设 $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCD = 60^\circ - \alpha$, $\angle BDA = 120^\circ - \alpha$, $\angle BDC = 60^\circ + \alpha$.

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BAD} = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin \alpha},$$

$$\text{所以 } c = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \alpha} + \frac{1}{2}.$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\sin \angle BDC}{\sin \angle BCD} = \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin(60^\circ - \alpha)},$$

$$\text{所以 } a = \frac{\sqrt{3} + \tan \alpha}{\sqrt{3} - \tan \alpha}.$$

$$\text{故 } 4a + c = \frac{4(\sqrt{3} + \tan \alpha)}{\sqrt{3} - \tan \alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \alpha} + \frac{1}{2}.$$

再令 $\tan \alpha = t$, 显然 $0 < \alpha < 60^\circ$, 则 $0 < t < \sqrt{3}$. 故

$$4a + c = \frac{4(\sqrt{3} + t)}{\sqrt{3} - t} + \frac{\sqrt{3}}{2t} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3} - t} + \frac{\sqrt{3}}{2t} - \frac{7}{2}.$$

令 $g(t) = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3} - t} + \frac{\sqrt{3}}{2t} - \frac{7}{2}$ ($0 < t < \sqrt{3}$), 则

$$g'(t) = \frac{8\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-t)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2t^2}. \text{ 令 } g'(t) = 0, \text{ 得 } t = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

所以 $g(t)$ 的最小值为 $g(\frac{\sqrt{3}}{5}) = 9$.

故 $4a+c$ 的最小值为 9.

评析 在解三角形中,面积公式、正余弦定理是最常用的公式.解法1、解法2、解法3中得到边长关系后均借用了基本不等式,过程较简单,易计算,解法4计算量最大.在三角形中的最值问题很多都可以用以上方法来尝试求解,但要懂得适当选择较简洁的方法.在应试中,我们要灵活地把握.除了以上这些方法,有些题目表示的图形比较特殊,直接利用图形的几何性质也可求得最值.

二、例析几种方法在求三角最值中的应用

1. 建立直角坐标系及不等式

例1 (2018届广东点石联盟二模理16)如图2,在 $\triangle PBC$ 中, $PA^2 + PB^2 = 10$, C, D 是线段 AB 上的两点,且 $AC = BD$, $\angle CPD = 90^\circ$.则 $2AB + CD$ 的最大值为_____.

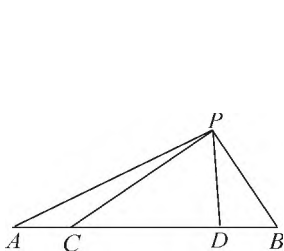


图1

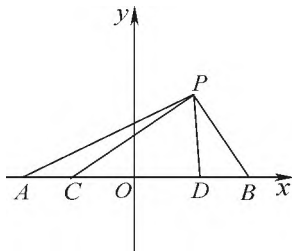


图2

解析 如图3,以 AB 的中点为坐标原点, AB 所在的直线为 x 轴建立直角坐标系.设 $AB = 2a, CD = 2b$,则 $A(-a, 0), B(a, 0), C(-b, 0), D(b, 0)$,设 $P(x, y)$.

由 $PA^2 + PB^2 = 10$ 得 $(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 10$,化简得

$$x^2 + y^2 = 5 - a^2 \quad ①$$

由 $\angle CPD = 90^\circ$ 得 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$,即 $(-b-x, -y) \cdot (b-x, -y) = 0$,化简得

$$x^2 + y^2 = b^2 \quad ②$$

比较①②得 $b^2 + a^2 = 5$.

由柯西不等式得 $(2^2 + 4^2)(b^2 + a^2) \geq (2b + 4a)^2$,故 $2AB + CD = 4a + 2b \leq 10$,当且仅当 $a = 2, b = 1$ 时取等号.

所以, $2AB + CD$ 的最大值为10.

例2 (2008年江苏高考13)满足条件 $AB = 2, AC = \sqrt{2}BC$ 的 $\triangle ABC$ 的面积的最大值

为_____.

解析 如图4,以 AB 中点为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系,则 $A(-1, 0), B(1, 0)$.

设 $C(x, y)$, 则

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2} (y \neq 0), \text{ 化简得 } (x-3)^2$$

$$+ y^2 = 8, \text{ 故 } C \text{ 在一个圆周上运动, 易得 } |y_c| \leq 2$$

$\sqrt{2}$, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_c| \leq 2\sqrt{2}$, 故 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

小结 在常规题型中,一般不需要建系即可求解.但对于一些题设条件不太好理解的题目(比如例1)以及计算量比较大的题目(比如例2),建立直角坐标系,能够有效地克服这些问题,可作为应试中的一种选择.

2. 利用正余弦定理、面积公式及不等式

例3 (2014年新课标I理16)已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a = 2$,且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$,则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

解析 因为 $a = 2$,且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$,结合正弦定理可得 $(a+b)(a-b) = (c-b)c$,化简得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,故由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

根据 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ 及基本不等式得 $bc \geq 2bc - a^2$,即 $bc \leq a^2 = 4$.

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

例4 (2018届珠海市一模理16)在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,若 $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = 3, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 6$,则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

解析 由 $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = 3$ 得 $|AB| = 3$,由 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 6$ 得 $ab \cos C = 6$,所以 $\cos C = \frac{6}{ab}$.

由余弦定理可得 $9 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \geq 2ab - 12$,所以 $ab \leq \frac{21}{2}$.

故 $\triangle ABC$ 的面积

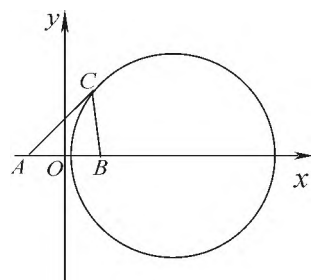


图4

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \sqrt{1 - \cos^2 C} \\
 &= \frac{1}{2}ab \sqrt{1 - \frac{36}{a^2 b^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - 36} \\
 &\leq \frac{3\sqrt{33}}{4},
 \end{aligned}$$

当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{42}}{2}$ 时取等号. 故 $\triangle ABC$

面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{33}}{4}$.

例 5 (2016 年全国高中数学联赛第 9 题改编) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a^2 + 2b^2 = 3c^2$, 求 $\sin C$ 的最大值.

解析 由余弦定理可得

$$\begin{aligned}
 \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - \frac{1}{3}(a^2 + 2b^2)}{2ab} = \frac{a}{3b} + \frac{b}{6a} \\
 &\geq 2\sqrt{\frac{a}{3b} \cdot \frac{b}{6a}} = \frac{\sqrt{2}}{3},
 \end{aligned}$$

故 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} \leq \frac{\sqrt{7}}{3}$, 当且仅当 $a : b$

$: c = \sqrt{3} : \sqrt{6} : \sqrt{5}$ 时取等号.

因此, $\sin C$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

小结 在试题中, 一般需要用解三角形或向量的知识对已知条件进行翻译化简, 然后再用基本不等式求最值, 在求最值得过程中, 一定要验证等号成立的条件.

3. 利用函数法

例 6 (2018 届安徽省宿州市高三上学期第一次教学质量检测 16) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = c$, $\sin B + \sin(A - C) = \sin 2A$, 若 O 为 $\triangle ABC$

所在平面内一点, 且 O, C 在直线 AB 的异侧, $OA = 2OB = 2$, 则四边形 $OACB$ 面积的取值范围是_____.

解 设 $\angle AOB = \theta$, 则

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \theta = \sin \theta.$$

由题意得

$$\begin{aligned}
 &\sin B + \sin(A - C) \\
 &= \sin(A + C) + \sin(A - C) = 2\sin A \cos C \\
 &= 2\sin A \cos A,
 \end{aligned}$$

又 $\sin A \neq 0$, 所以 $\cos C = \cos A$, 所以 $C = A$.

又 $b = c$, 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

在 $\triangle AOB$ 中, 由余弦定理得

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= c^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \theta \\
 &= 5 - 4\cos \theta.
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 S_{\text{四边形}OACB} &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle ABC} = \sin \theta + \frac{1}{2}c^2 \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4}(5 - 4\cos \theta)
 \end{aligned}$$

$$= \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta + \frac{5\sqrt{3}}{4} = 2\sin(\theta - \frac{\pi}{3}) + \frac{5\sqrt{3}}{4},$$

因为 $0 < \theta < \pi$, $-\frac{\pi}{3} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$< \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) \leq 1$, 所以

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < 2\sin(\theta - \frac{\pi}{3}) + \frac{5\sqrt{3}}{4} \leq \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2,$$

即四边形 $OACB$ 面积的取值范围是 $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2]$.

例 7 (2016 年江苏高考 14) 在锐角三角形 ABC 中, 若 $\sin A = 2\sin B \sin C$, 则 $\tan A \tan B \cdot \tan C$ 的最小值是_____.

解析 由 $\sin A = \sin(180^\circ - A) = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, $\sin A = 2\sin B \cdot \sin C$, 可得

$$\sin B \cos C + \cos B \sin C = 2\sin B \sin C \quad ①$$

由三角形 ABC 为锐角三角形, 则 $\cos B > 0$, $\cos C > 0$, 在 ① 式两侧同时除以 $\cos B \cos C$ 可得 $\tan B + \tan C = 2\tan B \tan C$.

$$\begin{aligned}
 \text{又 } \tan A &= \tan(180^\circ - A) = -\tan(B + C) \\
 &= -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \quad ②
 \end{aligned}$$

则 $\tan A \tan B \tan C = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \cdot \tan B \tan C$.

由 $\tan B + \tan C = 2\tan B \tan C$ 可得

$$\tan A \tan B \tan C = -\frac{2(\tan B \tan C)^2}{1 - \tan B \tan C}.$$

令 $\tan B \tan C = t$, 由 A, B, C 为锐角可得 $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$, 由 ② 式得 $1 -$

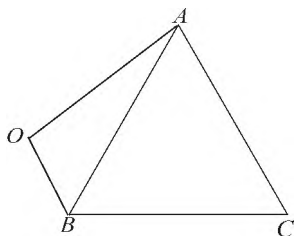


图 5

$\tan B \tan C < 0$, 所以 $t > 1$,

$$\tan A \tan B \tan C = -\frac{2t^2}{1-t} = \frac{2}{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}}.$$

因为 $t > 1$, 所以 $\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = -(\frac{1}{t} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{4}]$, 于是可得

$$\tan A \tan B \tan C = \frac{2}{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}} \geq 8.$$

当且仅当 $t = 2$ 时取等号, 此时 $\tan B + \tan C = 4$, $\tan B \tan C = 2$, 解得 $\tan A = 4$, $\tan B = 2 + \sqrt{2}$, $\tan C = 2 - \sqrt{2}$ (或 $\tan B, \tan C$ 互换), 此时 A, B, C 均为锐角.

故 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值为 8,

小结 函数法是指选一个变量(常用角或边)将待求的目标表示为这个变量的函数, 当函数的最值直接不好求时, 可能要变形换元或者通过导数来求最值.

4. 利用图形的几何性质

例 8 (2015 年新课标 I 理 16) 如图 6, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$, $BC = 2$, 则 AB 的取值范围是_____.

解析 如图 7 所示, 延长 BA, CD 交于 E , 平移 AD , 当 A 与 D 重合于 E 点时, AB 最长, 在 $\triangle BCE$ 中, $\angle B = \angle C = 75^\circ$, $\angle E = 30^\circ$, $BC = 2$, 由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin \angle E} = \frac{BE}{\sin \angle C}$, 即 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{BE}{\sin 75^\circ}$, 解得 $BE = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

平移 AD , 当 D 与 C 重合时, AB 最短, 此时与 AB 交于 F , 在 $\triangle BCF$ 中, $\angle B = \angle BFC = 75^\circ$, $\angle FCB = 30^\circ$, 由正弦定理知, $\frac{BF}{\sin \angle FCB} = \frac{BC}{\sin \angle BFC}$, 即 $\frac{BF}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin 75^\circ}$, 解得 $BF = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

所以, AB 的取值范围为 $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.

例 9 (2017 年广州二模 16) 在平面四边形 $ABCD$ 中, 连接对角线 BD , 已知 $CD = 9, BD = 16, \angle BDC = 90^\circ, \sin A = \frac{4}{5}$, 则对角线 AC 的最

大值为_____.

解析 建立如图 8 所示坐标系, 由于 $\sin A = \frac{4}{5}, BD = 16$ 为定值, 故 A 在以 BD 为弦的圆上运动, 由正弦定理得 $2R = \frac{BD}{\sin A} = 20$, $R = 10$, 故圆心的坐标为 $(8, -6)$ 或 $(8, 6)$.

当圆心坐标为 $(8, -6)$ 时, AC 的最大值即为 CA' 的值, 也即是 $CO + R$ 的值, 由两点间的距离公式有 $CO + R = \sqrt{8^2 + 15^2} + 10 = 27$.

当圆心坐标为 $(8, 6)$ 时, 同样可求得对角线 AC 的最大值为 $\sqrt{8^2 + 3^2} + 10 = \sqrt{73} + 10 < 27$.

综上, 对角线 AC 的最大值为 27.

小结 利用图形的几何性质可以极大地简化计算, 在应试中可以尝试着去挖掘. 当然如例 9 仍需先建立直角坐标系.

5. 总结与综合应用

在以上几种方法中, 方法 1、方法 2、方法 3 比较通用, 适用于大部分题型. 在应试中, 我们可以看看是否能挖掘出图形的几何性质, 若不明显, 则考虑用通用方法 1 和方法 2. 当然, 在一些难题尤其是在竞赛题中, 可能需要多种方法配合起来用.

例 10 (2018 年数学联赛湖北预赛题) 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, $BG \perp CG, BC = \sqrt{2}$, 则 $AB + AC$ 的最大值为_____.

解析 如图 9, 取 BC 的中点 D , 由重心的性质知 $AD = 3DG$. 由 $BG \perp CG$ 知 $DG = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $AD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

记 $\angle ADB = \theta$, 则 $\angle ADC = 180^\circ - \theta$.

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理可得

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ADB = 5 - 3 \cos \angle ADB,$$

$$\text{即 } AB = \sqrt{5 - 3 \cos \theta}.$$

同理, 在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理可得 AC

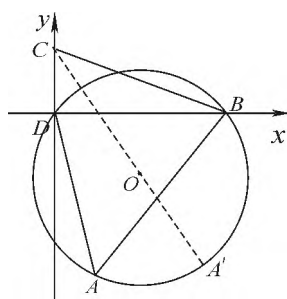


图 8

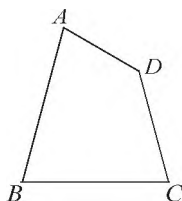


图 6

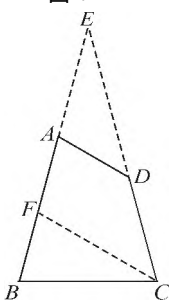


图 7

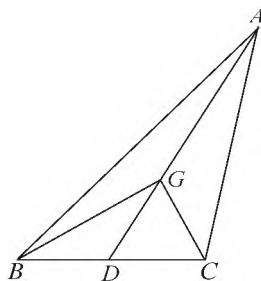


图 9

$$= \sqrt{5+3\cos\theta}.$$

故 $(AB+AC)^2 = 10 + 2\sqrt{25-9\cos^2\theta} \leq 20$,
即 $AB+AC \leq 2\sqrt{5}$, 当且仅当 $AB=AC=\sqrt{5}$ 时
取等号.

所以, $AB+AC$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$.

三. 巩固练习

1. (2017 届山西省太原市高三模拟考试二文
15) 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = 1$, 则 $\triangle BOC$ 面积的最大值为_____.

2. (2018 届浙江省嘉兴市高三上学期期末
15) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $C = 2B$, 则 $\frac{c}{b}$ 的取值范围
是_____.

3. (2018 届深圳一模 9) 如图 10, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = 2CB = 2\sqrt{3}$, P 是 $\triangle ABC$ 内一动点, $\angle BPC = 120^\circ$, 则 AP 的最小值为_____.

提示与解答:

1. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.
2. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
3. $\sqrt{13} - 1$.

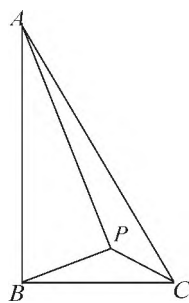


图 10

(收稿日期: 2018-07-24)

“一一对应”与“整体把握”

杨春波

程汉波

(河南省郑州市平行线教育, 450000) (广东省广州市第二中学, 510530)

文[1]提及处理集合相等问题的新思路: 两集合相等, 若集合中元素顺序可以确定, 则应按大小顺序一一对应(简称“一一对应”); 两集合相等, 我们也可整体把握, 利用必要条件——集合中元素之和、之积相等解题(简称“整体把握”).

笔者在解题实践中发现: 很多集合相等的题目既可以“一一对应”又可以“整体把握”. “一一对应”的好处是对应关系清楚, 解题思路清晰, 不好的地方是往往需要分类讨论, 过程稍长; “整体把握”的好处是过程简洁, 但有时技巧性稍强, 不太容易掌握, 下面举例说明.

例 1 设集合 $A = \{1, a, b\}$, $B = \{a, a^2, ab\}$, 且 $A = B$, 求实数 a, b 的值.

文[1]用元素之积相等“整体把握”, 下面用“一一对应”给出另解.

另解 集合 A, B 中各有 3 个元素, 其中 a 与 a 对应, 剩下 2 个元素有两种对应情况:

(1) $\begin{cases} 1 = a^2, \\ b = ab, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -1, \\ b = 0. \end{cases}$ (由元素的互异性舍去 $a = 1$.)

$$(2) \begin{cases} 1 = ab, \\ b = a^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases} \text{ (由元素的互异性}$$

知舍去.)

综上, $a = -1, b = 0$.

例 2 已知集合 $A = \{x, x+1, 1\}$, $B = \{x, x+x^2, x^2\}$, 且 $A = B$, 求实数 x 的值.

文[1]用元素之和相等“整体把握”, 下面用“一一对应”给出另解.

另解 类似于例 1, 分两种情况讨论:

$$(1) \begin{cases} x+1 = x+x^2, \\ 1 = x^2, \end{cases} \text{ 解得 } x = -1 \text{ (由元素的}$$

互异性舍去 $x = 1$);

$$(2) \begin{cases} x+1 = x^2, \\ 1 = x+x^2, \end{cases} \text{ 无解.}$$

综上, 实数 $x = 1$.

点评 例 1、例 2 都是两个三元集合相等, 且有一个元素相同, 实际上等价于两个二元集合相等, 有两种对应情况. “一一对应”来做, 每次都要解一个方程组, 虽不比文[1]中解法简单, 不过也并不麻烦.

例 3 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 若 $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5\} =$

$\{y, y^2, y^3, y^4, y^5\}$, 求证: $x = y$.

文[1]用元素之积相等“整体把握”,出奇制胜,过程相当简洁.这是两个五元集合相等,笔者尝试用“一一对应”来做,发现虽然情况有些多,但每一种情况都很简单.

另证 由元素的互异性知 $x, y \neq 0, \pm 1$, 下面讨论元素 x 的对应情况:

(1) 若 $x = y$, 则符合题意;

(2) 若 $x = y^2$, 则 $x^3 = y^6$, 容易知道 $y^6 \neq y, y^2, y^3, y^4, y^5$ (否则会得到 $y = 0, \pm 1$, 不符合集合元素的互异性), 即 $y^6 \notin \{y, y^2, y^3, y^4, y^5\}$, 舍去;

(3) 若 $x = y^3$, 则 $x^2 = y^6$, 同理知 $y^6 \notin \{y, y^2, y^3, y^4, y^5\}$, 舍去;

(4) 若 $x = y^4$, 则 $x^2 = y^8$, 同理知 $y^8 \notin \{y, y^2, y^3, y^4, y^5\}$, 舍去;

(5) 若 $x = y^5$, 则 $x^2 = y^{10}$, 同理知 $y^{10} \notin \{y, y^2, y^3, y^4, y^5\}$, 舍去.

综上, 只能是 $x = y$, 得证.

例4 已知集合 $A = \{\sin \alpha, \cos \alpha, 1\}$, $B = \{\sin^2 \alpha, \sin \alpha + \cos \alpha, 0\}$, 且 $A = B$, 求 $(\sin \alpha)^{2015} + (\cos \alpha)^{2015}$ 的值.

解法1 由 $A = B$ 知, 集合 A 中也有元素 0; 而在集合 B 中由元素的互异性知 $\sin \alpha \neq 0$, 则只能是 $\cos \alpha = 0$. $A = B$ 即 $\{\sin \alpha, 0, 1\} = \{\sin^2 \alpha, \sin \alpha, 0\}$, 得 $\sin^2 \alpha = 1$.

在集合 A 中, 由元素的互异性知 $\sin \alpha \neq 1$, 则 $\sin \alpha = -1$.

于是, $(\sin \alpha)^{2015} + (\cos \alpha)^{2015} = -1$.

解法2 由 $A = B$ 知, 它们的元素之积相等, 则 $\sin \alpha \cos \alpha = 0$, 而 $\sin \alpha \neq 0$, 所以 $\cos \alpha = 0$;

由 $A = B$ 知, 它们的元素之和相等, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha + 1 = \sin^2 \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha$, $\sin^2 \alpha = 1$,

而 $\sin \alpha \neq 1$, 所以 $\sin \alpha = -1$.

于是, $(\sin \alpha)^{2015} + (\cos \alpha)^{2015} = -1$.

例5 (2011年全国高中数学联赛) 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B = \{-1, 3, 5, 8\}$, 则集合 $A =$ _____.

解法1 不妨设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 < a_1 + a_2 + a_4 < a_1 + a_3 + a_4 < a_2 + a_3 + a_4$.

由题意知

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -1, \\ a_1 + a_2 + a_4 = 3, \\ a_1 + a_3 + a_4 = 5, \\ a_2 + a_3 + a_4 = 8, \end{cases}$$

解得 $a_1 = -3, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 6$.

所以, 集合 $A = \{-3, 0, 2, 6\}$.

解法2 易知, 在 A 的所有三元子集中, 每个元素均出现了 3 次, 所以

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = -1 + 3 + 5 + 8 = 15,$$

故 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5$.

则集合 A 的四个元素分别为 $5 - (-1) = 6$, $5 - 3 = 2$, $5 - 5 = 0$, $5 - 8 = -3$, 即 $A = \{6, 2, 0, -3\}$.

点评 例4中解法1、解法2的过程类似, 繁简程度相当; 例5中解法1的方程组怎么解呢? 可以将诸式相加得 $3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 15$, 下面就与解法2相同了. 由此可见, 在有些题目中, “一一对应”与“整体把握”这两种解法相差不大, 甚至没有区别.

例6(2014年华约) 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 为正整数, 任取其中四个数求和, 得到集合 $\{44, 45, 46, 47\}$, 求这五个数.

解法1 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, 则

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \leq x_1 \\ &+ x_2 + x_4 + x_5 \leq x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leq x_2 + x_3 + \\ &x_4 + x_5, \end{aligned}$$

这5个数组成集合 $\{44, 45, 46, 47\}$, 所以必有

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 44 \quad ①$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 47 \quad ②$$

② - ① 得 $x_5 - x_1 = 3$. 这说明从 x_1 到 x_5 必为连续整数, 且有 $x_2 = x_3$ 或 $x_3 = x_4$, 即这五个数为

$$x_1, x_1 + 1, x_1 + 1, x_1 + 2, x_1 + 3,$$

$$\text{或 } x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, x_1 + 2, x_1 + 3.$$

代回①式, 得 $4x_1 + 4 = 44$ 或 $4x_1 + 5 = 44$,

得 $x_1 = 10$ 或 $x_1 = \frac{39}{4}$ (舍去), 则这五个数为 10,

11, 11, 12, 13, 经检验满足题意.

解法2 从这五个数中任取其中四个数求和, 共有 5 种取法, 而 $\{44, 45, 46, 47\}$ 仅有 4 个元素, 故一定有两个和相等, 设相等的和为 k , 即 $k \in \{44, 45, 46, 47\}$. 五个和式中每个数均出现了 4 次, 将它们相加得

$$\begin{aligned} 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\ = 44 + 45 + 46 + 47 + k = 45 \times 4 + k + 2, \end{aligned}$$

等式左边是 4 的倍数, 45×4 也是 4 的倍数, 则 $k + 2$ 也是 4 的倍数, 易知 $k = 46$, 代回上式解得

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 57,$$

且这五个和为 44, 45, 46, 46, 47.

所以这五个数分别为 $57 - 44 = 13$, $57 - 45 = 12$, $57 - 46 = 11$, $57 - 46 = 11$, $57 - 47 = 10$.

例 7 (2015 年全国高中数学联赛) 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是 4 个有理数, 使得 $\{a_i a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\}$, 求 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 的值.

此题的官方解答没有对 $a_i a_j$ 排序, 而是对 $|a_i a_j|$ 进行排序, 由题意可设 $|a_1| < |a_2| < |a_3| < |a_4|$, 则 $|a_i a_j| (1 \leq i < j \leq 4)$ 中最小的与次小的两个数分别是 $|a_1 a_2|$ 及 $|a_1 a_3|$, 最大的与次大的两个数分别是 $|a_3 a_4|$ 及 $|a_2 a_4|$, 又 $\{a_i a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\}$, 则对应关系跃然纸上, 详细过程不再赘述, 感兴趣的读者自行搜索查看. 下面再给出“一一对应”与“整体把握”两种解法.

解法 1 不妨设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 由 $\{a_i a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\}$ 中四负两正, 可知 $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4$, 则

$$\{a_1 a_2, a_3 a_4\} = \{1, 3\} \quad (1)$$

$$\{a_1 a_3, a_1 a_4, a_2 a_3, a_2 a_4\} = \{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}\} \quad (2)$$

对于 ① 式, $a_1 a_2 a_3 a_4 = 3$;

对于 ② 式, $a_1 a_4$ 最小, $a_2 a_3$ 最大, 则 $a_1 a_4 = -24, a_2 a_3 = -\frac{1}{8}, \{a_1 a_3, a_2 a_4\} = \{-2, -\frac{3}{2}\}$.

下面分情况讨论:

$$(1) \begin{cases} a_1 a_2 a_3 a_4 = 3, \\ a_1 a_2 = 1, \\ a_1 a_3 = -2, \\ a_1 a_4 = -24, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a_1 = -4, \\ a_2 = -\frac{1}{4}, \\ a_3 = \frac{1}{2}, \\ a_4 = 6. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a_1 a_2 a_3 a_4 = 3, \\ a_1 a_2 = 1, \\ a_1 a_3 = -\frac{3}{2}, \\ a_1 a_4 = -24, \end{cases} \quad \text{解得 } a_1^2 = 12, \text{ 这与 } a_1 \text{ 为}$$

有理数矛盾;

$$(3) \begin{cases} a_1 a_2 a_3 a_4 = 3, \\ a_1 a_2 = 3, \\ a_1 a_3 = -2, \\ a_1 a_4 = -24, \end{cases} \quad \text{解得 } a_1^2 = 48, \text{ 这与 } a_1 \text{ 为}$$

有理数矛盾;

$$(4) \begin{cases} a_1 a_2 a_3 a_4 = 3, \\ a_1 a_2 = 3, \\ a_1 a_3 = -\frac{3}{2}, \\ a_1 a_4 = -24, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a_1 = -6, \\ a_2 = -\frac{1}{2}, \\ a_3 = \frac{1}{4}, \\ a_4 = 4. \end{cases}$$

综上, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm \frac{9}{4}$.

解法 2 集合 $\{a_i a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ 中元素可两两配对使其乘积相等, 观察集合 $\{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\}$ 易知 $a_1 a_2 a_3 a_4 = 3$. 我们要求 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 的值, 而该式关于 a_1, a_2, a_3, a_4 完全对称. 所以, 由题意, 不妨假定

$$a_1 a_2 = -24, a_3 a_4 = -\frac{1}{8};$$

$$a_1 a_3 = -2, a_2 a_4 = -\frac{3}{2};$$

$$a_1 a_4 = 1, a_2 a_3 = 3.$$

解得 $a_1 = -4, a_2 = 6, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = -\frac{1}{4}$ 或

$$a_1 = 4, a_2 = -6, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4}, \text{ 则}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm \frac{9}{4}.$$

【结语】

在处理集合相等问题上, “一一对应”与“整体把握”这两种解法各有千秋, 读者切不可偏废其一. 具体解题中到底用哪种解法, 得看实际情况, 多尝试, 多比较,

多感悟, 多总结. 还要注意: 不管用哪种方法, 都要检验集合中元素的互异性.

参考文献:

- [1] 杨春波. 处理集合相等问题的新思路[J]. 数学通讯(上半月), 2015(4).

(收稿日期: 2018-09-03)

承载函数压轴小题的两个新热点—— $\frac{x}{e^x}$ 与 $\frac{\ln x}{x}$

蔡勇全

(四川省资阳市外国语实验学校, 641300)

近年来,以“ $\frac{x}{e^x}$ ”或“ $\frac{\ln x}{x}$ ”为载体的函数压轴小题频繁地出现在全国各地的高考或模拟试卷中,此类题目常以 $y = \frac{x}{e^x} + k$ 或 $y = \frac{\ln x}{x} + k$ (k 为常数) 为背景函数,考查了一元二次方程根与系数的关系、导数、函数的单调性等知识和换元、对应、图形、配凑等意识. 本文将对具体实例进行剖析,力求揭示此类试题的考查形式,探索它们的题型规律,透视其求解策略,供大家复习教学参考.

一、 $\frac{x}{e^x}$

例1 (成都市2018届高三一诊理科第12题) 若关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x} + \frac{e^x}{x - e^x} + m = 0$ 有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 其中 $m \in \mathbf{R}, e = 2.71828\cdots$ 为自然对数的底数, 则 $(\frac{x_1}{e^{x_1}} - 1)^2 (\frac{x_2}{e^{x_2}} - 1) (\frac{x_3}{e^{x_3}} - 1)$ 的值为 ()

- (A) e . (B) $1 - m$.
(C) $1 + m$. (D) 1 .

解析 结合目标式的结构特征, 可令 $\frac{x}{e^x} - 1 = t$, 则 $\frac{x}{e^x} = t + 1$, 从而

$$\frac{x}{e^x} + \frac{e^x}{x - e^x} + m = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{\frac{x}{e^x} - 1} + m$$

$$= t + 1 + \frac{1}{t} + m = 0,$$

即得关于 t 的一元二次方程

$$t^2 + (m+1)t + 1 = 0.$$

由题意可知, 此方程一定有实根 t_1, t_2 , 且 $t_1 t_2 = 1$, 并使关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x} - 1 = t_1$ 与 $\frac{x}{e^x} - 1 = t_2$ 共有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < 0 < x_2$

$< x_3$).

结合导函数与原函数的单调性的关系, 可作出函数 $y = \frac{x}{e^x} - 1$ 的图象如图1.

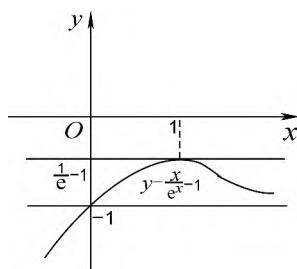


图1

根据图象易知, t_1, t_2 所满足的条件是 $t_1 < -1 < t_2 < \frac{1}{e} - 1$, 且 $t_1 = \frac{x_1}{e^{x_1}} - 1, t_2 = \frac{x_2}{e^{x_2}} - 1 = \frac{x_3}{e^{x_3}} - 1$, 因此 $(\frac{x_1}{e^{x_1}} - 1)^2 (\frac{x_2}{e^{x_2}} - 1) (\frac{x_3}{e^{x_3}} - 1) = t_1^2 \cdot t_2 \cdot t_2 = (t_1 t_2)^2 = 1$, 故应选(D).

变式1 (济南市2018届高三期末考试理科第12题) 若关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x} + \frac{e^x}{x + e^x} + m = 0$ 有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 其中 $m \in \mathbf{R}, e = 2.71828\cdots$ 为自然对数的底数, 则 $(\frac{x_1}{e^{x_1}} + 1)^2 (\frac{x_2}{e^{x_2}} + 1) (\frac{x_3}{e^{x_3}} + 1)$ 的值为 ()

- (A) 1 . (B) e .
(C) $m - 1$. (D) $1 + m$.

提示 变式1与例1的区别在于变式1是由例1的条件式与目标式的关键部位中的加号改为减号而来, 其余部位几乎未作改动, 解题变换策略实质上是一致的, 只不过这时应令 $\frac{x}{e^x} + 1 = t$, 则 $\frac{x}{e^x} = t - 1$, 整体处理策略与例1相似, 在此不作赘述, 请读者自己尝试解答. 参考答案: (A).

变式2 若关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x} + \frac{e^x}{x + e^x} + m =$

0 有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 其中 $m \in \mathbf{R}, e = 2.71828\cdots$ 为自然对数的

的底数, 则 $\frac{x_1}{e^{x_1}} \cdot (\frac{x_2}{e^{x_2}} + 1) + \frac{x_3}{e^{x_3}}$ 的值为 ()

- (A) 0. (B) e .
(C) $m-1$. (D) $1+m$.

提示 令 $\frac{x}{e^x} + 1 = t$, 则 $\frac{x}{e^x} = t-1$, 从而

$$\frac{x}{e^x} + \frac{e^x}{x + e^x} + m = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{\frac{x}{e^x} + 1} + m$$

$$= t - 1 + \frac{1}{t} + m = 0,$$

即得关于 t 的一元二次方程 $t^2 + (m-1)t + 1 = 0$.

由题意可知, 此方程一定有实根 t_1, t_2 , 且 $t_1 t_2 = 1$, 并使关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x} + 1 = t_1$ 与 $\frac{x}{e^x} + 1 = t_2$ 共有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < 0 < x_2 < x_3$), 同样结合导函数与原函数的单调性的关系, 可作出函数 $y = \frac{x}{e^x} + 1$ 的图象如图 2.

根据图象易知, t_1, t_2 所满足的条件是 $t_1 < 1 < t_2 < \frac{1}{e} + 1$, 且 $t_1 = \frac{x_1}{e^{x_1}} + 1, t_2 = \frac{x_2}{e^{x_2}} + 1 = \frac{x_3}{e^{x_3}} + 1$, 因此

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{e^{x_1}} (\frac{x_2}{e^{x_2}} + 1) + \frac{x_3}{e^{x_3}} \\ &= [(\frac{x_1}{e^{x_1}} + 1) - 1] (\frac{x_2}{e^{x_2}} + 1) + [(\frac{x_3}{e^{x_3}} + 1) - 1] \\ &= (t_1 - 1)t_2 + (t_2 - 1) \\ &= t_1 t_2 - 1 = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

故应选(A).

评注 例 1 及其两个变式之间是一种不断对条件式或目标式实施演变而又环环相扣的关系, 变式 1 的解答是受例 1 的启发, 而变式 2 保留了变式 1 的条件式, 但需要对目标式进行变形处理, 构造出 $t_1 t_2$ 这一表达式, 需要解答者具备良好的观察能力和化简变形技巧.

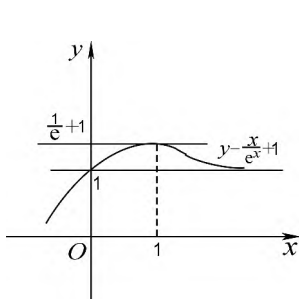


图 2

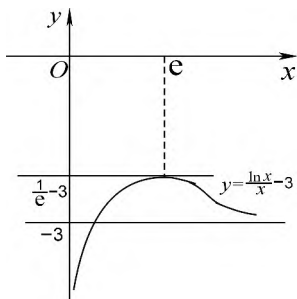


图 3

$$= \frac{\ln x}{x}$$

例 2 已知函数 $f(x) = 9(\frac{\ln x}{x})^2 + (a-3) \cdot$

$\frac{\ln x}{x} + 3(3-a)$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < 1 < x_2 < x_3$, 则 $(3 - \frac{\ln x_1}{x_1})^2 (3 - \frac{\ln x_2}{x_2}) (3 - \frac{\ln x_3}{x_3})$ 的值为_____.

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad & (3 - \frac{\ln x_1}{x_1})^2 (3 - \frac{\ln x_2}{x_2}) (3 - \frac{\ln x_3}{x_3}) \\ &= (\frac{\ln x_1}{x_1} - 3)^2 (\frac{\ln x_2}{x_2} - 3) (\frac{\ln x_3}{x_3} - 3), \end{aligned}$$

可令 $\frac{\ln x}{x} - 3 = t$, 则 $\frac{\ln x}{x} = t + 3$, 故

$$f(x) = 9(t+3)^2 + (a-3) \cdot (t+3) + 3(3-a) = 9t^2 + (a+51)t + 81.$$

由题意可知, 关于 t 的一元二次方程 $9t^2 + (a+51)t + 81 = 0$ 一定有实根 t_1, t_2 , 且 $t_1 t_2 = 9$, 并使关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x} - 3 = t_1$ 与 $\frac{\ln x}{x} - 3 = t_2$ 共有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < 1 < x_2 < x_3$), 结合导函数与原函数的单调性的关系, 可作出函数 $y = \frac{\ln x}{x} - 3$ 的图象如图 3.

根据图象易知, t_1, t_2 所满足的条件是 $t_1 < -3 < t_2 < \frac{1}{e} - 3$, 且 $t_1 = \frac{\ln x_1}{x_1} - 3, t_2 = \frac{\ln x_2}{x_2} - 3 = \frac{\ln x_3}{x_3} - 3$, 因此 $(\frac{\ln x_1}{x_1} - 3)^2 (\frac{\ln x_2}{x_2} - 3) (\frac{\ln x_3}{x_3} - 3) = t_1^2 \cdot t_2 \cdot t_2 = (t_1 t_2)^2 = 81$.

变式 1 已知函数 $f(x) = (\frac{\ln x}{x})^2 + (a-1)$

$\frac{\ln x}{x} + 1 - a$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < 1 < x_2 < x_3$, 则 $(1 - \frac{\ln x_1}{x_1})^2 (1 - \frac{\ln x_2}{x_2}) (1 - \frac{\ln x_3}{x_3})$ 的值为 ()

- (A) 1. (B) $a-1$.
(C) -1 . (D) $1-a$.

$$\begin{aligned} \text{提示} \quad & (1 - \frac{\ln x_1}{x_1})^2 (1 - \frac{\ln x_2}{x_2}) (1 - \frac{\ln x_3}{x_3}) \\ &= -(\frac{\ln x_1}{x_1} - 1)^2 (\frac{\ln x_2}{x_2} - 1) (\frac{\ln x_3}{x_3} - 1). \end{aligned}$$

令 $\frac{\ln x}{x} - 1 = t$, 则 $\frac{\ln x}{x} = t + 1$, 整体处理策略

与例 2 相似, 在此不作赘述, 请读者自己尝试解答. 参考答案: (C).

变式2 (杭州市高级中学2017年12月高三质量检测理科第12题) 已知函数 $f(x) = (ax + \ln x)(x - \ln x) - x^2$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < 1 < x_2 < x_3$, 则 $(1 - \frac{\ln x_1}{x_1})^2 (1 - \frac{\ln x_2}{x_2}) (1 - \frac{\ln x_3}{x_3})$ 的值为 ()

- (A) $a - 1$. (B) $1 - a$.
(C) -1 . (D) 1 .

提示 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{\ln x_1}{x_1})^2 (1 - \frac{\ln x_2}{x_2}) (1 - \frac{\ln x_3}{x_3}) \\ &= (\frac{\ln x_1}{x_1} - 1)^2 (\frac{\ln x_2}{x_2} - 1) (\frac{\ln x_3}{x_3} - 1). \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{\ln x}{x} - 1 = t, \text{ 则 } \frac{\ln x}{x} = t + 1.$$

由题意知, 方程 $(ax + \ln x)(x - \ln x) - x^2 = 0$ 有三个不相等的正实根 $x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow$ 方程 $(a + \frac{\ln x}{x}) \cdot (1 - \frac{\ln x}{x}) - 1 = 0$ 有三个不相等的正实根 $x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow$ 关于 t 的方程 $t^2 + (a+1)t + 1 = 0$ 有实根 t_1, t_2 , 且关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x} - 1 = t_1$ 与 $\frac{\ln x}{x} - 1 = t_2$ 共有三个不相等的正实根 x_1, x_2, x_3 , 结合导函数与原函数的单调性的关系, 可作出函数 $y = \frac{\ln x}{x} - 1$ 的图象, 如图4.

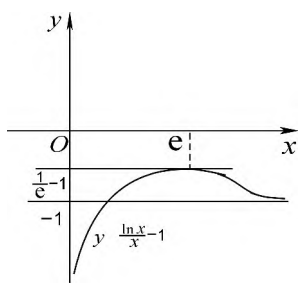


图4

根据图象易知, t_1, t_2 所满足的条件是 $t_1 < -1 < t_2 < \frac{1}{e} - 1$, 且 $t_1 = \frac{\ln x_1}{x_1} - 1, t_2 = \frac{\ln x_2}{x_2} - 1 = \frac{\ln x_3}{x_3} - 1$, 因此 $(\frac{\ln x_1}{x_1} - 1)^2 (\frac{\ln x_2}{x_2} - 1) (\frac{\ln x_3}{x_3} - 1) = t_1^2 \cdot t_2 \cdot t_2 = (t_1 t_2)^2 = 1$, 故应选(D).

变式3 已知函数 $f(x) = (ax + \ln x)(x - \ln x) - x^2$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_3 > x_2 > x_1 > 1$, 则 $(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}) (1 - \frac{\ln x_2}{x_2})^2 (1 - \frac{\ln x_3}{x_3})$ 的值为_____.

提示 观察刚才变式2中作出的图象, 易知 $-1 < t_1 < \frac{1}{e} - 1 = t_2$, 因此 $t_1 = \frac{\ln x_1}{x_1} - 1 = \frac{\ln x_3}{x_3} - 1, t_2 = \frac{\ln x_2}{x_2} - 1$, 故

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{\ln x_1}{x_1}) (1 - \frac{\ln x_2}{x_2})^2 (1 - \frac{\ln x_3}{x_3}) \\ &= (\frac{\ln x_1}{x_1} - 1) (\frac{\ln x_2}{x_2} - 1)^2 (\frac{\ln x_3}{x_3} - 1) \\ &= t_1 \cdot t_2^2 \cdot t_1 = (t_1 t_2)^2 = 1. \end{aligned}$$

评注 借助上述处理策略, 可将例2作适当的推广并得到如下容易证明的结论:

已知 m 为非零常数, 函数 $g(x) = m^2 (\frac{\ln x}{x})^2 + (a - m) \cdot \frac{\ln x}{x} + m(m - a)$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < 1 < x_2 < x_3$, 则 $(m - \frac{\ln x_1}{x_1})^2 (m - \frac{\ln x_2}{x_2}) (m - \frac{\ln x_3}{x_3})$ 的值为 m^2 .

当然还需注意, 若将题目中的条件作适当的变形, 那么我们在解题时一定要抓住核心和本质的东西, 将条件转化为我们所需要的对象, 比如将例2的变式2中的函数 $f(x)$ 设置为“ $f(x) = ax + \ln x - \frac{x^2}{x - \ln x}$ ”, 那么我们应该认识到, 它们的本质其实是一致的.

最后, 通过上面诸多案例的展示, 可以发现, 解决以“ $\frac{x}{e^x}$ ”或“ $\frac{\ln x}{x}$ ”为载体的函数压轴小题, 首先应结合目标式的结构特征实施代换, 并作出此代换式的图象, 再将此图象与已知条件中方程的根的个数或函数的零点个数对应起来, 既找到了 t_1, t_2 所满足的条件, 又抓住了目标式等价转换后的本质.

参考文献

- [1] 蔡勇全. 一道客观性压轴题的六种求解视角[J]. 数学通讯(上半月), 2013(11、12): 40-41.
- [2] 何志雄, 蔡勇全. 辨析“形似质异”的八组函数问题[J]. 中学数学教学参考, 2017(10): 43-44.
- [3] 蔡勇全. 论试题创新设计的若干视角[J]. 数学通讯(下半月), 2017(5): 52-58.

(收稿日期: 2018-08-16)

险入误区,化惑为笃

——对一道颇为流行试题解法的商榷

廖达凡

(江西省大余中学,341500)

有这样一道颇为流行的试题:

已知抛物线 $C: y^2 = x$ 上一定点 $B(1,1)$, P, Q 是抛物线上的两个动点,当动点 P 在抛物线上运动时, $BP \perp PQ$, 则点 Q 的纵坐标的取值范围是_____.

课堂教学中,笔者给出了如下解答过程:

不妨设 $P(p^2, p), Q(q^2, q)$, 由题意可知, $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, 即

$$(p^2 - 1)(q^2 - 1) + (p - 1)(q - 1) = 0,$$

由于 $p \neq q \neq 1$, 故化简整理得

$$p^2 + (q + 1)p + (q + 1) = 0 \quad ①$$

此时,问题转化为方程 ① 有解,故只需 $\Delta \geq 0$, 即 $q^2 - 2q - 3 \geq 0$, 解得: $q \leq -1$ 或 $q \geq 3$.

故点 Q 的纵坐标的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

问题进行到这里,笔者以为这道试题已经处理得很完美.

这时候,有学生突然对上述解答提出疑问,需要对答案进行修正,理由是:

若 $p = 1$ 时, $q = -\frac{3}{2}$, 但是,根据题意有 $p \neq q \neq 1$, 因此 $q \neq -\frac{3}{2}$, 故点 Q 的纵坐标的取值范围应该是 $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, -1] \cup [3, +\infty)$.

学生对问题解答的修正,表面上看起来使答案更加合理,也更加严谨.

课后,笔者带着困惑查阅了目前部分教辅资料和试卷,发现的确有相当一部分资料上流行的是后者答案,那么,究竟哪个答案是正确的呢?

事实上,我们发现,当 $q = -\frac{3}{2}$ 时,代入等式

① 可解得: $p = -\frac{1}{2}$, 或 $p = 1$, 也就是说,抛物线

上的点 P 存在两个位置即 $P(1,1)$ 或 $P(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$, 都能使 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, 此时点 Q 的坐标为

$Q(\frac{9}{4}, -\frac{3}{2})$, 但若点 P 的坐标为 $P(1,1)$ 时,点 P

与点 B 重合,不符合题意,因而仅当点 $P(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ 时,抛物线上存在点 $Q(\frac{9}{4}, -\frac{3}{2})$, 使得 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, 符合题意.

因此,点 Q 的纵坐标的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

笔者对这道看似“错误答案”的试题进行自觉分析,从险入误区,到不断推敲其答案的合理性,最终找到解题思维的愚钝点,转隐为显,化惑为笃,回归问题本质.可以说,这是一道十分容易答错的试题,学生需要具备良好的思维品质和解题素养以及敏捷的判断分析能力,才能顺利完成问题的解答.

因此,点 Q 的纵坐标的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

笔者对这道看似“错误答案”的试题进行自觉分析,从险入误区,到不断推敲其答案的合理性,最终找到解题思维的愚钝点,转隐为显,化惑为笃,回归问题本质.可以说,这是一道十分容易答错的试题,学生需要具备良好的思维品质和解题素养以及敏捷的判断分析能力,才能顺利完成问题的解答.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部,普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2017年12月.

(收稿日期:2018-08-02)



专 论 荟 萃

一道向量调研题的解法探究与推广

叶晓斌

(湖北省孝感一中, 432000)

题目 (2017 年湖北省武汉市高三四月调考理科第 16 题) 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 且 $\angle A = 60^\circ$, 若 $\vec{AO} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$), 则 $\alpha + \beta$ 的最大值为_____.

解法一 如图 1, 延长 AO 交 BC 于 D , 设 $\vec{AD} = m \vec{AB} + n \vec{AC}$ ($m > 0, n > 0$), 又 $\vec{AO} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$, 易得 $\frac{m}{\alpha} = \frac{n}{\beta} = \frac{AD}{AO}$, 即有 $m = \alpha \cdot \frac{AD}{AO}$, $n = \beta \cdot \frac{AD}{AO}$, 所以

$$m + n = \alpha \cdot \frac{AD}{AO} + \beta \cdot \frac{AD}{AO}.$$

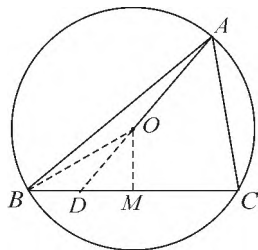


图 1

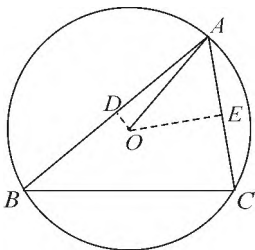


图 2

由 B, C, D 三点共线可得 $m + n = 1$, 故有

$$\alpha + \beta = \frac{AO}{AD} = \frac{AO}{AO + OD} = \frac{1}{1 + \frac{OD}{OA}}.$$

过点 O 过作 $OM \perp BC$, 垂足为 M , 则 $OD \geq OM$.

因为 $\angle BOM = \angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\frac{OM}{OB} = \cos \angle BOM = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, 所以 $OB = 2OM$, 所以 $OA = 2OM \leq 2OD$, 于是可得

$$\alpha + \beta = \frac{1}{1 + \frac{OD}{OA}} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

所以 $\alpha + \beta$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$.

解法二 如图 2, 分别取 AB, AC 的中点 D, E , 连接 OD, OE , 则 $OD \perp AB, OE \perp AC$, 设 AB

$$= c, AC = b, \text{ 则 } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}cb,$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AO} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AO}| \cdot \cos \angle BAO = \frac{1}{2} |\vec{AB}|^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AO} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AO}| \cdot \cos \angle CAO = \frac{1}{2} |\vec{AC}|^2 = \frac{1}{2}b^2.$$

又因为 $\vec{AO} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$, 所以
 $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = \alpha \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \beta \vec{AC} \cdot \vec{AB},$
 $\vec{AO} \cdot \vec{AC} = \alpha \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \beta \vec{AC} \cdot \vec{AC},$
 即有

$$\frac{1}{2}c^2 = \alpha c^2 + \frac{1}{2}\beta cb \quad ①$$

$$\frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}cb\alpha + \beta b^2 \quad ②$$

联立 ①② 可解得:

$$\alpha = \frac{2}{3} - \frac{b}{3c}, \beta = \frac{2}{3} - \frac{c}{3b},$$

所以

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \left(\frac{2}{3} - \frac{b}{3c}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{c}{3b}\right) \\ &= \frac{4}{3} - \left(\frac{b}{3c} + \frac{c}{3b}\right) \leq \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

当且仅当 $b = c$ 时等号成立.

所以 $\alpha + \beta$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$.

解法三 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R , 因为

$$\begin{aligned} \vec{AO} &= \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \\ &= \alpha(\vec{AO} + \vec{OB}) + \beta(\vec{AO} + \vec{OC}), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \vec{OA} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta - 1} \vec{OB} + \frac{\beta}{\alpha + \beta - 1} \vec{OC},$$

又 $\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$, 所以

$$\begin{aligned} \vec{OA}^2 &= \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta - 1} \vec{OB} + \frac{\beta}{\alpha + \beta - 1} \vec{OC}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta - 1}\right)^2 \vec{OB}^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta - 1}\right)^2 \vec{OC}^2 + \end{aligned}$$

$$\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta-1)^2} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC},$$

$$\text{即 } R^2 = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}\right)^2 \cdot R^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}\right)^2 \cdot R^2 + \frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta-1)^2} \cdot R^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\text{整理得 } 2(\alpha+\beta) = 3\alpha\beta + 1.$$

$$\text{而 } \alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2, \text{ 当且仅当 } \alpha = \beta \text{ 时等号成}$$

$$\text{立, 所以 } 2(\alpha+\beta) \leq 3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + 1, \text{ 解得 } \alpha+\beta \leq \frac{2}{3}$$

或者 $\alpha+\beta \geq 2$, 当且仅当 $\alpha = \beta$ 时等号成立.

又由图 1 可知, B, D, C 三点共线, 所以存在 x , 使得 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AC}$; 而由作法知 A, D, O 三点共线, 所以存在 $\lambda \in (1, +\infty)$, 使得 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AO}$, 所以

$$\overrightarrow{AO} = \frac{x}{\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{1-x}{\lambda}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以 } \alpha+\beta = \frac{x}{\lambda} + \frac{1-x}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \in (0, 1),$$

$$\text{所以 } \alpha+\beta \leq \frac{2}{3}.$$

$$\text{所以 } \alpha+\beta \text{ 的最大值为 } \frac{2}{3}.$$

点评 方法一运用平面向量基本定理和向量共线定理将所求问题转化为求线段 $\frac{OD}{OA}$ 的最小值, 然后利用 $OD \geq OM$ 即可求解之; 方法二首先充分利用平面向量的数量积的几何意义, 将向量数量积 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ 和 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$ 的值用 $\triangle ABC$ 的边长 b, c 表示出来, 然后结合已知条件得出关于边长 b, c 与 α, β 的方程组, 进而解出 α, β 关于边长 b, c 的关系式, 最后运用基本不等式即可求解之; 方法三运用三角形外接圆的性质(圆心到三角形各顶点的距离相等), 得出 α 与 β 的关系式, 再利用基本不等式即可求解之.

下面以第二种方法为例对于上述问题作进一步的探究与推广.

探究 1 若将“ $\angle A = 60^\circ$ ”改为“ $\angle A = \theta$ ”, 则结果如何?

类似于解法二可得:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos \theta,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos \angle BAO$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2} c^2,$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos \angle CAO$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{2} b^2.$$

又因为 $\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, 所以

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC},$$

即有

$$\frac{1}{2} c^2 = \alpha c^2 + \beta bc \cos \theta \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} b^2 = \alpha bc \cos \theta + \beta b^2 \quad (4)$$

联立 (3)(4) 可解得:

$$\alpha = \frac{1}{2\sin^2 \theta} - \frac{b \cos \theta}{2c \sin^2 \theta}, \beta = \frac{1}{2\sin^2 \theta} - \frac{c \cos \theta}{2b \sin^2 \theta},$$

所以

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \left(\frac{1}{2\sin^2 \theta} - \frac{b \cos \theta}{2c \sin^2 \theta}\right) + \left(\frac{1}{2\sin^2 \theta} - \frac{c \cos \theta}{2b \sin^2 \theta}\right) \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{2\sin^2 \theta} \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right). \end{aligned}$$

(I) 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos \theta > 0$, 所以

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\leq \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{2\sin^2 \theta} \times 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{1 + \cos \theta}, \end{aligned}$$

当且仅当 $b = c$ 时等号成立.

$$(II) \text{ 当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \alpha + \beta = \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1.$$

(III) 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $\cos \theta < 0$, 所以

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\geq \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{2\sin^2 \theta} \times 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{1 - \cos \theta}, \end{aligned}$$

且仅当 $b = c$ 时等号成立.

结论 1 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 且 $\angle A = \theta$, 若 $\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$, 则

$$(1) \text{ 当 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \alpha + \beta \text{ 有最大值 } \frac{1}{1 + \cos \theta};$$

$$(2) \text{ 当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \alpha + \beta = 1;$$

$$(3) \text{ 当 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 时, } \alpha + \beta \text{ 有最小值 } \frac{1}{1 - \cos \theta}.$$

探究 2 在探究 1 的前提下, $m\alpha + n\beta (mn > 0)$ 的最值又是多少呢?

由探究 1 可知,

$$\alpha = \frac{1}{2\sin^2 \theta} - \frac{b \cos \theta}{2c \sin^2 \theta}, \beta = \frac{1}{2\sin^2 \theta} - \frac{c \cos \theta}{2b \sin^2 \theta},$$

所以

$$m\alpha + n\beta$$

$$= m\left(\frac{1}{2\sin^2\theta} - \frac{b\cos\theta}{2c\sin^2\theta}\right) + n\left(\frac{1}{2\sin^2\theta} - \frac{c\cos\theta}{2b\sin^2\theta}\right) \\ = \frac{m+n}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}\left(\frac{bm}{c} + \frac{cn}{b}\right).$$

(1) 若 $m > 0, n > 0$,

① 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos\theta > 0$, 所以

$$m\alpha + n\beta \leq \frac{m+n}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} \cdot 2\sqrt{\frac{bm}{c} \cdot \frac{cn}{b}} \\ = \frac{(m+n) - 2\sqrt{mn}\cos\theta}{2\sin^2\theta},$$

当且仅当 $\frac{bm}{c} = \frac{cn}{b}$, 即 $b^2m = c^2n$ 时等号成立.

② 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $m\alpha + n\beta = \frac{m+n}{2}$.

③ 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $\cos\theta < 0$, 所以

$$m\alpha + n\beta \geq \frac{m+n}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} \cdot 2\sqrt{\frac{bm}{c} \cdot \frac{cn}{b}} \\ = \frac{(m+n) - 2\sqrt{mn}\cos\theta}{2\sin^2\theta},$$

当且仅当 $\frac{bm}{c} = \frac{cn}{b}$, 即 $b^2m = c^2n$ 时等号成立.

(2) 若 $m < 0, n < 0$,

① 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos\theta > 0$, 所以

$$m\alpha + n\beta \geq \frac{m+n}{2\sin^2\theta} + \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} \\ \cdot 2\sqrt{\left(-\frac{bm}{c}\right) \cdot \left(-\frac{cn}{b}\right)} \\ = \frac{(m+n) + 2\sqrt{mn}\cos\theta}{2\sin^2\theta},$$

当且仅当 $-\frac{bm}{c} = -\frac{cn}{b}$, 即 $b^2m = c^2n$ 时等号

成立.

② 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $m\alpha + n\beta = \frac{m+n}{2}$.

③ 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $\cos\theta < 0$, 所以

$$m\alpha + n\beta \leq \frac{m+n}{2\sin^2\theta} + \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} \\ \cdot 2\sqrt{\left(-\frac{bm}{c}\right) \cdot \left(-\frac{cn}{b}\right)} \\ = \frac{(m+n) + 2\sqrt{mn}\cos\theta}{2\sin^2\theta},$$

当且仅当 $-\frac{bm}{c} = -\frac{cn}{b}$, 即 $b^2m = c^2n$ 时等号

成立.

结论 2 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 且 $\angle A = \theta (\theta \neq \frac{\pi}{2})$, 若 $\overrightarrow{AO} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$, 则

(1) 若 $m > 0, n > 0$, ① 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $m\alpha + n\beta$ 有最大值 $\frac{(m+n) - 2\sqrt{mn}\cos\theta}{2\sin^2\theta}$; ② 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $m\alpha + n\beta = \frac{m+n}{2}$; ③ 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $m\alpha + n\beta$ 有最小值 $\frac{(m+n) - 2\sqrt{mn}\cos\theta}{2\sin^2\theta}$;

(2) 当 $m < 0, n < 0$ 时, ① 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $m\alpha + n\beta$ 有最小值 $\frac{(m+n) + 2\sqrt{mn}\cos\theta}{2\sin^2\theta}$; ② 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $m\alpha + n\beta = \frac{m+n}{2}$; ③ 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $m\alpha + n\beta$ 有最大值 $\frac{(m+n) + 2\sqrt{mn}\cos\theta}{2\sin^2\theta}$.

特别地, 令 $m = n = 1, \theta = 60^\circ$, 由上述结论可得 $\alpha + \beta$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$, 即文首习题的答案.

探究 3 若将“ $\angle A = 60^\circ$ ”改为“ $\angle A = \theta$ ”, 则 $\alpha\beta$ 的最值又如何呢?

由探究 1 知,

$$\alpha\beta = \left(\frac{1}{2\sin^2\theta} - \frac{b\cos\theta}{2c\sin^2\theta}\right)\left(\frac{1}{2\sin^2\theta} - \frac{c\cos\theta}{2b\sin^2\theta}\right) \\ = \frac{1}{4\sin^4\theta}\left(1 - \frac{b\cos\theta}{c}\right)\left(1 - \frac{c\cos\theta}{b}\right) \\ = \frac{1}{4\sin^4\theta}\left[1 + \cos^2\theta - \cos\theta\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\right].$$

(I) 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos\theta > 0$, 所以

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{4\sin^4\theta}\left(1 + \cos^2\theta - \cos\theta \cdot 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}}\right) \\ = \frac{(1 - \cos\theta)^2}{4\sin^4\theta} = \frac{1}{4(1 + \cos\theta)^2},$$

当且仅当 $b = c$ 时等号成立.

(II) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\alpha\beta = \frac{1}{4\sin^4\theta}$.

(III) 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $\cos\theta < 0$, 所以

$$\alpha\beta \geq \frac{1}{4\sin^4\theta}\left(1 + \cos^2\theta - \cos\theta \cdot 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}}\right)$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{4 \sin^4 \theta} = \frac{1}{4(1 + \cos \theta)^2},$$

当且仅当 $b = c$ 时等号成立.

结论 3 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 且 $\angle A = \theta$, 若 $\overrightarrow{AO} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$), 则

(I) 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\alpha\beta$ 有最大值 $\frac{1}{4(1 + \cos \theta)^2}$;

(II) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\alpha\beta = \frac{1}{4 \sin^4 \theta}$;

(III) 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $\alpha\beta$ 有最小值 $\frac{1}{4(1 + \cos \theta)^2}$.

例题 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 且 $\angle A = 60^\circ$, 若 $\overrightarrow{AO} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则

$x + 2y$ 的最大值为 _____; xy 的最大值为 _____.

解析 令 $\theta = 60^\circ, m = 1, n = 2$, 并应用结论

2 可得, $x + 2y$ 的最大值为 $\frac{3 - \sqrt{2}}{2 \times \frac{3}{4}} = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

令 $\theta = 60^\circ$, 并应用结论 3 可知, xy 的最大值为 $\frac{1}{9}$.

总结 运用上述探究的结论对这一类向量问题的求解是行之有效的, 它不仅给这类向量问题的求解提供有力的理论依据, 而且为求解这类向量问题引入了一种更为简单的解题方法和解题思路.

(收稿日期: 2018-08-13)

一类条件分式型不等式的解法研究

李建潮

(浙江省湖州市双林中学, 313012)

《数学通讯》上半月刊 2017 年第 9 期问题 319(以下简称“问题”):

问题 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 3$, 求证:

$$\frac{a+1}{3a^2-2a+5} + \frac{b+1}{3b^2-2b+5} + \frac{c+1}{3c^2-2c+5} \leq 1 \quad ①$$

这是一类典型的竞赛型的条件分式不等式问题, 难度系数自然较大, 读者往往难以找到问题的“切入点”, 故而与大家共同探究其解法.

1. 问题另解呈规律

先给出有别于《数学通讯》上半月刊 2017 年第 11 期上的三种证法, 而改证其反向不等式, 然后应用柯西不等式来进行推证, 以求问题呈现出一般规律.

首先给出 n 维柯西不等式:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

问题的证明 ① 式等价于:

$$\frac{-2(a+1)}{3a^2-2a+5} + \frac{-2(b+1)}{3b^2-2b+5} + \frac{-2(c+1)}{3c^2-2c+5} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2(a+1)}{3a^2-2a+5} + 1 - \frac{2(b+1)}{3b^2-2b+5} + 1 - \frac{2(c+1)}{3c^2-2c+5} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2-4a+3}{3a^2-2a+5} + \frac{3b^2-4b+3}{3b^2-2b+5} + \frac{3c^2-4c+3}{3c^2-2c+5} \geq 1 \quad ②$$

即先把(原)问题转化为“求证一个不小于 1 的分式型不等式 ② 的问题”.

其次, 应用三维柯西不等式并结合题设 $a + b + c = 3$, 可得

② 式左边

$$\begin{aligned} &\geq \frac{(\sqrt{3a^2-4a+3} + \sqrt{3b^2-4b+3} + \sqrt{3c^2-4c+3})^2}{(3a^2-2a+5) + (3b^2-2b+5) + (3c^2-2c+5)} \\ &= \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+9} \cdot \{(3a^2-4a+3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (3b^2 - 4b + 3) + (3c^2 - 4c + 3) \\
& + 2[\sqrt{(3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3)} \\
& + \sqrt{(3c^2 - 4c + 3)(3a^2 - 4a + 3)} \\
& + \sqrt{(3a^2 - 4a + 3)(3b^2 - 4b + 3)}] \} \\
& = \frac{1}{3(a^2 + b^2 + c^2) + 9} \cdot \{3(a^2 + b^2 + c^2) - 3 \\
& + 2[\sqrt{(3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3)} \\
& + \sqrt{(3c^2 - 4c + 3)(3a^2 - 4a + 3)} \\
& + \sqrt{(3a^2 - 4a + 3)(3b^2 - 4b + 3)}] \}.
\end{aligned}$$

据此,把求证不等式 ② 的问题又归结为求证以下无理型不等式问题:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3)} + \\
& \sqrt{(3c^2 - 4c + 3)(3a^2 - 4a + 3)} + \\
& \sqrt{(3a^2 - 4a + 3)(3b^2 - 4b + 3)} \geq 6. \quad ③
\end{aligned}$$

事实上,由 $a = b = c = 1$ 时 ③ 式取“=”号这一题眼,并再次应用当 $n = 6$ 时的柯西不等式,有

$$\begin{aligned}
& (3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3) \\
& = [3(b - \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{3}][3(c - \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{3}] \\
& = [3(b - \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}][\frac{1}{3} \\
& + 3(c - \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}] \\
& \geq [(b - \frac{2}{3}) + (c - \frac{2}{3}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}]^2 \\
& = (b + c)^2,
\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{(3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3)} \geq b + c.$$

同理可得:

$$\sqrt{(3c^2 - 4c + 3)(3a^2 - 4a + 3)} \geq c + a,$$

$$\sqrt{(3a^2 - 4a + 3)(3b^2 - 4b + 3)} \geq a + b,$$

以上三式相加,并结合 $a + b + c = 3$, ③ 式获证,进而可知 ② 式获证,从而原问题得证.

评注 1 当然,不等式 $(3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3) \geq (b + c)^2$ 的证明也可改由应用当 $n = 2$ 时的柯西不等式来完成:

$$\begin{aligned}
& (3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3) \\
& = [3(b - \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{3}][3(c - \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{3}] \\
& = \{[3(b - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}] + 1\} \{1 + [3(c - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}]\} \\
& \geq [\sqrt{3(b - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}} + \sqrt{3(c - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}}]^2 \\
& = \{\sqrt{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})[3(b - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})[3(c - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}]} \}^2 \\
& \geq \{[(b - \frac{2}{3}) + \frac{2}{3}] + [(c - \frac{2}{3}) + \frac{2}{3}]\}^2 \\
& = (b + c)^2,
\end{aligned}$$

依据以上问题另解(或评注 1)可见:(原)问题的核心是就不等式 ③ 的证明,其中不等式 $\sqrt{(3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3)} \geq b + c$ 的证明呈现了如下规律:

结论 1 设二次函数 $f(x) = px^2 + qx + r (p > 0)$ 满足 $\Delta = q^2 - 4pr < 0$, 其最小值 $m = \frac{4pr - q^2}{4p} \geq$

$\frac{1}{2}f(1)$; 实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 3$, 则 $\sqrt{f(b) \cdot f(c)} + \sqrt{f(c) \cdot f(a)} + \sqrt{f(a) \cdot f(b)} \geq 3f(1)$.

其证明仿照以上评注 1, 而从略.

2. 问题优解呈原理

问题优化证明 如前证明方法,欲证 ① 式成立,只需证明 ③ 式成立即可.

其中

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(3b^2 - 4b + 3)(3c^2 - 4c + 3)} \\
& = \sqrt{[b^2 + 1 + 2(b - 1)^2][c^2 + 1 + 2(c - 1)^2]} \\
& \geq \sqrt{(b^2 + 1^2)(1^2 + c^2)} \geq b + c, \quad ④
\end{aligned}$$

同理可得:

$$\sqrt{(3c^2 - 4c + 3)(3a^2 - 4a + 3)} \geq c + a,$$

$$\sqrt{(3a^2 - 4a + 3)(3b^2 - 4b + 3)} \geq a + b,$$

以上三式相加,并结合 $a + b + c = 3$, ③ 式获证,进而可知原问题得证.

问题的优化证明呈现一个原理:

结论 2 设二次函数 $f(x) = px^2 + qx + r (p > 0)$ 满足 $\Delta = q^2 - 4pr < 0$, $2p + q \neq 0$, 且 $f(x)$ 的最小值 $m > \frac{1}{2}f(1)$. 则存在唯一的实数 $k \in (0, p)$, 使得二次函数 $g(x) = f(x) - k(x - 1)^2$ 有最小值(记为 m') $m' = \frac{1}{2}g(1)$.

证明 显然 $g(1) = f(1) > 0$.

把 $f(x) = px^2 + qx + r$ 改写成:

$$f(x) = p(x - 1)^2 + (2p + q)(x - 1) + p + q + r,$$

则 $m = f(1) - \frac{(2p + q)^2}{4p}$, 及

$$g(x) = (p - k)(x - 1)^2 + (2p + q)(x - 1)$$

$$+ f(1) = [\sqrt{p - k}(x - 1) + \frac{2p + q}{2\sqrt{p - k}}]^2 + f(1)$$

$$-\frac{(2p+q)^2}{4(p-k)},$$

其中待定的 $k < p$, 则可得 $m' = f(1) - \frac{(2p+q)^2}{4(p-k)}$. 于是

$$\begin{aligned} m' &= \frac{1}{2}g(1) \Leftrightarrow f(1) - \frac{(2p+q)^2}{4(p-k)} = \frac{1}{2}f(1) \\ \Leftrightarrow k &= p - \frac{(2p+q)^2}{2f(1)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{由于题设 } m > \frac{1}{2}f(1) &\Leftrightarrow f(1) - \frac{(2p+q)^2}{4p} > \\ \frac{1}{2}f(1) &\Leftrightarrow p - \frac{(2p+q)^2}{2f(1)} > 0. \end{aligned}$$

$$\text{又显然 } p - \frac{(2p+q)^2}{2f(1)} < p \text{ (由于 } 2p+q \neq 0 \text{).}$$

所以, ⑤ 式给出的 k 值即为所求.

结论 2 证毕.

评注 2 ④ 式的放缩原理是: 由 $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$ 满足结论 2 的所有条件, 而得

$$k = p - \frac{(2p+q)^2}{2f(1)} = 3 - \frac{(2 \times 3 - 4)^2}{2 \times 2} = 2,$$

所以, $f(x)$ 的合理放缩为 $f(x) \geq f(x) - 2(x-1)^2 = x^2 + 1 = g(x)$, 从而为 ④ 式后面部分应用柯西不等式提供了便捷.

3. 原理引领 高屋建瓴

结论 1 的功能是: 有效地证明形如 ① 式的条件分式型不等式; 结论 2(原理) 的功能是: 使证明得以更明晰、解法更完美, 更有甚者优化问题也尽在其中, 不妨用一道竞赛题说明之.

竞赛题 (第 7 届中国西部奥林匹克试题) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}, a+b+c=3$, 求证:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5a^2-4a+11} + \frac{1}{5b^2-4b+11} + \frac{1}{5c^2-4c+11} \\ \leq \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

分析 ⑥ 式等价变形为:

$$\begin{aligned} &\frac{-8}{5a^2-4a+11} + \frac{-8}{5b^2-4b+11} \\ &+ \frac{-8}{5c^2-4c+11} \geq -2 \\ \Leftrightarrow &(1 - \frac{8}{5a^2-4a+11}) + (1 - \frac{8}{5b^2-4b+11}) + (1 - \frac{8}{5c^2-4c+11}) \geq 1 \\ \Leftrightarrow &\frac{5a^2-4a+3}{5a^2-4a+11} + \frac{5b^2-4b+3}{5b^2-4b+11} \\ &+ \frac{5c^2-4c+3}{5c^2-4c+11} \geq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

下面改证 ⑦ 式成立即可.

显然, ⑦ 式左边的每个分式的分子、分母都是正数, 且每个分式都介于 0、1 之间(“真分数”). 于是, 不妨“提前”放缩这三个“真分数”. 令每个分子为 $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$ (则每个分母是 $f(x) + 8$). 容易验证 $f(x)$ 满足结论 2 的所有条件, 由 ⑤ 式可得 $k = p - \frac{(2p+q)^2}{2f(1)} = 5 - \frac{(2 \times 5 - 4)^2}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$, 即存在 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2$. 结合

“真分数”性质: $\frac{b}{a} \geq \frac{b-m}{a-m} (a > b > m \geq 0)$, 把

⑦ 式左边的每个分式合理放缩成:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2-4x+3}{5x^2-4x+11} &= \frac{f(x)}{f(x)+8} \geq \frac{g(x)}{g(x)+8} \\ &= \frac{\frac{9}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}}{\frac{9}{2}x^2-3x+\frac{21}{2}}. \end{aligned}$$

所以, 欲证 ⑦ 式, 只需证以下不等式即可:

$$\frac{9a^2-6a+5}{9a^2-6a+21} + \frac{9b^2-6b+5}{9b^2-6b+21} + \frac{9c^2-6c+5}{9c^2-6c+21} \geq 1 \quad (8)$$

上式左边的每个分式的分子是二次函数 $h(x) = 2g(x) = 9x^2 - 6x + 5 = (3x-1)^2 + 4$, 具有结论 2(原理) 所述性质: 最小值 $m' = 4 = \frac{1}{2}h(1)$.

接下来, 再仿照证明 ② 式的方法——用两次柯西不等式证 ⑧ 式就更趋合理与便捷了, 例如其间的:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(9b^2-6b+5)(9c^2-6c+5)} \\ &= \sqrt{[(3b-1)^2+2^2][2^2+(3c-1)^2]} \\ &\geq 2(3b-1) + 2(3c-1) = 6(b+c) - 4. \end{aligned}$$

评注 3 不等式 ⑧ 是不等式 ⑦ 的优化, 其等价不等式是:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{9a^2-6a+21} + \frac{1}{9b^2-6b+21} \\ &+ \frac{1}{9c^2-6c+21} \leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

即为竞赛题的优化. 这正是结论 2(原理) 的深意所在.

同样地, 文首问题中的不等式可优化为:

$$\begin{aligned} &\frac{a+1}{a^2+2a+3} + \frac{b+1}{b^2+2b+3} \\ &+ \frac{c+1}{c^2+2c+3} \leq 1. \end{aligned}$$

(收稿日期: 2018-09-16)

对 2018 年广东省预赛第 9 题的深入探究

陈万寿

龙宇

(广东省佛山市莘村中学, 528300)

(广东省佛山市罗定邦中学, 528300)

1. 题目

2018 年全国高中数学联合竞赛广东省预赛

第 9 题为:

设函数 $f(x) = e^x - 1 - x$,

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{1}{n}]$ (n 为正整数) 的最大值 b_n ;

(2) 令 $a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - b_n$, $p_k = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}$ (n, k 为正整数), 求证:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n < \sqrt{\frac{2}{a_n} + 1} - 1.$$

2. 解法呈现

对于第(1)问, $b_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}$, 过程略;

对于第(2)问, 因为 $a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - b_n = \frac{1}{n}$, 所以

$$\sqrt{\frac{2}{a_n} + 1} - 1 = \sqrt{2n+1} - 1.$$

分析: 参考文[1], 可尝试将 $\sqrt{2n+1} - 1$ 拆项为 n 项的和, 再与不等式左边的项逐项相比.

易知 $\sqrt{2n+1} - 1 = (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) + \cdots + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)$, 原不等式转化为一个加强版的不等式:

$$p_n < \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}.$$

证法一(糖水不等式)

由(1)可知 $a_n = \frac{1}{n}$, 由糖水不等式可得

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} (p_k)^2 &= \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2k)} \right]^2 \\ &< \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} &= \frac{2}{2\sqrt{2k+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } p_k < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1},$$

所以

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_n &< (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \\ &+ \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\ &= \sqrt{2n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2}{a_n} + 1} - 1. \end{aligned}$$

证法二 因为

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{4k^2 - 1}{4k^2} < 1,$$

所以

$$\begin{aligned} (p_k)^2 &= \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k)} \right]^2 \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \cdots \cdot \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} \cdot \frac{1}{2k+1} \\ &< \frac{1}{2k+1}, \end{aligned}$$

以下与证法一同, 略.

点评 该解答过程的基本思路是通过拆项进行逐项对比. 对于 p_n 的放缩则是利用其结构特征进行重组放缩(本质就是糖水定理).

3. 几何背景

对上述证明中的核心不等式:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} (k \geq 1),$$

对上式两边取对数可得:

$$\begin{aligned} &[\ln 2 + \ln 4 + \cdots + \ln(2k)] \\ &- [\ln 1 + \ln 3 + \cdots + \ln(2k-1)] \\ &> \frac{1}{2} \ln(2k+1), \end{aligned}$$

重组后得:

$$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots$$

$$+ [\ln(2k) - \ln(2k-1)] > \frac{1}{2} \ln(2k+1) \quad ①$$

上式左边的一般项 $\ln(2k) - \ln(2k-1)$ 可视为函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $[2k-1, 2k]$ 上的定积分. 如图 1, 根据定积分的几何意义, $\ln(2k) - \ln(2k-1)$ 的值为曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与 x 轴在区间 $[2k-1, 2k]$ 上围成的图形的面积.

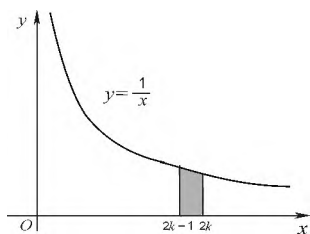


图 1

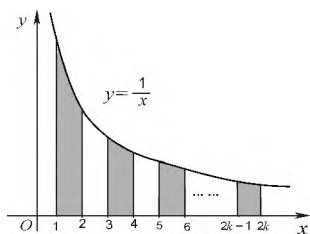


图 2

如图 2, 不等式 ① 左侧的几何意义为曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与 x 轴在区间段 $[1, 2], [2, 3], [3, 4], \dots, [2k-1, 2k]$ 上围成的图形的面积之和.

根据函数 $y = \frac{1}{x}$ 单调递减可知, 上述面积在逐渐减少, 即有:

$$\ln 2 - \ln 1 > \ln 3 - \ln 2,$$

$$\ln 4 - \ln 3 > \ln 5 - \ln 4, \dots,$$

$$\ln(2k) - \ln(2k-1) > \ln(2k+1) - \ln(2k).$$

累加即可得:

$$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots$$

$$+ [\ln(2k) - \ln(2k-1)]$$

$$> (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 5 - \ln 4) + \cdots$$

$$+ [\ln(2k+1) - \ln(2k)]$$

所以

$$\ln(2k) = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots$$

$$+ [\ln(2k) - \ln(2k-1)]$$

$$< 2\{(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots$$

$$+ \ln(2k) - \ln(2k-1)\},$$

所以, 上述核心不等式成立.

4. 背景探究

实际上, 本题第(2)问中的不等式是双阶乘乘积极限问题的变式.

$$\text{因为 } p_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \text{ 所}$$

以该问题的讨论的核心是“双阶乘”的放缩. 关于“双阶乘”, 简介如下: 正整数的双阶乘表示不超过这个正整数且与它有相同奇偶性的所有整数的乘积.

该不等式还可以进一步加强为:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(k + \frac{1}{2})}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{\pi k}} (k \geq 1).$$

$$\text{显然, } \frac{1}{\sqrt{\pi k}} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} (k \geq 1).$$

证明 对这一不等式的证明可采用 $\sin^n x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的积分来完成.

记 $I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx (n \in \mathbb{N})$, 因为函数 $y = \sin x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增且 $\sin^n x \in [0, 1]$,

显然有: $I(n) < I(n-1)$.

由分部积分法可知:

当 $n \geq 2$ 时,

$$I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= (n-1)I(n-2) - (n-1)I(n),$$

$$\text{所以 } I(n) = \frac{n-1}{n} \cdot I(n-2).$$

$$\text{又因为 } I(0) = \frac{\pi}{2}, I(1) = 1, \text{ 所以}$$

$$I(2n) = I(2n-2) \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

$$= I(2n-4) \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} = \cdots.$$

$$\text{同理可知: } I(2n+1) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

因为 $I(n) < I(n-1)$, 所以

$$I(2n) \cdot I(2n+1) < [I(2n)]^2 < I(2n) \cdot I(2n-1),$$

所以

(下转 38 页)



2018 年高考理科数学全国卷分析与 2019 年高考备考建议

殷建红

(广东省广州市番禺区亚运城铁中路2号广州市铁一中学番禺校区,511447)

一、引言

在高中数学课程强调以学生发展为本、培育科学精神与创新意识、提升数学学科核心素养的大背景下,研究高考试题特点,总结命题规律,帮助学生

提高学习数学的自信心与养成良好的数学学习习惯是促进学生发展的重要途径.本文对2018年高考理科数学新课标全国卷进行了简要分析,希望能够帮助2019届高三学生更加精准与高效地备考高考.

二、2018 年高考理科数学全国卷考点与分值分布

模块	试卷	题号	考查内容	分值
集合、命题与不等式	I	2	解一元二次不等式、集合的运算	5
		13	线性规划求最值	5
	II	2	集合的含义与表示	5
		14	线性规划求最值	5
	III	1	集合的运算	5
函数与导数	I	5	奇函数的定义、利用导数求曲线的切线方程	5
		9	已知函数的零点个数,求参数的取值范围	5
		21	利用导数研究函数的单调性、极值以及证明不等式	12
	II	3	已知函数解析式,判断函数的图像	5
		11	由函数的对称性与周期性求函数值	5
		13	已知切点,求曲线的切线方程	5
		21	利用导数研究函数的单调性、极值与零点	12
	III	7	已知函数解析式,判断函数的图像	5
		12	对数的运算、比较对数值的大小	5
		14	已知切点,求曲线的切线方程	5
		21	利用导数研究函数的单调性、极值	12
立体几何	I	7	几何体的三视图与直观图	5
		12	直线与平面所成的角、截面面积的最大值	5
		18	根据翻折图形证明面面垂直、求线面角	12
	II	9	求异面直线所成的角	5
		16	圆锥的性质、求圆锥的侧面积	5
		20	在三棱锥中证明线面垂直、求二面角和线面角	12
	III	3	以中国古建筑为背景考查几何体的三视图	5
		10	由三棱锥外接球的半径求三棱锥体积的最大值	5
		19	证明面面垂直、求二面角	12

续表

模块	试卷	题号	考查内容	分值
解析几何	I	8	求直线与抛物线的交点坐标及平面向量的数量积	5
		11	双曲线的性质、直线与双曲线的位置关系	5
		19	直线与椭圆的位置关系、直线的倾斜角与斜率	12
	II	5	双曲线的性质	5
		12	由直线与椭圆的位置关系求离心率	5
		19	由直线与抛物线的位置关系求直线方程、圆的方程	12
	III	6	圆上的动点到直线的距离的最值	5
		11	求双曲线的离心率	5
		16	直线与抛物线的位置关系,求直线的斜率	5
		20	已知直线与椭圆的相交弦的中点,求直线斜率、距离	12
算法初步	I			0
	II	7	完善算法的程序框图	5
	III			0
计数原理	I	15	组合的分配问题	5
	II			0
	III	5	求二项式展开式的系数	5
统计与概率	I	3	用统计方法(饼图)解决简单的实际问题	5
		10	以古希腊数学文化为背景考查几何概型	5
		20	n 次独立重复事件的概率、均值在决策中的应用	12
	II	8	以哥德巴赫猜想为背景考查古典概型	5
		18	根据折线图比较两个线性回归模型的可靠性	12
	III	8	n 次独立重复事件的概率、二项分布	5
		18	根据茎叶图分析数据、独立性检验	12
三角函数与解三角形	I	16	由恒等变换及三角函数的图像与性质,求函数的最值	5
		17	利用正弦定理与余弦定理解三角形	12
	II	6	恒等变换、用余弦定理求三角形边长	5
		10	恒等变换、三角函数的单调性	5
		15	恒等变换、求三角函数的值	5
	III	4	恒等变换、求三角函数的值	5
		9	由三角形的面积、余弦定理求角	5
		15	三角函数的零点	5
平面向量	I	6	平面向量的线性运算与基本定理	5
	II	4	计算平面向量的数量积	5
	III	13	平面向量的坐标运算、由向量共线求参数值	5
数列	I	4	等差数列的通项及其前 n 项和	5
		14	由 a_n 与 S_n 的等式求等比数列的通项与和	5
	II	17	等差数列的通项、前 n 项和的最小值	12
	III	17	等比数列的通项及其前 n 项和	12

续表

模块	试卷	题号	考查内容	分值
复数	I	1	复数的运算及其几何意义	5
	II	1	复数的运算	5
	III	2	复数的运算	5
坐标系与参数方程	I	22	圆的极坐标方程、直线与圆的位置关系	10
	II	22	椭圆与直线的参数方程、已知相交弦的中点求斜率	10
	III	22	直线与圆的位置关系、弦的中点的轨迹方程	10
不等式选讲	I	23	解绝对值不等式、由不等式恒成立求参数的取值范围	10
	II	23	解绝对值不等式、由不等式恒成立求参数的取值范围	10
	III	23	作绝对值函数的图像、由不等式恒成立求参数的最值	10

三、试卷总体结构分析

2018年高考数学全国卷的试卷结构与前两年一致,贴合高考纲要要求,必考部分包括12个选择题、4个填空题和5个解答题,选考部分是在“坐标系与参数方程”和“不等式选讲”中选做1题.试题的难度较2016年和2017年有所下降,更加注重数学基础知识与基本素养的考查,加大对

数学知识本身的理解,在基础中考查能力,减小计算的难度,体现了以学生发展为本的理念.具体特点如下:

1. 稳中带新,突出主干知识

与往年相比,支撑数学学科知识体系的六大主干知识模块仍占有较大的比例,构成数学试卷的主体:

	函数与导数	立体几何	解析几何	概率与统计	三角函数	数列	合计
I 卷	22	22	22	22	17	10	115
II 卷	27	22	22	17	15	12	115
III 卷	27	22	27	17	15	12	120

三角函数与数列以客观题或第一道解答题的形式出现,三角函数主要考查恒等变换、三角函数的图像与性质、用正弦定理或余弦定理解三角形等,数列考查了等差数列与等比数列的通项及其前 n 项和;立体几何考查三视图、几何体的表面积与体积、证明平行与垂直、计算夹角等;解析几何考查圆锥曲线的方程与几何性质、直线与曲线的位置关系的综合问题;概率与统计考查应用与创新问题;函数与导数则考查函数图像的对称性、周期性与单调性,以及函数的零点、极值与最值等,仍作为压轴题.I卷的解析几何的大题出现在概率与统计的大题之前,II卷解析几何的大题出现在立体几何的大题之前是今年高考全国卷的一个重要变化,一定程度上说明了解析几何的大题的难度有降低的趋势.

对比三套试卷发现,试题设计都注重学科知识的内在联系和知识综合性,在知识点交汇处命题,同时又不刻意追求知识的覆盖面.我们常说的必考题如程序框图题在I卷和III卷中都没有考查;三视图、排列组合或二项式定理的客观题在II卷也没有出现等.

2. 立足基础,考查常规

试卷中的基础题型占比接近80%,主要考查数学基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验.如集合、复数、平面向量、数列、三角函数、概率与统计、计数原理、三视图、程序框图、不等式等客观题,以及三角函数与数列、立体几何、选做题等解答题,都是我们日常训练的常规题型,让考生倍感亲切,题意简明扼要,审题轻松,解题思路简单且计算量一般,所以题目的难度不大.

3. 注重数学思想与数学能力

数学科的命题,在考查基础知识的基础上,注重对数学思想方法与数学能力的考查.如I卷的第12题以正方体中线面的位置关系为载体考查空间想象与推理论证能力;II卷和III卷的第18题以统计知识为载体考查数据分析、数学运算与应用意识;I卷的第9题以函数的零点为载体和III卷的第20题以直线与圆锥曲线为载体考查数学结合、转化与化归思想;I卷、II卷和III卷的第21题以导数为载体考查分类讨论思想、函数与方程思想以及抽象概括与推理论证能力.命题同

时兼顾了试题的基础性、综合性和应用性,多角度、多层次地考查学生的综合数学素养.

4. 贴近实际,重视应用与创新

对应用意识的考查主要采用解决应用问题的形式,命题的背景融入数学文化,贴近生活,背景公平,切合中学数学教学的实际.如 I 卷的第 10 题以古希腊数学家波克拉底所研究的几何图形为素材考查几何概型;II 卷的第 8 题以我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得的成就为背景考查古典概型;III 卷的第 3 题以中国古建筑中的榫卯为素材考查三视图;I 卷的第 3 题和第 20 题、II 卷和 III 卷的第 18 题联系生产与生活实际考查概率与统计的应用.命题中创设新颖的问题情境,考查学生将知识迁移到不同情境中去的能力,体现出学生对数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值的认识.II 卷和 III 卷的第 18 题的解答具有探索性和开放性,注重考查学生数学思维的发散性以及学生的创新意识.

四、给 2019 届高三学生的备考建议

1. 回归课本,构建知识网络

重视课本中概念的理解、公式的推导以及定理的证明,形成完整的知识网络.例如:

(1) 函数的图像与性质及其导数、切线的斜率之间有着怎样的联系和变化规律;

(2) 指数与对数的运算法则、指数函数与对数函数图像与性质之间的联系;

(3) 两角和与差的三角函数公式、正弦定理和余弦定理的推导与证明,将三角函数与平面向量结合到一起;

(4) 回归分析中相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ 、线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} +$

$$\hat{b}x \text{ 的 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \text{ 残}$$

差平方和 $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 、相关指数 $R^2 = 1 -$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \text{ 等之间的联系与应用;}$$

(5) 直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} (t \text{ 为参}$

数) 中 t 的几何意义及其由来;

(6) 绝对值的几何意义及其应用,…….

在知识的梳理过程中,只有弄清楚概念、公式与定理的根源与联系后,才能在分析问题与解决问题的过程中做到“知其然又知其所以然”,将知识迁移到不同的问题情境中去,形成解题方法.

2. 紧扣考纲,重视通性与通法

在数学高考复习过程中,老师都在强调要多刷题,刷出速度、刷出题感、积累解题方法与经验.但刷题想要刷出高度,就必须要做到精准与高效.复习与训练过程中要紧扣考纲,精选“好题”,精做“好题”.什么是“好题”?历年的高考真题就是好题、各省市的大型模拟考试题也是好题,而不是越新、越难、越巧妙的题就一定是好题.细心研究历年的高考题,就不难发现曾经考过的问题并不是就不会再考,譬如今年 I 卷的第 19 题的解析几何题与 2015 年 I 卷的第 20 题的解析几何题就基本类似,所以许多同学在考试当中见到该题后都变得信心十足.

我常对我的学生说,在考试当中你能最先想到的方法、你最擅长的方法就是最好的方法.在做题过程中要重视通性与通法的训练,淡化“偏”、“怪”、“难”,要在高考题与模拟题的探讨与反思的过程中不断总结与寻找命题的规律,具有针对性地进行训练,在问题的解决过程中提高自身学习数学的素质.

3. 加强数学思想与数学能力的渗透

数学高考命题强调“以能力立意”,以数学知识为载体渗透数学思想方法,检验考生理性思维的广度与深度.我们在几何问题代数化处理、代数问题几何化处理的过程中渗透数形结合、转化与化归等数学思想,训练提高抽象概括与推理论证的能力;在含参数问题的解决过程中渗透函数与方程、分类讨论等数学思想;在立体几何问题的训练当中提高空间想象能力;在概率与统计等应用问题的分析解决过程中训练数据处理能力,培养创新意识;在平面解析几何问题的解决过程中渗透数形结合、函数与方程等数学思想,提高运算求解能力.

4. 注重答题规范

历年高考当中,常见某些学生对数学的估分比实际得分要高,主要是因为有些学生的答题不规范,省略了必要的步骤和文字说明而造成失分,这些问题多见于立体几何、概率与统计以及选做题的大题的解答当中.另外也有一些学生直接使

用了一些所谓的口诀、结论与万能公式,缺乏必要的推理与论证而造成失分,其常见于解析几何、函数与导数的大题的解答当中.

所谓作答,即是要把解答的思维过程展示给评卷老师,让老师明白我写的是什么.书写过程要注意准确表述,使用正确的数学符号,千万不要自创一套数学符号与表示方法.我们不仅要掌握解决问题的知识和方法,更要注重答题规范,建议在平时的训练过程当中多留意教材例题的解答过程以及高考与模拟考试试题的评分细则,避免不必要的失分.

5. 提高审题与运算能力

审题要慢,下笔才快,审题即要搞清楚题目给了什么?要求什么?有哪些隐含的条件?对重要的信息点要做好标注,方便提炼成解题思路与方法,这样考虑问题才能全面.

平时解题不只是把结果算出来即可,要有意

识地训练自己的运算技巧,思考怎样算会更快、更有效率且更加准确.对于多步运算要耐心和细心,不应急于求成,不要轻易跳步和过多依赖心算等,否则会落得“一步错而满盘皆输”的局面.

参考文献:

- [1] 教育部考试中心. 2018 年普通高等学校招生全国统一考试大纲(理科)[M]. 北京:高等教育出版社,2017,12:19-37.
- [2] 教育部考试中心. 2018 年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明(理科)[M]. 北京:高等教育出版社,2017,12:93-213.
- [3] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018,1.

(收稿日期:2018-09-01)

(上接第 33 页)

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n},$$

即有

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(k+\frac{1}{2})}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} < \frac{1}{\sqrt{\pi k}} (k \geq 1).$$

综上所述:原问题仅仅是该不等式的一种“退化”形态.

利用 Wallis 乘积公式: $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \sqrt{\pi k}$, 还可得如下不等式:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi k [1 + \frac{4}{4k-1}]}} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi k [1 + \frac{5}{4k-1}]}}.$$

Wallis 乘积公式的本质就是刻画双阶乘 $(2k-1)!!$ 与 $(2k)!!$ 之比的渐近性态. 感兴趣的读者可参阅文末参考文献[2].

5. 拓展

例题 比较 $\frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots 79}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots 80}$ 与 $\frac{1}{3}$ 的

大小.

仿照上面的解法呈现,因为

$$\begin{aligned} & (n^2-1)(n^2+2n+1) \\ &= n^2(n^2+2n)-(2n+1) \\ &< n^2(n^2+2n), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{n^2-1}{n^2+2n} < \frac{n^2}{n^2+2n+1}, \text{ 所以 } \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$< \left(\frac{n}{n+1}\right)^2, \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{27} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 80}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 81} < \left(\frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots 79}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots 80}\right)^3,$$

$$\text{所以 } \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots 79}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots 80} > \frac{1}{3}.$$

该不等式可拓展为一般情况:

$$\frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

同理,该不等式也可通过对数运算进行几何解释.

参考文献:

- [1] 龙宇、孙琼. 探究 2015 年高考广东卷理科第 21 题[J]. 中学数学研究. 2016(2),16-17.
- [2] 隆建军. 关于含有 Wallis 公式的双边不等式及其应用[J]. 四川职业技术学院学报. 第 22 卷第 1 期,159-160.

(收稿日期:2018-08-24)

浅谈高考导数压轴题中的优化运算技巧

蔡德华

(江苏省泰兴市第二高级中学, 225401)

导数压轴题除了思维难度大以外, 还有就是运算量大, 本文结合 2018 年全国卷的几道导数压轴题, 来说明导数题中的几种常见的优化运算技巧.

例 1 (2018 年全国新课标 I 文) 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

解析 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$. 所以 $f'(2) = 0$, 所以 $ae^2 - \frac{1}{2} = 0$, $a = \frac{1}{2e^2}$. 这时 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $f'(2) = 0$, 所以, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上, $a = \frac{1}{2e^2}$, $f(x)$ 的单调增区间为 $(2, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, 2)$.

(2) 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, 有 $f(x) = ae^x - \ln x - 1 \geq \frac{1}{e}e^x - \ln x - 1 = e^{x-1} - \ln x - 1$.

令 $g(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$, 容易得到 $g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上增, 且 $g'(1) = e^{1-1} - \frac{1}{1} = 0$, 所以, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增.

所以 $[g(x)]_{\min} = g(1) = 0$, 所以, 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq g(x) \geq 0$.

评析 第(2)小题上述解法是将 $g(x)$ 看作一个函数, 通过导数研究其单调性(其中需要观察导函数的单调性和 $g'(1) = 0$), 从而使问题得到解决. 本题也可以将 $g(x)$ 分拆为两个函数, 即将

e^x 与 $\ln x$ 隔开, 然后找出两个函数之间的分隔函数, 这样可以简化运算.

(2) 方法二 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) = ae^x - \ln x - 1 \geq \frac{1}{e}e^x - \ln x - 1 = e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0$, 化为 $e^{x-1} \geq \ln x + 1$.

我们利用导数容易证得结论: $e^x \geq x + 1$, $\ln x \leq x - 1$, 所以 $e^{x-1} \geq (x-1) + 1$, 即 $e^{x-1} \geq x \geq \ln x + 1$.

故当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

评析 因为由 $f(x) \geq 0$ 很容易分离参数 a , 本题也可以尝试采用分离参数的方法来解.

(2) 方法三 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$ 即为 $a \geq \frac{\ln x + 1}{e^x}$, 设 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x}$, 则 $h'(x) = e^{-x}(\frac{1}{x} - \ln x - 1)$.

令 $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$, 容易得到 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减, 且 $\varphi(1) = 0$, 所以 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{e^x}$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(1) = \frac{1}{e}$, 所以 $a \geq \frac{\ln x + 1}{e^x}$, 即当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

例 2 (2018 年全国新课标 I 理) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2.$$

解析 (1) 因为 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$, 所以 $f'(x) = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$, 所以,

① 当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $x^2 - ax + 1$ 的判别式 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, 所以 $f'(x) \leq 0$, 此时在 $(0, +\infty)$

上为单调递减.

② 当 $a < -2$ 或 $a > 2$ 时, $x^2 - ax + 1$ 的判别式 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 此时方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. 当 $a < -2$ 时, 两根均为负, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上单调递减.

综上可得, 当 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$, $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上单调递增.

(2) 方法一 由(1)可得, 方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 且 $a > 2, x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1$, 令 $0 < x_1 < x_2$, 所以

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1 - (\frac{1}{x_2} - x_2 + a \ln x_2) = 2(x_2 - x_1) + a(\ln x_1 - \ln x_2),$$

$$\text{所以 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2},$$

要证 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 成立, 即要证

$$\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1 \text{ 成立, 即证}$$

$$-2 \ln x_2 - \frac{1}{x_2} + x_2 > 0 (x_2 > 1).$$

令 $g(x) = -2 \ln x - \frac{1}{x} + x (x > 1)$, 则 $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$, 可得 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $g(x) > g(1) = 0$, 所以 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1$ 成立, 即 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 成立.

评析 第(2)小题直接利用根与系数的关系式, 将 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ 化简为 $-2 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$, 从而转化为证明 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1$, 即证明 $-2 \ln x_2 - \frac{1}{x_2} + x_2 > 0 (x_2 > 1)$ (也可以转化为证明有关

$x_1 (0 < x_1 < 1)$ 的不等式 $2 \ln x_1 - x_1 + \frac{1}{x_1} > 0$), 再构造新函数利用其导数求出其最值. 本题也可以利用对数平均数不等式加以证明 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1$. 这样可以大大简化运算.

(2) 方法二 同方法一, 即证 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1$.

由对数平均数不等式 $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2} (a, b > 0, a \neq b)$ 得: $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$, 即 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} > 1$, 亦即 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1$, 所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 成立.

例 3 (2018 年全国新课标 II 文) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.

(1) 若 $a = 3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

解析 (1) 当 $a = 3$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3(x^2 + x + 1)$, $f'(x) = x^2 - 6x - 3$. 令 $f'(x) = 0$ 解得 $x = 3 - 2\sqrt{3}$ 或 $x = 3 + 2\sqrt{3}$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3 - 2\sqrt{3})$, $(3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$ 单调递减.

(2) 方法一 由于 $x^2 + x + 1 > 0$, 所以 $f(x) = 0$ 等价于 $\frac{x^3}{x^2 + x + 1} - 3a = 0$.

设 $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1} - 3a$, 则 $g'(x) = \frac{x^2(x^2 + 2x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2} \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 故 $g(x)$ 至多有一个零点, 从而 $f(x)$ 至多有一个零点.

又 $f(3a-1) = -6a^2 + 2a - \frac{1}{3} = -6(a - \frac{1}{6})^2 - \frac{1}{6} < 0$, $f(3a+1) = \frac{1}{3} > 0$, 故 $f(x)$ 有一个零点.

综上, $f(x)$ 只有一个零点.

评析 第(2)小题是函数零点的问题, 经常采用分离参数法, 分离参数后, 在运用函数零点存在定理时, 函数取点是本题的难点. 当然本题也可以用极限来处理. 从而简化运算. 即: 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1} - 3a = \frac{x}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3a$

$\rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) = \frac{x^3}{x^2+x+1} - 3a$
 $= \frac{x}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 3a \rightarrow +\infty$. 这样可以避免取点,

降低解题的难度.

本题也可以不分离参数直接研究三次函数. 这样也比较容易.

(2) 方法二 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2+x+1)$
 $= 0, f'(x) = x^2 - 2ax - a$,

当 $\Delta = 4a^2 + 4a \leq 0$, 即 $-1 \leq a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 只有一个零点,

当 $\Delta = 4a^2 + 4a > 0$, 即 $a > 0$ 或 $a < -1$ 时, 设 $f'(x) = x^2 - 2ax - a = 0$ 的两根为 x_1, x_2 (其中 $x_1 < x_2$), 则 $x_1^2 - 2ax_1 - a = 0, x_2^2 - 2ax_2 - a = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1), (x_2, +\infty)$ 上递增, 在 (x_1, x_2) 上递减.

而 $f(x_1) = \frac{1}{3}x_1^3 - a(x_1^2+x_1+1) = \frac{1}{3}x_1 \cdot$
 $(2ax_1+a) - a(x_1^2+x_1+1) = -\frac{a}{3}(x_1^2+2x_1+3)$,

同理 $f(x_2) = -\frac{a}{3}(x_2^2+2x_2+3)$.

因为 $x_1^2+2x_1+3 > 0, x_2^2+2x_2+3 > 0$, 所以极大值 $f(x_1)$ 与极小值 $f(x_2)$ 同号, 所以 $f(x)$ 只有一个零点.

综上, $f(x)$ 只有一个零点.

例 4 (2018 年全国新课标 II 理) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .

解析 (1) 方法一 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - x^2, f'(x) = e^x - 2x, f''(x) = e^x - 2$, 所以, 当 $x \in [0, \ln 2]$ 时, $f''(x) < 0, f'(x)$ 递减, 当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $f''(x) > 0, f'(x)$ 递增. $f'(x) \geq f'(\ln 2) = 2 - (\ln 2)^2 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, 故 $f(x) = e^x - ax^2 \geq f(0) = 1$.

评析 本题直接通过两次求导, 先求出导数的最小值大于零, 再求出 $f(x)$ 的最小值. 但是如果采用下面的变形方法求出的导数很容易确定其符号.

(1) 方法二 当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq 1$ 等价于 $\frac{x^2+1}{e^x} - 1 \leq 0$, 设 $g(x) = \frac{x^2+1}{e^x} - 1$, 则 $g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{e^x} \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递

减, 而 $g(0) = 0$, 故当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq 0$, 即 $f(x) \geq 1$.

(2) 方法一 $f(x) = e^x(1 - \frac{ax^2}{e^x})$, 设函数 $h(x) = 1 - \frac{ax^2}{e^x}, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点等价于 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点.

当 $a \leq 0$ 时, $h(x) > 0, h(x)$ 没有零点; 当 $a > 0$ 时, $h'(x) = \frac{ax(x-2)}{e^x}$. 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 单调递增. 故 $h(2) = 1 - \frac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值.

① 若 $h(2) > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}, h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点;

② 若 $h(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}, h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点;

③ 若 $h(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 由于 $h(0) = 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 有一个零点,

由(1)知, 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2$, 所以

$$h(4a) = 1 - \frac{16a^3}{e^{4a}} = 1 - \frac{16a^3}{(e^{2a})^2} > 1 - \frac{16a^3}{(2a)^4} = 1 - \frac{1}{a} > 0.$$

故 $h(x)$ 在 $(2, 4a)$ 有一个零点, 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点.

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

评析 第(2)小题中, 与(1)方法二类似, 将函数变形为 $f(x) = e^x(1 - \frac{ax^2}{e^x}) = e^x h(x)$, 从而转化为研究函数 $h(x)$ 的零点个数, 这样处理后, 导数形式较为简洁, a 变成导函数的系数, 便于研究. 但是换一种变形方式可以使运算得到简化.

(2) 方法二 $f(x) = e^x - ax^2 = 0$, 因为 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $a = \frac{e^x}{x^2}$, 令 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递减, 在 $(2, +\infty)$ 上递增.

当 $a = g(2) = \frac{e^2}{4}$ 时, $a = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 有一解,

当 $a > g(2) = \frac{e^2}{4}$ 时, 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$

$\rightarrow +\infty, g(x) = \frac{e^x}{x^2} = a$ 在 $(0, 2)$ 上有一解, 又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 运用洛必塔法则求得 $g(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $g(x) = \frac{e^x}{x^2} = a$ 在 $(2, +\infty)$ 有一解(此处也可以这样证明: 因为 $g(2) = \frac{e^2}{4} < a, g(4a) = \frac{e^{4a}}{(4a)^2} = \frac{(e^{2a})^2}{(4a)^2} > \frac{[(2a)^2]^2}{(4a)^2} = a$, 此法实际上与方法一同源类似), 所以, 当 $a > g(2) = \frac{e^2}{4}$ 时, $a = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 有两解.

综上, 当且仅当 $a = g(2) = \frac{e^2}{4}$ 时, $a = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 有一解, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点.

评析 研究函数 $g(x) = \frac{e^x}{x^2} (x > 0)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数值的趋向时, 也可以借助辅助函数来研究.

(2) 方法三 同方法二,

当 $a > g(2) = \frac{e^2}{4}$ 时, 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty, g(x) = \frac{e^x}{x^2} = a$ 在 $(0, 2)$ 上有一解, 又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 不用洛必塔法则如何求得 $g(x) \rightarrow +\infty$?

构造函数 $h(x) = \frac{e^x}{x^3}$, 则 $h'(x) = \frac{e^x(x-3)}{x^4}$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 3)$ 上递减, 在 $(3, +\infty)$ 上递增, 所以, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h(x) = \frac{e^x}{x^3} \geq h(3) = \frac{e^3}{27} > \frac{8}{27}$, 即 $\frac{e^x}{x^2} > \frac{8}{27}x$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 因为 $\frac{8}{27}x \rightarrow +\infty$, 所以 $g(x) = \frac{e^x}{x^2} \rightarrow +\infty$.

以下同方法二.

例 5 (2018 年全国新课标 III 文) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程;

(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.

解析 (1) 因为 $f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{e^x}$, 所以 $f'(x) = \frac{-ax^2 + 2ax - x + 2}{e^x}$, 由题意得 $f'(0) = 2$, 即曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为 $y - (-1) = 2(x - 0)$, 即 $2x - y - 1 = 0$;

(2) 方法一 由题意, 原不等式等价于: $e^{x+1} + ax^2 + x - 1 \geq 0$ 恒成立.

令 $g(x) = e^{x+1} + ax^2 + x - 1$, 则 $g'(x) = e^{x+1} + 2ax + 1$, 因为 $a \geq 1$, 所以 $g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 所以, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一 x_0 使 $g'(x_0) = 0$, 因为 $e^{x_0+1} + 2ax_0 + 1 = 0$, 即 $e^{x_0+1} = -2ax_0 - 1$, 且 $g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(x_0)$.

又 $g(x_0) = e^{x_0+1} + ax_0^2 + x_0 - 1 = ax_0^2 + (1 - 2a)x_0 - 2 = (ax_0 + 1)(x_0 - 2)$, 因为 $a \geq 1$, 所以 $g'(-\frac{1}{a}) = e^{1-\frac{1}{a}} - 1 \geq 0$, 而 $g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $x_0 \leq -\frac{1}{a} < 0$, 所以 $g(x_0) \geq 0$, 得证.

综上所述: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.

评析 第(2)小题, 利用导数, 设出极值点, 求出 $g(x)$ 的最小值 $g(x_0) = (ax_0 + 1)(x_0 - 2)$, 然后寻找函数 $g(x)$ 的极值点 x_0 的范围, 由 $g'(-\frac{1}{a}) = e^{1-\frac{1}{a}} - 1 > 0$, 得出极值点的范围 $x_0 \leq -\frac{1}{a}$, 从而得到 $g(x_0) \geq 0$. 如果采用常见的不等式 $e^x \geq x + 1$ 来放缩, 则运算要小得多.

(2) 方法二 因为 $e^x \geq x + 1$, 所以 $e^{x+1} \geq x + 2$,

$$\begin{aligned} f(x) + e &= \frac{ax^2 + x - 1}{e^x} + e \\ &= \frac{ax^2 + x - 1 + e^{x+1}}{e^x} \\ &\geq \frac{ax^2 + x - 1 + (x + 2)}{e^x} \\ &= \frac{ax^2 + 2x + 1}{e^x}, \end{aligned}$$

当 $a \geq 1$ 时, 因为 $\Delta = 4 - 4a \leq 0$, 所以 $ax^2 + 2x + 1 \geq 0$, 即 $f(x) + e \geq 0$.

评析 上述解法中, 实际上由 $e^{x+1} \geq x + 2$ 得: $e^x \geq \frac{x}{e} + \frac{2}{e}$, 而 $y = \frac{x}{e} + \frac{2}{e}$ 是函数 $y = e^x$ 的图像上一点 $(-1, \frac{1}{e})$ 处的切线, 即是利用函数图像的切线来进行放缩的. 本题不变形直接求 $f(x)$ 的最小值, 因为导数形式简单, 倒反而比较简洁.

(2) 方法三 $f'(x) = -\frac{(x-2)(ax+1)}{e^x}$,

当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{a}), (2, +\infty)$ 上递减, 在 $(-\frac{1}{a}, 2)$ 上递增.

$f(-\frac{1}{a}) = -e^{\frac{1}{a}} < 0$, 而当 $x > 2$ 时, $f(x) >$

0. 故

$$\begin{aligned} f(x) + e &\geq f(-\frac{1}{a}) + e = -e^{\frac{1}{a}} + e \\ &\geq -e + e = 0. \end{aligned}$$

例 6 (2018 全国新课标 III 理) 已知函数 $f(x) = (2+x+ax^2)\ln(1+x) - 2x$.

(1) 若 $a = 0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a .

解析 (1) 若 $a = 0$ 时, $f(x) = (2+x)\ln(1+x) - 2x$ ($x > -1$), 所以

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(1+x) + (2+x) \cdot \frac{1}{1+x} - 2 \\ &= \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 1. \end{aligned}$$

令 $h(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 1$, 所以

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

所以, 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减. 所以 $h(x)_{\min} = h(0) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$, 所以 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f(0) = 2\ln 1 - 0 = 0$, 所以, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

评析 第(1)小题, 通过二次求导判断一次导函数递增, 再直觉求出一次导函数的零点. 有一定的运算量. 若重新变形处理, 使得一次导函数形式简洁, 且不需二次求导, 则运算量要小得多.

(1) 方法二 若 $a = 0$ 时, $f(x) = (2+x)\ln(1+x) - 2x = (2+x)[\ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}]$, $x > -1$.

令 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$ ($x > -1$), 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0, \end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上递增, 而 $g(0) = 0$, 所以, 当 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) < 0$, 所以 $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, 所以 $f(x) > 0$.

评析 本解法变形后 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, 求导后不含对数符号, 从而使解题过程简化.

(2) 若 $a \geq 0$, 由(1)知, 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq$

$(2+x)\ln(1+x) - 2x > 0 = f(0)$, 这与 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾.

若 $a < 0$, 设 $h(x) = \frac{f(x)}{2+x+ax^2} = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x+ax^2}$, 由于当 $|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时, $2+x+ax^2 > 0$, 故 $h(x)$ 与 $f(x)$ 的符号相同. 又 $h(0) = f(0) = 0$, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点当且仅当 $x = 0$ 是 $h(x)$ 的极大值点.

$$h'(x) = \frac{x^2(a^2x^2 + 4ax + 6a + 1)}{(x+1)(ax^2 + x + 2)^2}.$$

如果 $6a + 1 > 0$, 则当 $0 < x < -\frac{6a+1}{4a}$, 且

$|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时, $h'(x) > 0$, 故 $x = 0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点;

如果 $6a + 1 < 0$, 则 $a^2x^2 + 4ax + 6a + 1 = 0$ 存在根 $x_1 < 0$, 故当 $x \in (x_1, 0)$, 且 $|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时, $h'(x) < 0$, 故 $x = 0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点.

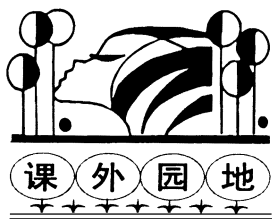
如果 $6a + 1 = 0$, 则 $a = -\frac{1}{6}$, $h'(x) = \frac{x^3(x-24)}{(x+1)(x^2-6x-12)^2}$, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$. 所以 $x = 0$ 是 $h(x)$ 的极大值点, 从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

综上, $a = -\frac{1}{6}$.

评析 上述讨论中, 若 $a < 0$, 因为 $x = 0$ 时 $2+x+ax^2 = 2$, 压缩 x 的区间到 $|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$, 确保在此区间内 $2+x+ax^2 > 0$, 这样就只需讨论 $h(x)$ 的符号, 同样在研究 $h'(x) = \frac{x^2(a^2x^2 + 4ax + 6a + 1)}{(x+1)(ax^2 + x + 2)^2}$ 的符号时, 由于 $x = 0$ 时 $a^2x^2 + 4ax + 6a + 1 = 6a + 1$, 所以 $6a + 1$ 的符号直接决定 0 的附近小邻域内 $h'(x)$ 的符号.

总之, 在导数压轴题的解题过程中, 为了分离参数, 或为了使得求导后导函数便于处理, 经常采取适当变形, 恰当放缩, 或利用常见的不等式进行放缩, 有时还需要二次求导, 直觉观察得到导函数或原函数的零点, 使得运算过程得到优化.

(收稿日期: 2018-09-19)



与三角形的“四心”有关的竞赛试题

方志平

(广东省惠州市第一中学, 516007)

三角形的“四心”(即外心、内心、重心和垂心)是中学数学经常用到的知识点, 全国高中数学联赛各省预赛中频繁出现与三角形“四心”有关的问题, 这类试题的特点往往是建立在知识的交汇处, 涉及面广, 灵活性强, 学生学习有一定的困难. 基于这些, 笔者精选了近几年各省市预赛试题, 以供同学们学习参考.

1. 竞赛试题中涉及三角形的外心

例 1 (2016 年全国高中数学联赛河南省预赛试题) 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 1, BC = \sqrt{7}$, O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为_____.

解 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

$$= \frac{4 + 1 - 7}{2 \times 2 \times 1} = -\frac{1}{2}.$$

所以 $\angle BAC = 120^\circ$, 则

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos \angle BAC = -1.$$

又 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 则

$$\vec{AO} \cdot \vec{AB} = |\vec{AO}| \cdot |\vec{AB}| \cos \angle OAB$$

$$= |\vec{AO}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \frac{1}{2} \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AO}|}$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{AB}|^2 = 2,$$

$$\text{同理 } \vec{AO} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} |\vec{AC}|^2 = \frac{1}{2}.$$

所以

$$2 = \vec{AO} \cdot \vec{AB} = \lambda \vec{AB}^2 + \mu \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 4\lambda - \mu,$$

$$\frac{1}{2} = \vec{AO} \cdot \vec{AC} = \lambda \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \mu \vec{AC}^2$$

$$= -\lambda + \mu,$$

$$\text{解得: } \lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{4}{3}. \text{ 所以 } \lambda + \mu = \frac{13}{6}.$$

评注 在向量等式 $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ 中, 先后求它们与 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 的数量积, 将向量运算转化为

数的运算, 从而得出关于 λ, μ 的两个等式, 问题顺利获解.

例 2 (2017 年全国高中数学联赛贵州省预赛试题) 已知 P 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\vec{PA} + \vec{PB} = \lambda \vec{PC}$, $\tan C = \frac{12}{5}$, 则实数 λ 的值为_____.

解 如图 1, 设 AB 的中点为 D , 则 $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PD}$. 又 $\vec{PA} + \vec{PB} = \lambda \vec{PC}$, 所以 $2\vec{PD} = \lambda \vec{PC}$, 故 C, P, D 三点共线. 又 P 为 $\triangle ABC$ 的外心, 所以 $PD \perp AB$, 于是 $CD \perp AB$.

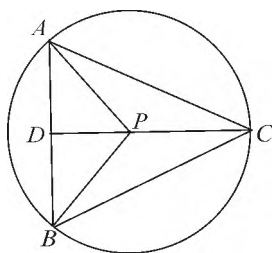


图 1

由 $\tan C = \frac{12}{5}$, 可得

$$\cos C = \frac{5}{13}.$$

又 $PC = PA$, 所以

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{2PD}{PC} = -\frac{2PD}{PA} = -2\sin \angle PAD \\ &= -2\cos \angle APD = -2\cos C = -\frac{10}{13}. \end{aligned}$$

评注 因为 P 是 $\triangle ABC$ 的外心, 也就是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心, 把此三角形放在圆中, 不难得到 $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle APB$, 又 D 是 AB 的中点, 且 $AP = BP$, 于是有 $\angle APD = \angle C$.

2. 竞赛试题中涉及三角形的内心

例 3 (2017 年全国高中数学联赛山东省预赛试题) 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $3\vec{IA} + 4\vec{IB} + 5\vec{IC} = \mathbf{0}$, 则角 C 的大小为_____.

解 设 a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 过 I 分别作 $\triangle ABC$ 三边的平行线 (如图

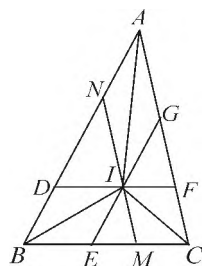


图 2

2), 交点分别为 D, N, E, M, F, G , 则四边形 $ANIG$ 是平行四边形, 因为 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 所以 AI 平分 $\angle NAG$, 故四边形 $ANIG$ 是菱形.

同理可知: 四边形 $BDIE$, 四边形 $CFIM$ 都是菱形.

设 $AN = AG = \lambda_1, BD = BE = \lambda_2, CF = CM = \lambda_3$, 则

$$\vec{AI} = \vec{AN} + \vec{AG} = \lambda_1 \cdot \frac{\vec{AB}}{c} + \lambda_1 \cdot \frac{\vec{AC}}{b}$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{\vec{AB}}{c} + \frac{\vec{AC}}{b} \right),$$

$$\vec{BI} = \vec{BD} + \vec{BE} = \lambda_2 \left(\frac{\vec{BA}}{c} + \frac{\vec{BC}}{a} \right),$$

$$\vec{CI} = \vec{CF} + \vec{CM} = \lambda_3 \left(\frac{\vec{CA}}{b} + \frac{\vec{CB}}{a} \right).$$

由此得:

$$\frac{\vec{AI}}{\lambda_1} + \frac{\vec{BI}}{\lambda_2} + \frac{\vec{CI}}{\lambda_3} = \mathbf{0} \quad ①$$

因为 $MN \parallel AC$, 所以 $\frac{AN}{c} = \frac{CM}{a}$.

同理可得: $\frac{BD}{c} = \frac{CF}{b}$.

所以 $\frac{AN}{CM} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{c}{a}, \frac{BD}{CF} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{c}{b}$, 即有

$$\frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2} : \frac{1}{\lambda_3} = a : b : c,$$

代入 ① 式得 $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$.

又已知 $3\vec{IA} + 4\vec{IB} + 5\vec{IC} = \mathbf{0}$, 所以 $a : b : c = 3 : 4 : 5$, 故 $\angle C = 90^\circ$.

评注 因为 I 是 $\triangle ABC$ 的内心(即 $\triangle ABC$ 三条内角平分线的交点), 在平行四边形 $ANIG$ 中对角线平分其一组对角, 所以四边形 $ANIG$ 是菱形, 依题中几何量的关系, 巧妙引进参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 借用三角形内心的向量性质, 即 $\vec{AI} = \lambda_1 \left(\frac{\vec{AB}}{c} + \frac{\vec{AC}}{b} \right), \vec{BI} = \lambda_2 \left(\frac{\vec{BA}}{c} + \frac{\vec{BC}}{a} \right), \vec{CI} = \lambda_3 \left(\frac{\vec{CA}}{b} + \frac{\vec{CB}}{a} \right)$, 再结合平面几何中平行线分线段成比例定理, 至此问题的瓶颈得到了实质性的突破.

例 4 (2017 年全国高中数学联赛福建

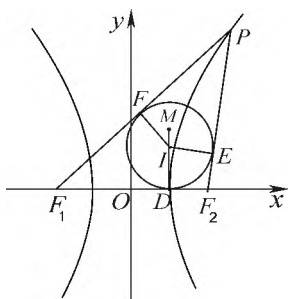


图 3

省预赛试题) 已知 P 为双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 上一点, F_1, F_2 为双曲线 C 的左右焦点, M, I 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心、内心, 若 $MI \perp x$ 轴, 则 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为_____.

解 如图 3, 不妨设点 P 在第一象限, 实轴长为 $2a$, 焦距为 $2c$, D, E, F 分别为 $\odot I$ 与 $\triangle PF_1F_2$ 三边相切的切点, 则由切线长定理以及双曲线定义, 得

$$\begin{aligned} 2a &= |PF_1| - |PF_2| \\ &= (|PF| + |FF_1|) - (|PE| + |EF_2|) \\ &= |FF_1| - |EF_2| = |F_1D| - |F_2D| \\ &= (x_D + c) - (c - x_D) = 2x_D, \end{aligned}$$

所以 $x_D = a = 2, x_M = x_I = x_D = 2$.

设 $P(x_0, y_0)$, 由于 M 为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心, 所以 $\frac{c+x_0-c}{3} = x_M$, 则 $x_0 = 3x_M = 6, y_0 = 4\sqrt{6}$, 所以

$$|PF_1| = \sqrt{(6+4)^2 + (4\sqrt{6}-0)^2} = 14,$$

$$|PF_2| = \sqrt{(6-4)^2 + (4\sqrt{6}-0)^2} = 10.$$

设 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为 r , 则

$$\begin{aligned} S_{\triangle PF_1F_2} &= \frac{1}{2} (|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2|) \cdot r \\ &= 16r. \end{aligned}$$

$$\text{又 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot y_0 = \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{6}$$

$= 16\sqrt{6}$, 于是有 $16r = 16\sqrt{6}$, 所以 $r = \sqrt{6}$.

评注 I 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 也就是 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心, 由于切线垂直于过切点的半径, 于是得 $x_I = x_D$, 给问题的解决带来了转机.

3. 竞赛试题中涉及三角形的重心

例 5 (2014 年全国高中数学联赛山东省预赛试题) 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, PQ 过重心 G , 且满足 $\vec{CP} = m\vec{CA}, \vec{CQ} = n\vec{CB}$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} =$ _____.

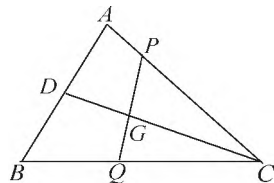


图 4

解 如图 4, 连结 CG 并延长交 AB 于 D , 则 D 为 AB 的中点, 所以

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}),$$

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - m \overrightarrow{CA}$$

$$= (\frac{1}{3} - m) \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{同理可得 } \overrightarrow{QG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} + (\frac{1}{3} - n) \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{PG} // \overrightarrow{QG}, \text{ 所以 } \frac{\frac{1}{3} - m}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - n}, \text{ 即 } m +$$

$$n = 3mn, \text{ 所以 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3.$$

评注 本题选择基底 $\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\}$, 用基向量 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ 表示 $\overrightarrow{PG}, \overrightarrow{QG}$, 突出了问题的本质, 明确了解题的方向, 再借用向量 $\overrightarrow{PG}, \overrightarrow{QG}$ 共线得 m, n 的关系式.

例 6 (2011 年全国高中数学联赛山东省预赛试题) 已知在 $\triangle ABC$ 中, G 是重心, 三内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $56a\overrightarrow{GA} + 40b\overrightarrow{GB} + 35c\overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, 则 $\angle B =$ _____.

解 因为 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, 即有 $40b\overrightarrow{GA} + 40b\overrightarrow{GB} + 40b\overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$.

又 $56a\overrightarrow{GA} + 40b\overrightarrow{GB} + 35c\overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, 所以 $(56a - 40b)\overrightarrow{GA} + (35c - 40b)\overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$.

由于 $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}$ 不共线, 所以有 $\begin{cases} 56a - 40b = 0, \\ 35c - 40b = 0. \end{cases}$

设 $a = 5k$, 则 $b = 7k, c = 8k$, 由余弦定理得:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25k^2 + 64k^2 - 49k^2}{2 \times 5k \times 8k}$$

$$= \frac{1}{2},$$

所以 $\angle B = 60^\circ$.

评注 本题充分利用三角形重心的向量性质 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, 与条件 $56a\overrightarrow{GA} + 40b\overrightarrow{GB} + 35c\overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$ 联立, 消去 $\overrightarrow{GB}$, 借用平面向量基本定理, 问题很快得到解决.

4. 竞赛试题中涉及三角形的垂心

例 7 (2010 年全国高中数学联赛山东省预赛试题) 已知 $\triangle ABC$ 的垂心为 H , 若 $B(0, 0), C(2, 0)$, 且点 H 在圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 上移动, 则动点 A 的轨迹为 _____.

解 设 $A(x, y), H(x_1, y_1)$, 因为 H 为

$\triangle ABC$ 的垂心, 所以 $BH \perp AC$.

当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$ 时, $k_{BH} \cdot k_{AC} = -1$, 即 $\frac{y_1}{x} \cdot$

$$\frac{y}{x-2} = -1 (y \neq 0), \text{ 故 } y_1 = -\frac{x^2 - 2x}{y} (y \neq 0).$$

因为点 H 在圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 上, 所以 $(x-1)^2 + (-\frac{x^2 - 2x}{y} + 1)^2 = 2$, 整理得

$$(x^2 - 2x)(y^2 - 2y + x^2 - 2x) = 0.$$

而 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$, 所以 $y^2 - 2y + x^2 - 2x = 0$, 即 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

当 $x = 0$ 时, 只要 $y \neq 0$ (否则 A 与 B 重合), $\triangle ABC$ 都是 $\angle ABC = 90^\circ$ 的直角三角形, 其垂心为点 B , 且点 B 在圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 上, 满足题意;

当 $x = 2$ 时, 只要 $y \neq 0$ (否则 A 与 C 重合), $\triangle ABC$ 都是 $\angle ACB = 90^\circ$ 的直角三角形, 其垂心为点 C , 且点 C 在圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 上, 满足题意.

综上所述, 动点 A 的轨迹为圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ (去掉 B, C 两点) 和直线 $x = 0$ (去掉 B 点) 以及直线 $x = 2$ (去掉 C 点).

评注 由于 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 于是有 $BH \perp AC$, 借用两垂线(斜率存在时)的斜率的乘积为 -1 , 从而得出关于 A 点坐标 (x, y) 的一个等式, 即 A 点的轨迹方程.

例 8 (2016 年全国高中数学联赛山东省预赛试题) 如图 5, 在四面体 $ABCD$ 中, 面 ABC 与面 BCD 成 60° 的二面角, 顶点 A 在面 BCD 上的射影 H 是 $\triangle BCD$ 的垂心, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 若 AH

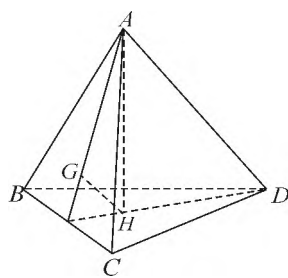


图 5

$= 4, AB = AC$, 则 $GH =$ _____.

解 因为 $AH \perp$ 面 BCD , H 是 $\triangle BCD$ 的垂心, 所以 $DH \perp BC$.

设面 AHD 交 BC 于点 F (如图 5), 因为 $AB = AC$, 故点 G 在 AF 上, 且 $GF = \frac{1}{3}AF, \angle AFH = 60^\circ$, 于是 $AF = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3}, FH = \frac{1}{2}AF = \frac{4\sqrt{3}}{3}, GF = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

在 $\triangle GFH$ 中,由余弦定理得:

$$GH = \sqrt{GF^2 + FH^2 - 2GF \cdot FH \cdot \cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{27} + \frac{16}{3} - 2 \times \frac{8\sqrt{3}}{9} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{21}}{9}.$$

评注 本题依据条件,巧妙作出截面 AFD ,将空间问题平面化.充分利用三角形的垂心和重

心的几何性质,在 $\triangle GFH$ 中,借助余弦定理问题顺利得到解决.

综上所述,三角形的“四心”在高中数学竞赛中涉及面很广,涵盖了代数、三角、几何诸方面知识,综合性强,方法灵活,富有挑战性,是考查学生能力的好题,本文对三角形“四心”进行了粗浅的探讨,旨在总结方法,帮助解题.

(收稿日期:2018-07-27)

巧用三角代换 妙解代数问题

高 礼

(重庆市潼南中学, 402660)

三角函数的知识是高中数学的重要内容,也是高考的热点问题,所占分值比较大.由于三角函数问题涉及的公式繁多,变形技巧灵活,学生在学习过程中普遍感觉比较困难.究其原因,是学生不能灵活应用三角公式对问题进行转化,所以在解题过程中往往思维受阻.

实质上,三角知识应用非常广泛,对某些代数问题,用一般方法求解较为困难,若能根据题目条件与结论的结构及内在特征,恰当运用三角代换,往往可以化腐朽为神奇,本文侧重介绍三角代换在求解函数值域和不等式问题中的应用.

一、弦代换

例 1 求函数 $y = x - 3 + \sqrt{10 - 9x^2}$ 的值域.

$$\text{解 } y = x - 3 + \sqrt{10 - 9x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3x + \sqrt{10 - 9x^2} - 3,$$

注意到 $(3x)^2 + (\sqrt{10 - 9x^2})^2 = 10$, 所以可设 $3x = \sqrt{10} \cos \theta$, $\sqrt{10 - 9x^2} = \sqrt{10} \sin \theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 所以

$$y = \frac{\sqrt{10}}{3} \cos \theta + \sqrt{10} \sin \theta - 3$$

$$= \frac{10}{3} (\frac{3}{\sqrt{10}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos \theta) - 3$$

$$= \frac{10}{3} \sin(\theta + \varphi) - 3,$$

$$\text{其中 } \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 且 } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{因为 } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ 所以 } -\frac{\pi}{2} + \varphi \leq \theta + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \varphi, \text{ 所以 } -\frac{1}{\sqrt{10}} \leq \sin(\theta + \varphi) \leq 1, \text{ 所以}$$

$$-\frac{\sqrt{10}}{3} - 3 \leq \frac{10}{3} \sin(\theta + \varphi) - 3 \leq \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3},$$

$$\text{故所求值域为 } [-\frac{\sqrt{10}}{3} - 3, \frac{1}{3}].$$

例 2 求函数 $f(x) = \sqrt{10x - 9 - x^2} + \sqrt{68x - 256 - x^2}$ 的最大值.

解 由于 $f(x) = \sqrt{(x-1)(9-x)} + \sqrt{(64-x)(x-4)}$, 注意到

$$(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{64-x})^2 = 63,$$

$$(\sqrt{9-x})^2 + (\sqrt{x-4})^2 = 5,$$

故可令 $\sqrt{x-1} = \sqrt{63} \cos \alpha$, $\sqrt{9-x} = \sqrt{5} \cdot \cos \beta$, $\sqrt{64-x} = \sqrt{63} \sin \alpha$, $\sqrt{x-4} = \sqrt{5} \sin \beta$, $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以

$$f(x) = \sqrt{63} \cdot \sqrt{5} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ = 3 \sqrt{35} \cos(\alpha - \beta) \leq 3 \sqrt{35},$$

当 $\alpha = \beta$ 时取得最大值, 此时 $\frac{x-1}{63} = \frac{9-x}{5}$,

即 $x = \frac{143}{17} \in (4, 9)$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $3 \sqrt{35}$.

例 3 (1999 年全国高中数学联赛试题) 给定正整数 n 和正数 M , 对于满足条件 $a_1^2 + a_{n+1}^2 \leq M$ 的所有等差数列 $\{a_n\}$, 试求 $S = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}$ 的最大值.

分析 这是一个与等差数列相关的条件最值问题, 我们可灵活应用“弦代换”来解决这一问题.

解 由条件 $a_1^2 + a_{n+1}^2 \leq M$, 故可令 $a_1 = \sqrt{k} \cos \theta, a_{n+1} = \sqrt{k} \sin \theta, 0 \leq k \leq M, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则有

$$S = \frac{n+1}{2} (a_{n+1} + a_{2n+1}) = \frac{n+1}{2} (3a_{n+1} - a_1) \\ = \frac{n+1}{2} (3\sqrt{k} \sin \theta - \sqrt{k} \cos \theta) \\ = \frac{(n+1)}{2} \sqrt{10k} \sin(\theta - \varphi),$$

$$\text{其中 } \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

故可得:

$$S \leq \frac{(n+1)}{2} \sqrt{10k} \leq \frac{(n+1)}{2} \sqrt{10M}.$$

当且仅当 $\sin(\theta - \varphi) = 1, k = M$ 时取得最大值.

因此, $S = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}$ 的最大值为 $\frac{(n+1)}{2} \sqrt{10M}$.

二、切代换

例 4 (1999 年越南奥林匹克试题) 设 a, b, c 是正实数, 且 $abc + a + c = b$, 试求 $p = \frac{2}{a^2 + 1} +$

$\frac{3}{c^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1}$ 的最大值.

解 由已知条件有 $a + c = (1 - ac)b$, 显然 $1 - ac \neq 0$, 故 $b = \frac{a+c}{1-ac}$, 联想到这种形式与两角和的正切公式极为相似, 所以可令 $a = \tan \alpha, b = \tan \beta, c = \tan \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, 由此得到

$$\tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \gamma} = \tan(\alpha + \gamma).$$

又 $\beta, \alpha + \gamma \in (0, \pi)$, 故 $\beta = \alpha + \gamma$.

$$p = \frac{2}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{2}{1 + \tan^2 \beta} + \frac{3}{1 + \tan^2 \gamma} \\ = 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2(\alpha + \gamma) + 3 \cos^2 \gamma \\ = (1 + \cos 2\alpha) - [1 + \cos(2\alpha + 2\gamma)] + 3 \cos^2 \gamma \\ = 2 \sin \gamma \sin(2\alpha + \gamma) + 3 \cos^2 \gamma \\ \leq 2 \sin \gamma + 3(1 - \sin^2 \gamma) \\ = -3(\sin \gamma - \frac{1}{3})^2 + \frac{10}{3} \leq \frac{10}{3}.$$

当且仅当 $2\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}, \sin \gamma = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立.

故当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}, c = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, $p = \frac{2}{a^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1}$ 取得最大值 $\frac{10}{3}$.

总结 形如 $\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{x-y}{1+xy}, \frac{x+y}{1-xy}, \sqrt{a^2+x^2}$ 等代数式中的 x, y 都可以用正(余)切代换.

例 5 (第 30 届 IMO 预选题) 数列 $a_0, a_1, \cdots$ 与 $b_0, b_1, \cdots$ 定义如下:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_0 = 1, b_{n+1} = \frac{\sqrt{1+b_n^2} - 1}{b_n}, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明 对每一个 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 都有 $2^{n+2} a_n < \pi < 2^{n+2} b_n$.

证明 由题设条件知 $0 < a_n < 1, b_n > 0, n = 0, 1, 2, \cdots$.

$$\text{令 } a_n = \sin \alpha_n, b_n = \tan \beta_n, \alpha_n, \beta_n \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

则

$$a_{n+1} = \sin \alpha_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_n} = \sin \frac{\alpha_n}{2},$$

所以 $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}$, 故 $\{\alpha_n\}$ 是以 α_0 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$\text{又 } a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{2^2}, \text{ 所以 } \alpha_0 = \frac{\pi}{2^2}, \alpha_n = \alpha_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

同理, 由 $b_{n+1} = \frac{\sqrt{1+b_n^2} - 1}{b_n} = \frac{1 - \cos \beta_n}{\sin \beta_n} = \tan \frac{\beta_n}{2}$, 得 $\beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}$, 所以 $\beta_n = \frac{\pi}{2^{n+2}}$, 所以 $b_n =$

$$\tan \frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

由于当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时 $\sin x < x < \tan x$, 所

以 $\sin \frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}$, 原命题成立.

三、割代换

例 6 求函数 $y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的值域.

解 本题是无理函数求值域的问题, 通法是转化为距离求解或者直接对函数求导, 但通过试探两种方法都不太简单, 注意到根号里面是一个二次式, 很容易想到通过三角换元进行处理.

由于 $x^2 - 3x + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$, 于是不妨

令 $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \sec \theta = \frac{1}{2 \cos \theta}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则有:

$$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sec \theta + \frac{1}{2} |\tan \theta|.$$

当 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 时,

$$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \tan \theta + \frac{1}{2} \sec \theta$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}).$$

因为 $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \geq$

1, 从而可得 $y \geq 2$.

类似地, 可以求得: 当 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $1 \leq y <$

$$\frac{3}{2}.$$

故所求函数的值域是 $[1, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$.

例 7 (第 33 届 IMO 预选题) 若 $x, y, z > 1$,

且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, 证明:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

分析 证明这样的问题不仅根式不容易处

理, 而且条件“ $x, y, z > 1, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ”也很难利用. 看来, 此处的换元既要把不等式的根式去掉, 又要把分母化掉, 所以, 这里的换元要达到“一石二鸟”的作用.

证明 设 α, β, γ 均为锐角, 则 $0 < \cos^2 \alpha, \cos^2 \beta, \cos^2 \gamma < 1$, 且 $\sec^2 \alpha > 1, \sec^2 \beta > 1, \sec^2 \gamma > 1$.

不妨令 $x = \sec^2 \alpha, y = \sec^2 \beta, z = \sec^2 \gamma$, 则条件式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ 转化为

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2,$$

$$\text{即 } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \quad ①$$

待证不等式变形为

$$\sqrt{\sec^2 \alpha + \sec^2 \beta + \sec^2 \gamma}$$

$$\geq \sqrt{\tan^2 \alpha} + \sqrt{\tan^2 \beta} + \sqrt{\tan^2 \gamma}.$$

$$\text{即 } \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma}} \geq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} +$$

$$\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \quad ②$$

注意到式 ①, 对 ② 式用柯西不等式有

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}$$

$$\leq \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma}}.$$

当且仅当 $\sin \alpha \cos \alpha = \sin \beta \cos \beta = \sin \gamma \cos \gamma$

即 $\alpha = \beta = \gamma$ 时, 等号成立

故不等式 ② 成立. 所以, 原不等式得证.

从上面的几个例子可以看出, 三角换元是一种很重要的数学思想方法, 它在代数问题中有着广泛的应用. 通常在遇到与圆, 椭圆和双曲线方程相似的代数式时, 经常使用三角换元法, 将复杂的代数问题转化为三角问题, 从而使问题简单明了. 掌握三角代换思想, 可以顺利解决一些代数难题, 提高解题效率, 一些看似无从下手的题目, 若灵活应用三角换元法求解, 往往可以顺利求解.

参考文献:

- [1] 《中等数学》编辑部. 初等代数[M]. 浙江: 浙江大学出版社.
- [2] 沈文选, 张堉, 冷岗松. 奥林匹克中的代数问题[M]. 湖南: 湖南师范大学出版社.

(收稿日期: 2018-09-26)

另解一道 2018 年河北省竞赛题

陶兴红

(安徽省六安第二中学, 237005)

1. 原题再现

2018 年河北省高中竞赛题第 8 题是一道三角形面积最值题, 题目如下:

在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $\sin C = k \sin A$, ($k \geq 2$), 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_____.

2. 原解回顾

原解利用解析法得出点 B 的轨迹是一个阿波罗尼斯圆, 再利用圆的几何性质, 数形结合, 求得 $\triangle ABC$ 的面积的最大值的关于参数 k 的函数表达式, 最后根据函数单调性质, 最终得到 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

具体解法如下:

由正弦定理将 $\sin C = k \sin A$ 变形为 $c = ka$, 其中 c, a 为 AB, BC 的对边.

以线段 AC 所在直线为 x 轴, 以 AC 的中点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系 xOy , 则 $A(-\frac{3}{2}, 0), C(\frac{3}{2}, 0)$, 设 $B(x, y)$, 由 $c = ka$ 得

$$\sqrt{(x + \frac{3}{2})^2 + y^2} = k \sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + y^2},$$

两边平方整理得

$$(k^2 - 1)x^2 + (k^2 - 1)y^2 - (3k^2 + 3)x + \frac{9}{4}(k^2 - 1) = 0.$$

因为 $k \geq 2$, 所以以上方程可化为 $x^2 + y^2 - \frac{3k^2 + 3}{k^2 - 1}x + \frac{9}{4} = 0$, 由此可知点 B 的轨迹是以 $(\frac{3(k^2 + 1)}{2(k^2 - 1)}, 0)$ 为圆心, 以 $r = \frac{3k}{k^2 - 1}$ 为半径的圆.

所以, 当点 B 在圆上运动时, 点 B 到 x 轴的最大距离为半径 $r = \frac{3k}{k^2 - 1}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大

$$\text{值为 } S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3k}{k^2 - 1} = \frac{9k}{2(k^2 - 1)} (k \geq 2).$$

$$\text{而 } S = \frac{9k}{2(k^2 - 1)} = \frac{9}{2(k - \frac{1}{k})} \text{ 在 } k \geq 2 \text{ 上单}$$

$$\text{调递减, 所以 } S_{\max} = \frac{9}{2(2 - \frac{1}{2})} = 3.$$

即 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 3.

3. 解法新视角

笔者觉得原解不直接, 不易想到. 笔者想到一种直接解法, 即纯代数法, 具体如下:

由已知得 $c = ka$, 其中 c, a 为 AB, BC 的对边.

由余弦定理得

$$\cos B = \frac{(ka)^2 + a^2 - 3^2}{2ka \cdot a} = \frac{(k^2 + 1)a^2 - 9}{2ka^2},$$

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$$

$$= 1 - \frac{[(k^2 + 1)a^2 - 9]^2}{4k^2 a^4},$$

$$S^2 = (\frac{1}{2}ka^2 \sin B)^2 = \frac{1}{4}k^2 a^4 \sin^2 B$$

$$= \frac{1}{4}k^2 a^4 - \frac{1}{16}[(k^2 + 1)a^2 - 9]^2$$

$$= -\frac{1}{16}(k^2 - 1)^2 a^4 + \frac{9}{8}(k^2 + 1)a^2 - \frac{81}{16}$$

$$= -\frac{1}{16}(k^2 - 1)^2 [a^2 - \frac{9(k^2 + 1)}{(k^2 - 1)^2}]^2$$

$$+ \frac{81k^2}{4(k^2 - 1)^2}$$

$$\leq \frac{81k^2}{4(k^2 - 1)^2},$$

$$\text{又因为 } k \geq 2, \text{ 所以 } S \leq \frac{9k}{2(k^2 - 1)}.$$

$$\text{而 } \frac{9k}{2(k^2 - 1)} = \frac{9}{2(k - \frac{1}{k})} \text{ 在 } k \geq 2 \text{ 上单调递}$$

减, 所以

$$S \leq \frac{9k}{2(k^2 - 1)} = \frac{9}{2(k - \frac{1}{k})} \leq \frac{9}{2(2 - \frac{1}{2})}$$

$$= 3.$$

所以, $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 3.

(收稿日期: 2018-07-18)

各式各样的目标函数

周羽骐 指导老师 杨春波

(河南省郑州外国语学校高二(14)班, 450001)

线性规划问题是指在线性约束条件下求线性目标函数的最大值或最小值的问题. 但在各级各类考试中, 针对于此的考查却不拘泥于线性, 有非线性的约束条件, 亦有非线性的目标函数, 本文将带领读者一起梳理各式各样的目标函数.

1. 截距型目标函数

目标函数形如 $z = ax + by$. 求这类目标函数的最值时, 常将 $z = ax + by (b \neq 0)$ 转化为直线的斜截式 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{z}{b}$, 通过求截距 $\frac{z}{b}$ 的最值间接求出 z 的最值.

注意: 当 $b > 0$ 时, 截距 $\frac{z}{b}$ 与 z 同时最大和最小; 当 $b < 0$ 时, 两者的最值情况相反.

新的角度: $z = ax + by$ 也可看作两个向量的数量积. 设可行域内任一点 $P(x, y)$, 定点 $Q(a, b)$, 则 $z = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$, 当 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{OQ}$ 方向上的投影最大(小)时, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 最大(小), z 最大(小). 这也是处理截距型(线性)目标函数的一个通法.

例 1 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq x, \\ x + y \leq 1, \text{ 且 } z = 2x + y \text{ 的最大值和最小值分别为 } m, n, \text{ 则 } m - n \text{ 等于} \end{cases}$ ()

(A)5. (B)6. (C)7. (D)8.

解 约束条件表示的平面区域如图 1 中阴影部分, 目标函数 $z = 2x + y = (2, 1) \cdot (x, y)$, 记 $\overrightarrow{OQ} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, P 为可行域内一动点, 则

$$z = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OQ}| |\overrightarrow{OP}| \cos \angle POQ \\ = \sqrt{5} |\overrightarrow{OP}| \cos \angle POQ,$$

其中 $|\overrightarrow{OP}| \cos \angle POQ$ 表示 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{OQ}$ 方向上的投影.

由图 1 易知, 当点 P 与点 $A(-1, -1)$ 重合时, $|\overrightarrow{OP}| \cos \angle POQ$ 最小, z 最小, 为 $2 \times (-1) + (-1) \times 1 = -3$, 即 $n = -3$; 当点 P 与点 $B(2, -1)$ 重合时, $|\overrightarrow{OP}| \cos \angle POQ$ 最大, z 最大, 为 $2 \times$

$2 + (-1) \times 1 = 3$, 即 $m = 3$.

所以 $m - n = 6$, 选(B).

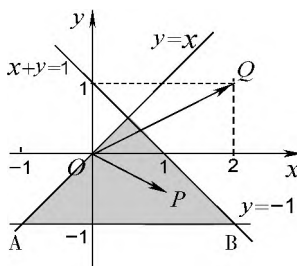


图 1

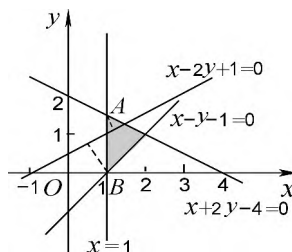


图 2

2. 距离型目标函数

(1) 形如 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 表示点 (x, y) 与原点 $(0, 0)$ 的距离;

(2) 形如 $z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, 表示点 (x, y) 与点 (a, b) 的距离;

(3) 形如 $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ 则表示相应距离的平方;

(4) 形如 $z = |ax + by + c|$, 可变形为 $z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (a, b 不同时为 0), 表示点 (x, y) 到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离的 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 倍.

例 2 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + 2y - 4 \leq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 则 $z = |x - 2y + 1|$ 的最大值是_____.

解 不等式组表示的平面区域如图 2 所示,

$$z = |x - 2y + 1| = \sqrt{5} \cdot \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}},$$

其中 $\frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}}$ 表示可行域内的点 (x, y)

到直线 $x - 2y + 1 = 0$ 的距离.

由图 2 可知, 只需考察点 $A(1, \frac{3}{2})$ 和 $B(1, 0)$ 到直线 $x - 2y + 1 = 0$ 的距离 d_A 和 d_B .

由点到直线的距离公式,得 $d_A = \frac{|1-3+1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $d_B = \frac{|1-0+1|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $d_A < d_B$, 则当点 (x, y) 与点 $B(1, 0)$ 重合时, z 最大, 为 $|1-2 \times 0+1| = 2$.

3. 斜率型目标函数

(1) 形如 $z = \frac{y}{x}$, 表示点 (x, y) 与原点 $(0, 0)$ 连线的斜率;

(2) 形如 $z = \frac{y-b}{x-a}$, 表示点 (x, y) 与点 (a, b) 连线的斜率;

(3) 形如 $z = \frac{cy+d}{ax+b}$ ($ac \neq 0$), 可变形为 $z = \frac{c}{a} \cdot \frac{y+\frac{d}{c}}{x+\frac{b}{a}}$, 表示点 (x, y) 与点 $(-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c})$ 连线的斜率的 $\frac{c}{a}$ 倍.

例 3 设实数 x, y 满足 $\begin{cases} x-y-2 \leq 0, \\ x+2y-5 \geq 0, \\ y-2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 的取值范围是 ()

(A) $[\frac{1}{3}, \frac{10}{3}]$. (B) $[\frac{1}{3}, \frac{5}{2}]$.
(C) $[2, \frac{5}{2}]$. (D) $[2, \frac{10}{3}]$.

解 令 $t = \frac{y}{x}$, 表示可行域内的点 (x, y) 与原点连线的斜率, 作出可行域(图略), 可求得 $t = \frac{y}{x} \in [\frac{1}{3}, 2]$.

又 $z = t + \frac{1}{t}$, 结合对勾函数的单调性可得 $z \in [2, \frac{10}{3}]$, 选(D).

例 4 若实数 x, y 满足 $|x-3| \leq y \leq 1$, 则 $z = \frac{2x+y}{x+y}$ 的最小值为 ()

(A) $\frac{5}{3}$. (B) 2.
(C) $\frac{3}{5}$. (D) $\frac{1}{2}$.

解 因为 $x \neq 0$, $z = \frac{2x+y}{x+y} = \frac{2+\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$, 令 $t =$

$\frac{y}{x}$, 作出可行域(图略), 可求得 $t = \frac{y}{x} \in [0, \frac{1}{2}]$.

因此, $z = \frac{2+t}{1+t} = 1 + \frac{1}{1+t} \in [\frac{5}{3}, 2]$, 选(A).

例 5 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-3 \leq 0, \\ x-2y-3 \leq 0, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 求 $z = \frac{2x+y+1}{x+y}$ 的取值范围.

解法 1 不等式组表示的平面区域如图 3 中阴影部分, 注意到 $x+y \neq 0$, 故点 $(1, -1)$ 应为空心点.

$$z = \frac{2x+y+1}{x+y} = \frac{(x+y)+x+1}{x+y} = 1 + \frac{x+1}{x+y},$$

记 $t = \frac{x+1}{x+y}$, 因为 $x \geq 1$, 故

$$\frac{1}{t} = \frac{x+y}{x+1} = \frac{(x+1)+y-1}{x+1} = 1 + \frac{y-1}{x+1},$$

其中 $\frac{y-1}{x+1}$ 表示可行域内的点 (x, y) 与点 $(-1, 1)$ 连线的斜率.

由图 3, 易求得 $-1 < \frac{y-1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$, 则 $0 < 1 + \frac{y-1}{x+1} \leq \frac{3}{2}$, 即 $0 < \frac{1}{t} \leq \frac{3}{2}$, 得 $t \geq \frac{2}{3}$, 则 $z = 1 + t$ 的取值范围是 $[\frac{5}{3}, +\infty)$.

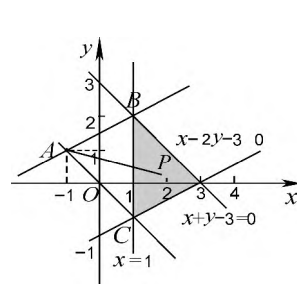


图 3

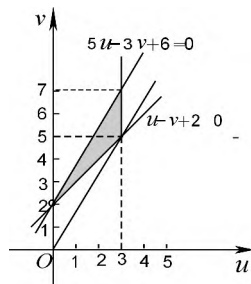


图 4

解法 2 令 $\begin{cases} u = x+y, \\ v = 2x+y+1, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x = v-u-1, \\ y = 2u-v+1, \end{cases}$ 代入原不等式组, 得实数 u, v 满足 $\begin{cases} u-3 \leq 0, \\ 5u-3v+6 \geq 0, \\ v-u \geq 2, \end{cases}$ 作出可行域如图 4 中阴影部分, 注意到 $u \neq 0$, 故点 $(0, 2)$ 应为空心点. 目标函数变为 $z = \frac{v}{u}$, 表示可行域内的点 (u, v) 与原点

点连线的斜率,易得其范围是 $[\frac{5}{3}, +\infty)$.

4. 曲线型目标函数

(1) 如 $z = xy$, 可变形为 $y = \frac{z}{x} (x \neq 0, z \neq 0)$, 表示一系列反比例函数;

(2) 如 $z = y^{\frac{1}{x}}$, 可变形为 $y = z^x (z > 0, \text{且 } z \neq 1)$, 表示底数为 z 的一系列指数函数;

(3) 如 $z = \frac{y^2}{x}$, 可变形为 $y^2 = zx (z \neq 0)$, 表示一系列焦点在 x 轴上的抛物线;

(4) 如 $z = ax^2 + by^2 (a, b \text{ 为常数})$, 可变形为 $\frac{x^2}{\frac{z}{a}} + \frac{y^2}{\frac{z}{b}} = 1$, 当 $\frac{z}{a}$ 与 $\frac{z}{b}$ 同正时, 表示一系列离心率相同的椭圆; 当 $\frac{z}{a}$ 与 $\frac{z}{b}$ 异号时, 表示一系列离心率相同的双曲线.

例 6 设实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \leq 10, \\ x + 2y \leq 14, \\ x + y \geq 6, \end{cases}$ 则 xy 的最大值为 ()

- (A) $\frac{25}{2}$. (B) $\frac{49}{2}$.
(C) 12. (D) 16.

解法 1 不等式组表示的平面区域如图 5 中阴影部分, 记 $z = xy$, 显然, 当 z 最大时, x, y 均为正, 则 $y = \frac{z}{x}$ 表示一系列反比例函数的图象(仅考虑第一象限). 需要判断当反比例函数的图象过点 $(2, 6)$ 时 z 较大, 还是当反比例函数的图象与直线 $2x + y = 10$ 相切时 z 较大.

对于前者: $z = 2 \times 6 = 12$;

对于后者: 联立 $\begin{cases} y = \frac{z}{x}, \\ 2x + y = 10, \end{cases}$ 得 $2x^2 - 10x + z = 0$, 令 $\Delta = 0$ 得 $z = \frac{25}{2}$.

综上, z 的最大值为 $\frac{25}{2}$, 选 (A).

解法 2 因为要求 xy 的最大值, 故可只考虑

正数 x, y . 由 $2x + y \leq 10$ 得 $y \leq 10 - 2x$, 由基本不等式得

$$xy \leq x(10 - 2x) = 2x(5 - x) \leq 2\left(\frac{x + 5 - x}{2}\right)^2 = \frac{25}{2},$$

当且仅当 $\begin{cases} y = 10 - 2x, \\ x = 5 - x \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{5}{2}, \\ y = 5 \end{cases}$ 时等号成立.

经检验取等条件满足原不等式组, 故 xy 的最大值为 $\frac{25}{2}$.

例 7 已知 x, y 的二元一次不等式组 $\begin{cases} x + 2y - 19 \geq 0, \\ x - y + 8 \geq 0, \\ 2x + y - 14 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = y^{\frac{1}{x}}$ 的取值范围是 ()

- (A) $[1, 3]$. (B) $[2, \sqrt{10}]$.
(C) $[2, 9]$. (D) $[\sqrt{10}, 9]$.

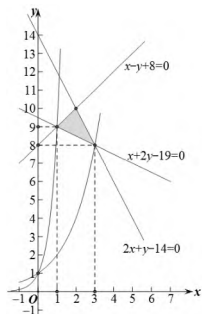


图 6

解 不等式组表示的平面区域如图 6 中阴影部分, $z = y^{\frac{1}{x}}$ 即 $y = z^x (z > 0, \text{且 } z \neq 1)$, 表示一系列底数为 z 的指数函数, 其图象与可行域有交点.

易得: 当图象过点 $(3, 8)$ 时, z 最小, 为 $8^{\frac{1}{3}} = 2$; 当图象过点 $(1, 9)$ 时, z 最大, 为 9.

于是 $z \in [2, 9]$.

例 8 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + y - 4 \leq 0, \\ y - 1 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0, \end{cases}$ 则

$z = \frac{y^2}{x}$ 的最大值是 ()
(A) $\frac{1}{3}$. (B) 1.
(C) 3. (D) 9.

解法 1 不等式组表示的平面区域如图 7 中阴影部分, $z = \frac{y^2}{x}$ 即 $y^2 = zx$, 表示顶点为原点、焦

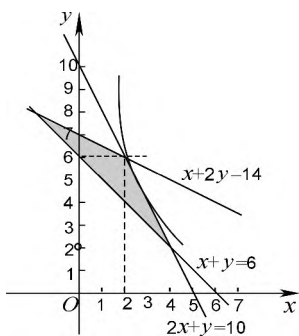


图 5

点为 $(\frac{z}{4}, 0) (z > 0)$ 、开口向右的一系列抛物线, 其通径长为 z . 显然, 当抛物线过点 $A(1, 3)$ 时, 开口最大, 通径最长, 则 z 最大, 为 $\frac{3^2}{1} = 9$, 选(D).

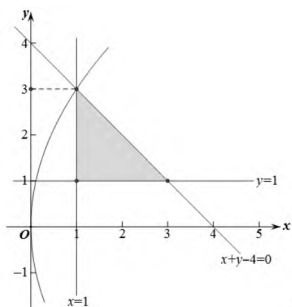


图 7

解法 2 由条件得 $1 \leq x \leq 4 - y \leq 3$, 同理 $1 \leq y \leq 3$, 于是 $\frac{y^2}{x} \leq \frac{3^2}{1} = 9$, 当且仅当 $x = 1, y = 3$ 时取等号, 故 $z = \frac{y^2}{x}$ 的最大值为 9, 选(D).

例 9 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 3y \geq -2, \\ 3x - 3y \leq 4, \\ x + y \geq 1, \end{cases}$ 若 $x^2 + 9y^2 \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的最大值为_____.

解法 1 由题意知, $a \leq (x^2 + 9y^2)_{\min}$, 则实数 a 的最大值即为 $z = x^2 + 9y^2$ 的最小值. 作出约束条件表示的平面区域, 如图 8 中阴影部分. $z = x^2 + 9y^2 > 0$, 即 $\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{\frac{z}{9}} = 1$, 表示一系列以原点为中心, 长轴长

为 $2\sqrt{z}$, 离心率相同的椭圆. 由图易知, 当椭圆与直线 $x + y = 1$ 相切时, 长轴长最短, z 最小. 由 $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = x^2 + 9y^2, \end{cases}$ 得 $10x^2 - 18x + 9 - z = 0$, 令 $\Delta = 0$, 得 $z = \frac{9}{10}$. 所以 z 的最小值为 $\frac{9}{10}$, 即为 a 的最大值.

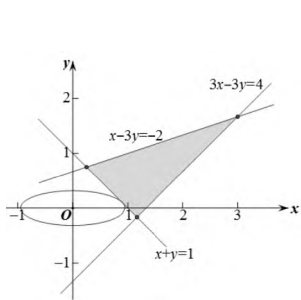


图 8

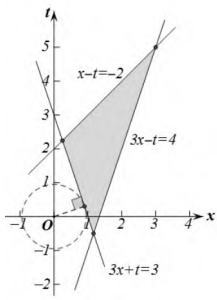


图 9

解法 2 令 $t = 3y$, 则转化为在约束条件 $\begin{cases} x - t \geq -2, \\ 3x - t \leq 4, \\ 3x + t \geq 3 \end{cases}$ 下, 寻求 $z = x^2 + 9y^2 = x^2 + t^2$ 的最小值. 新的可行域如图 9 中阴影部分, 由图易知原点到可行域内的点 (x, t) 的距离的最小值为原点到直线 $3x + t = 3$ 的距离, 为 $\frac{|0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, 则 z 的最小值为 $(\frac{3}{\sqrt{10}})^2 = \frac{9}{10}$, 即为 a 的最大值.

最后留几道题目供读者练习:

- 如果实数 a, b 满足条件 $\begin{cases} a + b - 2 \geq 0, \\ b - a - 1 \leq 0, \\ a \leq 1, \end{cases}$ $\frac{a + 2b}{2a + b}$ 的最大值是_____.
 - 若实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 4x + 3y \leq 12, \end{cases}$ 则 $z = \frac{x + 2y + 3}{x + 1}$ 的取值范围是_____.
 - 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x + 3y - 3 \leq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则 $z = 2|x| + y$ 的取值范围为 ()
(A) $[-1, 3]$. (B) $[1, 11]$.
(C) $[1, 3]$. (D) $[-1, 11]$.
 - 如果函数 $f(x) = \frac{1}{2}(m - 2)x^2 + (n - 8)x + 1 (m \geq 0, n \geq 0)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上单调递减, 那么 mn 的最大值为 ()
(A) 16. (B) 18.
(C) 25. (D) $\frac{81}{2}$.
- 答案: 1. $\frac{7}{5}$; 2. $[\frac{3}{2}, 11]$;
3. (D); (4) (B).

(收稿日期: 2018 - 08 - 16)

解题后的发现与思考

宋 瑄 指导教师 杜重成

(福建省福州第三中学高二(7)班, 350001)

一、问题与思考

题目 如图 1, 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, $\angle BOC = 90^\circ$, 若 $AB \cdot AC = 4BC^2$, 则 A 的大小为 _____.

这是我校周练上的一道解三角形题, 当时难住了不少同学, 我和几个同学经过激烈的讨论、研究, 尝试了不同的切入点后, 决定借助平面向量的工具性特点, 利用平面向量的数量积和平面向量的线性运算来解决问题. 找好突破口后, 我就独立地进行推理演算, 于是得到了以下解法.

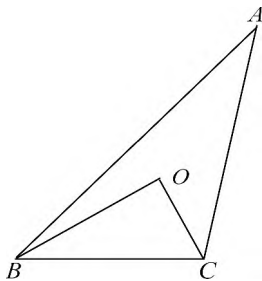


图 1

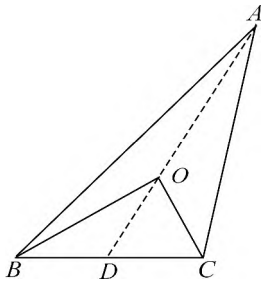


图 2

解法 1 连结 AO 并延长交 BC 于 D , 因为 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 D 为 BC 的中点. 所以 $|\overrightarrow{AO}| = 2|\overrightarrow{OD}|$, 又 $\angle BOC = 90^\circ$, D 为 BC 的中点, 所以 $DO = DB = DC = \frac{1}{2}BC$.

因为 $4BC^2 = AB \cdot AC$, 所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A \\ &= 4|\overrightarrow{BC}|^2 \cdot \cos A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{DC}|^2 \\ &= (3|\overrightarrow{OD}|)^2 - |\overrightarrow{OD}|^2 \\ &= 8|\overrightarrow{OD}|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 4|\overrightarrow{BC}|^2 \cdot \cos A &= 8|\overrightarrow{OD}|^2, \text{ 即} \\ 4 \times (2|\overrightarrow{OD}|)^2 \cdot \cos A &= 8|\overrightarrow{OD}|^2, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \cos A = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } A = 60^\circ.$$

以上是我和几位同学讨论的结果, 让我感到了成功的快乐, 更让我体会到了团队的合作力量, 第二天上课我们演示了解题成果, 受到了老师、同学们的肯定.

在老师讲评完这道题后, 一位“学霸”也展示了他的解法.

解法 2 设 $AB = m, AC = n, BC = a$, 由 $BC^2 = AB \cdot AC$ 可得 $mn = 4a^2$.

因为 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, 两式平方相加得, $(2\overrightarrow{AD})^2 + \overrightarrow{BC}^2 = 2(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2)$, 即

$$4|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) \quad ①$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \angle BOC = 90^\circ, \text{ 所以 } AD &= 3OD = \frac{3}{2}BC \\ &= \frac{3}{2}a, \text{ 所以 } 9a^2 + a^2 = 2(m^2 + n^2), \text{ 即 } m^2 + n^2 = \\ &5a^2, \text{ 根据余弦定理可得, } \cos A = \frac{m^2 + n^2 - a^2}{2mn} = \\ &\frac{4a^2}{8a^2} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } A = 60^\circ. \end{aligned}$$

这个解法受到了大家的好评, 在惊叹之余, 解法中一个地方引起了我的思考: 即解法中的 ① 式就是平行四边形的一个重要性质: 平行四边形的对角线平方和等于两邻边平方和, 于是我马上提出了以下想法.

分析 由于本题中 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 连结 AO 并延长交 BC 于 D , 根据“平行四边形的对角线平方和等于两邻边平方和”, 利用方程的思想, 求出 AB 与 AC 的数量关系, 再根据余弦定理即可求得角 A .

解析 3 设 $AB = m, AC = n, BC = a$, 由解法 2 可得 $m^2 + n^2 = 5a^2$, 又 $mn = 4a^2$, 两式联立看成是关于“ m, n 的二元二次方程组”, 由 $mn = 4a^2$ 得 $n = \frac{4a^2}{m}$, 代入 $m^2 + n^2 = 5a^2$, 得 $m^2 + (\frac{4a^2}{m})^2 = 5a^2$, 整理得 $m^4 - 5a^2m^2 + 16a^4 = 0$, 而判别式 $\Delta = 25a^4 - 4 \times 16a^4 = -39a^4 < 0$, 此方程无实数解,

那么这样的三角形不存在.

这是为什么呢?这也引起了老师的思考.课后,我们几位同学在老师的指导下,进行了研究,决定借助几何画板,从实验角度予以论证.

二、实验论证

方案 1 假设 $\triangle ABC$ 满足条件: O 为 $\triangle ABC$ 的重心, $\angle BOC = 90^\circ$,如图 3 和图 4 所示,以 BC 为直径作半圆 D (D 为 BC 的中点),连结 DO ,并延长至 A ,使得 $OA = 2DO$,连结 AB, AC ,得到 $\triangle ABC$. 利用几何画板测量功能,测得 AB, AC, BC ,并计算 $\frac{AB \cdot AC}{BC^2}$ 的值,发现 $\frac{AB \cdot AC}{BC^2} \leq 2.5$,于是满足条件 $AB \cdot AC = 4BC^2$ 的三角形是不存在的.

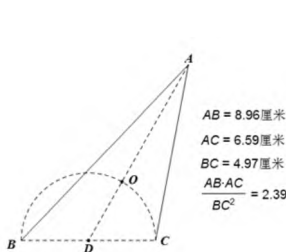


图 3

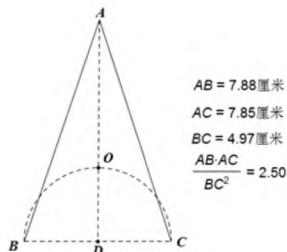


图 4

方案 2 假设 $\triangle ABC$ 满足 $AB \cdot AC = 4BC^2$,如图 5 所示,作出 $\triangle ABC$ 的重心 O ,再作以 BC 为直径的圆 D ,发现点 O 在圆 D 外,即 $\angle BOC < 90^\circ$,也就是 $\triangle ABC$ 满足 $AB \cdot AC = 4BC^2$,则不满足 O 为 $\triangle ABC$ 的重心时 $\angle BOC = 90^\circ$.

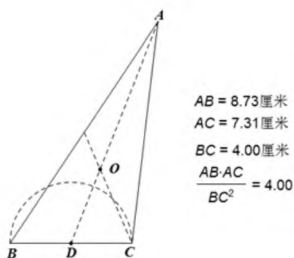


图 5

于是,实验告诉我们满足条件的三角形是不存在的,我们尝试给予证明.

三、推理证明

设 $AB \cdot AC = tBC^2$,即 $mn = ta^2$,所以 $n =$

$\frac{ta^2}{m}$,代入 $m^2 + n^2 = 5a^2$,得 $m^2 + (\frac{ta^2}{m})^2 = 5a^2$,整理得 $m^4 - 5a^2m^2 + t^2a^4 = 0$,由判别式 $\Delta = 25a^4 - 4 \cdot t^2a^4 = (25 - 4t^2)a^4 \geq 0$,解得 $t^2 \leq \frac{25}{4}$,即 $t \leq \frac{5}{2}$.

又 $\cos A = \frac{m^2 + n^2 - a^2}{2mn} = \frac{4a^2}{2ta^2} = \frac{2}{t}$,显然 $0^\circ < A < 90^\circ$,所以 $0 < \frac{2}{t} < 1$,所以 $t > 2$,故 $2 < t \leq \frac{5}{2}$.

于是我们得出了本题是一道错题的结论,我们不仅发现了“错题”,而且错误的原因也被我们从数学实验和逻辑推理给解释了.

四、感悟与反思

这是一次从未有过的解题经历和探究经历,让我们感受到了学习的快乐,也让我们体会到了在解决数学问题时不要满足于“解完题”,要有所思考、反思,这样才能立足一题,解决一类问题,才能触类旁通,举一反三.

在老师的精心指导下,我们小组对本题作了如下修正,并作了变式:

已知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, $\angle BOC = 90^\circ$,若 $AB \cdot AC = \frac{5}{2}BC^2$,则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- (A) 等腰三角形. (B) 等边三角形.
(C) 直角三角形. (D) 等腰直角三角形.

变式 1 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, $\angle BOC = 90^\circ$,若 $AB \cdot AC = \frac{9}{4}BC^2$,则 $\cos A$ 的值为_____.

变式 2 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, $\angle BOC = 90^\circ$,若 $AB \cdot AC = tBC^2$,则 t 的取值范围是_____.

变式 3 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , D 是 BC 的中点,若 $a = 4, AD = c - b$,则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_____.

(收稿日期:2018-08-20)

例谈变量的挖掘与设立

庞振超 指导老师 褚人统

(浙江省天台中学高二(15)班, 317200)

一眨眼,暑假要过去了,根据数学老师暑假作业要求,笔者选择了以高一数学中动态背景的问题为课题进行了研究,重点是对动态问题中主动变量不明显时,如何找出隐身、起决定作用的变量,或合理地转换一下变量进行思考,进而对这样的变量如何发现挖掘,或者说如何设立才比较好且易于问题的解决,获得了一点体会.

据笔者对读高中一年来做过的试题、资料核实与排查,有动态背景的试题以一元二次函数的题型偏多,而主变量(主动点或主参数)不明确的情况最为复杂,大多数同学是难于解决的.依笔者的研究,可以把这些问题分为三类.

一、从关键的约束条件入手找变量

有些动态的问题,变化过程中的关键约束条件很明显,那么,就在这个条件身上找突破口,以期获得我们所需要的变量,对这个变量进行设立,促使问题得到解决.

例 1 已知 $f(x) = |x^2 + 2x - 1|$, 设 $a < b < -1$, 且有 $f(a) = f(b)$. 试求 $ab + a + b$ 的取值范围.

解 设 $a^2 + 2a - 1 = -b^2 - 2b + 1 = t$, 得 $a + 1 = -\sqrt{t+2}$, $b + 1 = -\sqrt{2-t}$ 及 $t \in (0, 2)$, 则

$$\begin{aligned} ab + a + b &= (a+1)(b+1) - 1 \\ &= \sqrt{4-t^2} - 1 \in (-1, 1). \end{aligned}$$

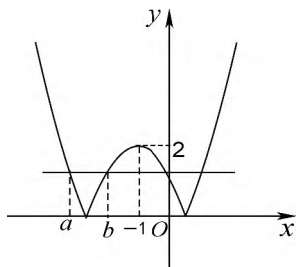


图 1

解后思考 由图 1, 题中的关键条件是 $f(a) = f(b)$, 这是两个数的函数值相等的条件, 所以我们就想使用这个函数值(设立为 t) 作为变量,

进而找出这个 t 的变化范围, 把目标转化为关于这个 t 的函数, 任务是求这个函数的最大值.

二、从多个条件之间的联系物入手找变量

有些动态的问题, 变化过程中的约束条件很多, 地位也平等, 那么就在这多个条件之间找联系物作突破口, 以期获得我们所需要的变量.

例 2 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > b > c$), 已知 $f(1) = 0$, 且方程 $f(x) = -a$ 有解.

(I) 试证明 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上为单调递增函数;

(II) 设 $g(x) = f(x) + bx$, 则 $g(x) = 0$ 有两个不同的实根 x_1, x_2 , 并求 $|x_1 - x_2|$ 的取值范围.

解 (I) 因为方程 $f(x) = -a$ 有解, 所以方程 $ax^2 + bx + c + a = 0$ 有实根 $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4a(a+c) \geq 0$.

因为 $f(1) = 0$, 所以有 $a + b + c = 0$, 即 $a + c = -b$, 又 $a > b > c$, 得 $a > 0$ 且 $c < 0$.

所以, 由 $\Delta = b^2 - 4a(a+c) = b(b+4a) = b(3a-c) \geq 0$ 得出 $b \geq 0$, 从而二次函数 $f(x)$ 的图象的对称轴直线 $x = -\frac{b}{2a} \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上为单调递增函数.

(II) 根据题意, 方程 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 中, $\Delta = 4b^2 - 4ac > 0$, 所以 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 的两个不同实根,

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{4\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\right)^2 + 3}.$$

由 $a > b = -(a+c)$ 得出 $\frac{c}{a} > -2$, 又 $a + c = -b \leq 0$ 得出 $\frac{c}{a} \leq -1$, 这样 $\frac{c}{a} \in (-2, -1]$, 即 $\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\right)^2 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$, 所以 $|x_1 - x_2| \in [2, 2\sqrt{3})$.

解后思考 这里三个平等的条件: $a > b > c, f(1) = 0, f(x) = -a$ 有解. 等价转换后为: a

$> b > c, a + b + c = 0, \Delta = b^2 - 4a(a + c) \geq 0$;
 由于等式条件作用是方程作用、消元作用,再结合第三个条件, b 成为中间量,也是关键联系物就浮出水面了,这样,结合 $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{4(\frac{c}{a} + \frac{1}{2})^2 + 3}$ 引出了消去 b 的方法,把 $\frac{c}{a}$ 整体做变量,难度就降下来了.

三、从模糊的条件中筛选出变量来

有些动态的问题,变化过程中的约束条件是很模糊或隐蔽的,那么,就要在这模糊、隐蔽的条件中发现一些蛛丝马迹或抓住一些特征,寻找变量,转化问题.

下面一题笔者把它放在班级同学群里征解,收集到了八种解法,其中用设立变量转为求函数值域的方法有两种,别的方法都是寻找参数 a, b 的约束条件,根据条件使用不等式确定范围,后检验上界值是不是最大值.

例3 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在区间 $[0, 1]$ 内存在零点,则 ab 的最大值为_____.

分析一 这是个含有双元参数的二次函数,即区间 $[0, 1]$ 中的每一个点都可能是它的零点,那么,是否可以建立 ab 与这个零点 x_0 的函数关系呢?

解法一 设这个零点 $x_0 \in [0, 1]$, 则 $ab = a(-x_0^2 - ax_0) = -a(x_0 + \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4}$; 把 x_0 看成变量,去求 ab 的最大值,这样,根据 $-\frac{a}{2}$ 与区间 $[0, 1]$ 的位置关系、结合二次项系数 $-a$, 就要作如下讨论讨论.

$$\text{记 } h(x_0) = -a(x_0 + \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4}.$$

(1) 当 $-\frac{a}{2} < 0$, 即 $a > 0$ 时, 二次函数 $h(x)$ 开口向下, 故 $(ab)_{\max} = h(0) = 0$;

(2) 当 $-\frac{a}{2} = 0$, 即 $a = 0$ 时, $ab = 0$;

(3) 当 $-\frac{a}{2} \geq 1$, 即 $a \leq -2$ 时, 二次函数 $h(x)$ 开口向上, 故 $(ab)_{\max} = h(0) = 0$;

(4) 当 $0 < -\frac{a}{2} < 1$, 即 $-2 < a < 0$ 时, 二次函数 $h(x)$ 开口向上, 故 $(ab)_{\max} = \max\{0, -a^2 - a\} \leq \frac{1}{4}$, 等号成立当且仅当 $a = -\frac{1}{2}$ 且 $x_0 = 1$, 得 $b = -\frac{1}{2}$.

综上: ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

解后思考 零点 x_0 与目标出现的参数 a, b 的关系看起来比较远, 一般同学是想不到的, 用零点 x_0 做变量是个大胆的想法.

分析二 再看“函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在区间 $[0, 1]$ 内存在零点”意思可知: $a \in \mathbf{R}$ 且 $b \in \mathbf{R}$, 另一个零点范围也是 $\mathbf{R}$. 能否利用这个资源呢?

解法二 设方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根为 $x_1 \in [0, 1], x_2 \in \mathbf{R}$, 这里有可能 $x_2 = x_1$, 则 $x_1 + x_2 = -a, x_1 \cdot x_2 = b$, 所以

$$ab = (-x_1) \cdot x_2^2 + (x_1^2) \cdot x_2.$$

在这个关系式子中, 把 ab 看成是变量 $x_2 (x_2 \in \mathbf{R})$ 的二次函数, x_1 是系数了, 则

$$ab \leq \frac{-(x_1^2)^2}{4(-x_1)} = \frac{x_1^3}{4} \leq \frac{1}{4},$$

等号成立当且仅当: $x_1 = 1$ 且 $x_2 = -\frac{x_1^2}{2(-x_1)} = -\frac{x_1}{2} = -\frac{1}{2}$, 此时 $a = b = -\frac{1}{2}$.

故 ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

解后思考 认识到另一个零点 x_2 的范围是 $\mathbf{R}$, 思维的空间就开阔了许多; 把目标出现的参数 a, b 转化为两个零点去思考是难得的突破.

关于主变量不明确的动态背景的试题, 主元或变量从无到有、从模糊到清楚的建构过程是十分复杂的, 新元的范围考虑也是很费力的, 其解法远不是本文三言两语能一步概括到位的, 需要读者自己去多多领悟总结的. 限于篇幅把主要事儿说一下, 就说到这儿了!

(收稿日期: 2018-09-02)

一道课本习题的背景与应用

常宇阳 指导老师 何 睦

(江苏省张家港市常青藤实验中学高三(2)班, 215600)

一、问题的提出

苏教版教材必修 5 第 102 页有这样一道习题:

如图 1, 有一壁画, 最高点 A 处离地面 4 m, 最低点 B 处离地面 2 m. 若从离地面 1.5 m 的 C 处观赏它, 则离墙多远时, 视角 θ 最大?

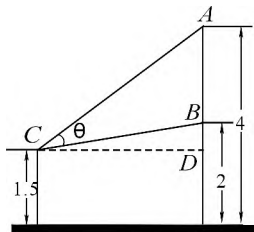


图 1

学完两角和差的三角函数公式和基本不等式之后, 这个问题不难解决.

解析 如图 1 所示, 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 设 $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, 当 $CD = x$ 时, $\tan \alpha = \frac{2.5}{x}$, $\tan \beta = \frac{0.5}{x}$, 所以

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ &= \frac{2}{x + \frac{1.25}{x}},\end{aligned}$$

由基本不等式得 $\frac{2}{x + \frac{1.25}{x}} \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (当且仅当

$x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时等号成立).

即当人离墙 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m 时, 视角 θ 最大.

当我把自己的解答拿给何老师后, 何老师说我的解法很不错, 并且还告诉我这个问题有它的历史背景, 最早是由德国数学家米勒提出的, 因此也被称为是米勒问题, 也可称为最佳视角问题. 本题是米勒问题(最佳视角问题)的一种具体表现形式. 何老师还建议我去查阅相关资料, 了解米勒问题, 并对试题中出现的最佳视角问题做一个

简单的汇总, 整理成文, 这正是促成我写作本文的重要原因.

二、问题的背景

米勒(Johannes Miller), 德国数学家, 曾在莱比锡、维也纳学习天文学和三角学, 1486 年至 1471 年在维也纳大学任教授. 1471 年定居纽伦堡, 从事天文学研究. 米勒对三角学作出了贡献. 大约在 1461 年至 1464 年间, 他写成《论三角》一书, 书中给出了有关球面三角学的正弦定理、余弦定理, 计算了三角函数表, 相当精确. 他的这些工作使三角学脱离天文学而成为一门独立的学科. 另外, 米勒在研究几何时采用了代数方法, 这在当时也是别具一格的.

1471 年, 米勒向诺德尔(Christian Roder) 教授提出一个十分有趣的问题: 在地球表面的什么部位, 一根垂直的悬杆呈现最长(即在什么部位, 可见角为最大)?

米勒的家乡哥尼斯堡把这个问题称为雷奇奥莫塔努斯(Regiomontanus) 极大值问题, 该问题被收录在《100 个著名初等函数问题——历史和解》一书中. 值得一提的是, 这是载入数学史的第一个极值问题.

米勒问题在我们的试题中频频亮相, 常常与解析几何、平面几何和实际应用问题相结合. 以下通过列举相关试题加以举例说明.

三、以米勒问题为背景的平面几何问题

例 1 如图 2, 摩天轮的半径 OA 为 50 m, 它的最低点 A 距地面的高度忽略不计. 地面上有一长度为 240 m 的景观带 MN , 它与摩天轮在同一竖直平面内, 且 $AM = 60$ m. 点 P 从最低点 A 处按逆时针方向转动到最高点 B 处, 记 $\angle AOP = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$.

(1) 当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, 求点 P 距地面的高度 PQ ;

(2) 试确定 θ 的值, 使得 $\angle MPN$ 取得最大值.

解析 (1) 由题意得: $PQ = 50 - 50\cos\theta$.

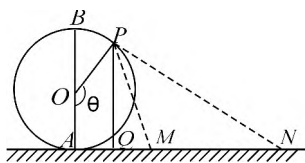


图 2

当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, $PQ = 50 - 50\cos\frac{2\pi}{3} = 75$ m.

(2) 由题意得: $AQ = 50\sin\theta$, $MQ = 60 - 50\sin\theta$, $NQ = 300 - 50\sin\theta$.

由(1)得: $PQ = 50 - 50\cos\theta$, 所以

$$\tan\angle NPQ = \frac{NQ}{PQ} = \frac{6 - \sin\theta}{1 - \cos\theta},$$

$$\tan\angle MPQ = \frac{MQ}{PQ} = \frac{6 - 5\sin\theta}{5 - 5\cos\theta}.$$

所以

$$\tan\angle MPN = \tan(\angle NPQ - \angle MPQ)$$

$$= \frac{\tan\angle NPQ - \tan\angle MPQ}{1 + \tan\angle NPQ \cdot \tan\angle MPQ}$$

$$= \frac{\frac{6 - \sin\theta}{1 - \cos\theta} - \frac{6 - 5\sin\theta}{5 - 5\cos\theta}}{1 + \frac{6 - \sin\theta}{1 - \cos\theta} \times \frac{6 - 5\sin\theta}{5 - 5\cos\theta}}$$

$$= \frac{12(1 - \cos\theta)}{23 - 18\sin\theta - 5\cos\theta}.$$

令 $g(\theta) = \frac{12(1 - \cos\theta)}{23 - 18\sin\theta - 5\cos\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$, 则

$$g'(\theta) = \frac{12 \times 18(\sin\theta + \cos\theta - 1)}{(23 - 18\sin\theta - 5\cos\theta)^2}, \theta \in (0, \pi).$$

令 $g'(\theta) = 0$, 得 $\sin\theta + \cos\theta - 1 = 0$, 解得 $\theta =$

$\frac{\pi}{2}$. 当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(\theta) > 0$, $g(\theta)$ 为增函数;

当 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $g'(\theta) < 0$, $g(\theta)$ 为减函数, 所以,

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $g(\theta)$ 有极大值, 为最大值.

因为 $0 < \angle MPQ < \angle NPQ < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 <$

$\angle MPN < \frac{\pi}{2}$, 所以, 当 $g(\theta) = \tan\angle MPN$ 取得

最大值时, $\angle MPN$ 取得最大值.

综上, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\angle MPN$ 取得最大值.

四、以米勒问题为背景的解析几何问题

例 2 已知椭圆的中心在坐标原点, 焦点 F_1 , F_2 在 x 轴上且焦距为 $2c$, A_1, A_2 为左右顶点, 左准线 l 与 x 轴的交点为 M , $MA_2 : A_1F_1 = 6 : 1$, 若点 P 在直线 l 上运动, 且离心率 $e < \frac{1}{2}$, 则

$\tan\angle F_1PF_2$ 的最大值为_____.

解析 由题意得: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, 直线 l 的方程为 $x = -\frac{a^2}{c}$, 由此 $M(-\frac{a^2}{c}, 0)$. 所以 $MA_2 = a + \frac{a^2}{c}$, $A_1F_1 = a - c$, $F_2M = c + \frac{a^2}{c}$, $F_1M = -c + \frac{a^2}{c}$.

根据题意 $a + \frac{a^2}{c} = 6(a - c)$, 解得 $a = 2c$ 或 $a = 3c$.

因为离心率 $e < \frac{1}{2}$, 所以 $a = 3c$.

设 $PM = x$, $\angle F_1PF_2 = \theta$, $\angle F_1PM = \alpha$, $\tan\alpha = \frac{\frac{a^2}{c} - c}{x}$, $\tan(\theta + \alpha) = \frac{c + \frac{a^2}{c}}{x}$, 因此

$$\tan\theta = \tan[(\theta + \alpha) - \alpha] = \frac{2c}{x + \frac{80c^2}{x}}$$

$$\leq \frac{2c}{8\sqrt{5}c} = \frac{\sqrt{5}}{20},$$

当且仅当 $x = 1$ 时等号成立.

所以, 当 $x = 1$ 时 $\tan\theta$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{5}}{20}$.

变式 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 为 x 轴正半轴上的两个动点, P (异于原点 O) 为 y 轴上的一个定点. 若以 AB 为直径的圆与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 相外切, 且 $\angle APB$ 的大小恒为定值, 则线段 OP 的长为_____.

解析 设 $OP = y$, 设 AB 的中点 C 的坐标为 $C(x, 0)$, 设 AB 为直径的圆的半径为 r .

由题意得 $x^2 + 4 = (r + 1)^2$, 不妨再令 $\angle APB = \theta$, $\angle APO = \alpha$, 由此 $\angle BPO = \alpha + \theta$. 所以

$\tan\alpha = \frac{x - r}{y}$, $\tan(\theta + \alpha) = \frac{x + r}{y}$, 所以

$$\tan\theta = \tan[(\theta + \alpha) - \alpha] = \frac{2ry}{y^2 + 2r - 3}$$

$$= \frac{2y}{\frac{y^2 - 3}{r} + 2}.$$

因为无论 AB 在何处, $\angle APB$ 的大小恒为定值, 所以 $\tan\theta$ 的值与半径 r 无关, 所以 $y^2 = 3$, 即 $y = \sqrt{3}$, 线段 OP 的长为 $\sqrt{3}$.

五、以米勒问题为背景的实际应用问题

实际上, 苏教版教材必修 5 第 102 页呈现的问题就是以米勒问题为背景的实际应用问题, 以下我再举一例说明.

(下转封四)

问题征解

编者按:本栏目精选适合高中学生的有趣、实用、新颖、灵巧、深浅适度、富有启发性的题目进行征解,使其成为启迪思维、开发智力的小智囊.该栏目面向广大读者征集问题,问题的选题范围不做限制,但难度应适当控制,适宜高中学生解答.欢迎自编新问题,也可以在现有问题基础上进行改编,提供试题时请注明来源,并请附上解题思路分析和详细解答.

每期问题征解时间为 50 天,欢迎广大读者(尤其是高中学生)踊跃提供解答,提供解答时请标明题号.本刊隔两期刊登供题者或读者提供的解答和有价值的推广,并公布前五位(按来稿时间顺序)提供正确解答的读者名单.

提供问题或回答问题时,请发送到电子邮箱:shxtxxuesh@163.com.

2018 年第 11 期问题解答

来稿回答 2018 年第 11 期问题的前五位读者是:浙江省象山中学 杨育池;安徽省六安第二中学 陶兴红;河南省南阳师范学院软件学院 2017 级 9 班 李居之 孙文雪;安徽省安庆市岳西县汤池中学 杨续亮、苏岳祥;安徽省安庆市第一中学高三(15)班 刘毅.限于篇幅,仅选登部分优秀解答,供读者参考.

371. 若 $a, b, c \in (0, \frac{3}{2})$, 且 $a^2b + 2b^2c + 2c^2a = 5$, 求 $P = \frac{b}{3-2a} + \frac{2c}{3-2b} + \frac{2a}{3-2c}$ 的最小值.

(237005 安徽省六安第二中学 陶兴红 供题)

解法 1 (246700 安徽省枞阳县宏实中学 江保兵 提供)

$\forall x \in (0, \frac{3}{2})$, 有

$$\begin{aligned} 0 &< 3x^2 - 2x^3 = x \cdot x \cdot (3 - 2x) \\ &\leq \left(\frac{x + x + 3 - 2x}{3} \right)^3 = 1, \end{aligned}$$

又 $a, b, c \in (0, \frac{3}{2})$, 所以 $0 < 3a^2 - 2a^3 \leq 1$,

$0 < 3b^2 - 2b^3 \leq 1, 0 < 3c^2 - 2c^3 \leq 1$, 所以

$$P = \frac{b}{3-2a} + \frac{2c}{3-2b} + \frac{2a}{3-2c}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2b}{3a^2-2a^3} + \frac{2b^2c}{3b^2-2b^3} + \frac{2c^2a}{3c^2-2c^3} \\ &\geq a^2b + 2b^2c + 2c^2a = 5. \end{aligned}$$

即 P 的最小值为 5, 当且仅当 $a = b = c = 1$ 时等号成立.

解法 2 (246004 安徽省安庆市第一中学 高二(3)班 方恒甲 提供)

设 $f(x) = 3x^2 - 2x^3, x \in (0, \frac{3}{2})$, 则 $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1-x)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, \frac{3}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减. 所以函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = 1$, 故 $f(x) \leq 1$.

又易知: 当 $x \in (0, \frac{3}{2})$ 时, $f(x) = 3x^2 - 2x^3 = x^2(3-2x) > 0$, 所以 $0 < f(x) \leq 1$.

于是, 当 $a, b, c \in (0, \frac{3}{2})$ 时, 均有 $0 < 3a^2 - 2a^3 \leq 1, 0 < 3b^2 - 2b^3 \leq 1, 0 < 3c^2 - 2c^3 \leq 1$, 因此

$$\begin{aligned} P &= \frac{b}{3-2a} + \frac{2c}{3-2b} + \frac{2a}{3-2c} \\ &= \frac{a^2b}{3a^2-2a^3} + \frac{2b^2c}{3b^2-2b^3} + \frac{2c^2a}{3c^2-2c^3} \\ &\geq a^2b + 2b^2c + 2c^2a = 5. \end{aligned}$$

故当 $a = b = c = 1$ 时, P 的最小值为 5.

372. 已知: 当 $x \in [1, 4]$ 时, 不等式 $0 \leq ax^3 + bx^2 + 4a \leq 4x^2$ 恒成立. 求 $a + b$ 的最大值和最小值.

(435200 湖北省阳新县高级中学 邹生书 供题)

解法 1 (430022 湖北省武汉外国语学校 高三(3)班 王思睿 提供)

原不等式可化为 $-2x^2 \leq ax^3 + (b-2)x^2 + 4a \leq 2x^2$, 当 $x \in [1, 4]$ 时, 即

$$-2 \leq a(x + \frac{4}{x^2}) + b - 2 \leq 2.$$

设 $f(x) = x + \frac{4}{x^2}, x \in [1, 4]$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$. 易知: 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单

调递减;当 $x \in [2, 4]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 所以, $[f(x)]_{\min} = f(2) = 3$, $[f(x)]_{\max} = \max\{f(1), f(4)\} = \max\{5, \frac{17}{4}\} = 5$. 所以 $3 \leq f(x) \leq 5$.

(1) 若 $a = 0$, 则可得 $0 \leq b \leq 4$, 所以 $0 \leq a + b \leq 4$;

(2) 若 $a > 0$, 则有

$$\begin{cases} 5a + b - 2 \leq 2, \\ 3a + b - 2 \geq -2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 5a + b \leq 4, \\ 3a + b \geq 0, \end{cases}$$

从而可得

$$a + b = 2(3a + b) - (5a + 4) \geq -4.$$

(3) 若 $a < 0$, 则有

$$\begin{cases} 3a + b - 2 \leq 2, \\ 5a + b - 2 \geq -2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3a + b \leq 4, \\ 5a + b \geq 0, \end{cases}$$

从而可得 $a + b = 2(3a + b) - (5a + 4) \leq 8$.

故 $a + b$ 的最大值为 8 (当 $a = -2, b = 10$ 时取得), 最小值为 -4 (当 $a = 2, b = -6$ 时取得).

解法 2 (246004 安徽省安庆市第一中学高三(15)班 刘毅 提供)

由已知得不等式 $0 \leq a(x + \frac{4}{x^2}) + b \leq 4$ 对 $\forall x \in [1, 4]$ 恒成立.

设 $f(x) = a(x + \frac{4}{x^2}) + b, x \in [1, 4]$, 对其求导得 $f'(x) = \frac{a(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$.

① 当 $a = 0$ 时, $f(x) = b \in [0, 4]$, 所以 $a + b \in [0, 4]$;

② 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 在 $[2, 4]$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = 5a + b \leq 4$, 最小值为 $f(2) = 3a + b \geq 0$, 于是 $a + b = 5a + b - 4a < 5a + b \leq 4, a + b = 2(3a + b) - (5a + b) \geq 0 - 4 = -4$;

③ 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 在 $[2, 4]$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(2) = 3a + b \leq 4$, 最小值为 $f(1) = 5a + b \geq 0$, 于是 $a + b = 5a + b - 4a > 5a + b \geq 0, a + b = 2(3a + b) - (5a + b) \leq 2 \times 4 - 0 = 8$.

综上所述, $a + b$ 的最大值为 8, 此时 $3a + b = 4, 5a + b = 0$, 即 $a = -2, b = 10$; $a + b$ 的最小值为 -4 , 此时 $3a + b = 0, 5a + b = 4$, 即 $a = 2, b = -6$.

373. 已知实数 a, b, c 满足 $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$, 且 $(7a + b + c)(a + 7b + c)(a + b + 7c) \neq 0$, 试判断

$M = \frac{a}{7a + b + c} + \frac{b}{a + 7b + c} + \frac{c}{a + b + 7c}$ 是否为定值, 并说明理由.

(318015 浙江省台州市洪家中学 邬天泉 供题)

解法 1 (237005 安徽省六安第二中学 陶兴红 提供)

设 $\sqrt[3]{a} = m, \sqrt[3]{b} = n, \sqrt[3]{c} = p$, 则 $a = m^3, b = n^3, c = p^3, m + n + p = 0$,

因此 $m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$,

$$\frac{a}{7a + b + c} = \frac{m^3}{7m^3 + n^3 + p^3} = \frac{m^3}{7m^3 + (n + p)(n^2 - np + p^2)}$$

$$= \frac{m^3}{7m^3 - m(n^2 - np + p^2)}$$

$$= \frac{m^2}{7m^2 - (n^2 - np + p^2)}$$

$$= \frac{m^2}{7m^2 - [(n + p)^2 - 3np]}$$

$$= \frac{m^2}{6m^2 + 3np}.$$

同理可得

$$\frac{b}{a + 7b + c} = \frac{n^2}{6n^2 + 3mp},$$

$$\frac{c}{a + b + 7c} = \frac{p^2}{6p^2 + 3mn},$$

所以

$$M = \frac{a}{7a + b + c} + \frac{b}{a + 7b + c} + \frac{c}{a + b + 7c}$$

$$= \frac{m^2}{6m^2 + 3np} + \frac{n^2}{6n^2 + 3mp} + \frac{p^2}{6p^2 + 3mn}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{m^2}{2m^2 + np} + \frac{n^2}{2n^2 + mp} + \frac{p^2}{2p^2 + mn} \right)$$

$$= \frac{1}{3(2m^2 + np)(2n^2 + mp)(2p^2 + mn)} \cdot$$

$$[m^2(2n^2 + mp)(2p^2 + mn) + n^2(2m^2 + np)(2p^2 + mn) + p^2(2m^2 + np)(2n^2 + mp)]$$

$$= \frac{1}{3(2m^2 + np)(2n^2 + mp)(2p^2 + mn)} \cdot$$

$$[12m^2n^2p^2 + mnp(m^3 + n^3 + p^3) + 4(m^3n^3 + n^3p^3 + m^3p^3)]$$

$$= \frac{1}{3(2m^2 + np)(2n^2 + mp)(2p^2 + mn)} \cdot$$

$$[15m^2n^2p^2 + 4(m^3n^3 + n^3p^3 + m^3p^3)],$$

$$\text{又 } (2m^2 + np)(2n^2 + mp)(2p^2 + mn)$$

$$\begin{aligned}
 &= 9m^2n^2p^2 + 2mnp(m^3 + n^3 + p^3) + 4(m^3n^3 \\
 &\quad + n^3p^3 + m^3p^3) \\
 &= 15m^2n^2p^2 + 4(m^3n^3 + n^3p^3 + m^3p^3),
 \end{aligned}$$

所以 $M = \frac{1}{3}$, 为定值.

解法 2 (315700 浙江省象山中学 杨育池 提供)

因为 a, b, c 满足 $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$, 由题意知 a, b, c 至多有一数为 0.

当 a, b, c 中一数为 0 时, 则另两数互为相反数, 故 $M = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

当 $abc \neq 0$ 时, 则由 $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$, 可得 $a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = -c$, 即 $a + b + c = 3\sqrt[3]{abc}$, 故 $\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} = 3$.

又 $(7a + b + c)(a + 7b + c)(a + b + 7c) \neq 0$, 则 $(6a + 3\sqrt[3]{abc})(6b + 3\sqrt[3]{abc})(6c + 3\sqrt[3]{abc}) \neq 0$, 即

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} + \frac{1}{2}\right) \neq 0.$$

记 $\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = u, \sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}} = v, \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} = w$, 则 $u + v + w = 3, uvw = 1$, 故

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{2v+1} + \frac{1}{2w+1} \\
 &= \frac{2(u+v+1)}{4uv+2(u+v)+1} + \frac{1}{2w+1} \\
 &= \frac{2(4-w)}{\frac{4}{w}+2(3-w)+1} + \frac{1}{2w+1} \\
 &= \frac{2w(4-w)}{4+7w-2v^2} + \frac{1}{2w+1} \\
 &= \frac{2w(4-w)}{(1+2w)(4-w)} + \frac{1}{2w+1} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\text{又 } \frac{a}{7a+b+c} = \frac{a}{6a+3\sqrt[3]{abc}} = \frac{u}{3(2u+1)} =$$

$$\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2u+1}\right),$$

同理:

$$\frac{b}{a+7b+c} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2v+1}\right),$$

$$\frac{c}{a+b+7c} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2w+1}\right),$$

故三式累加, 得

$$M = \frac{1}{6}\left[3 - \left(\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{2v+1} + \frac{1}{2w+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}.$$

因此, $M = \frac{a}{7a+b+c} + \frac{b}{a+7b+c} + \frac{c}{a+b+7c}$ 的值恒为 $\frac{1}{3}$.

解法 3 (271400 山东省泰安市宁阳第一中学 刘才华 提供)

设 $\sqrt[3]{a} = x, \sqrt[3]{b} = y, \sqrt[3]{c} = z$, 则 $x + y + z = 0$,

$$\begin{aligned}
 7a + b + c &= 7x^3 + y^3 + z^3 \\
 &= 7x^3 + (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\
 &= 7x^3 + (y+z)[(y+z)^2 - 3yz] \\
 &= 7x^3 - x(x^2 - 3yz) = 6x^3 + 3xyz,
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{a}{7a+b+c} = \frac{x^3}{6x^3+3xyz} = \frac{x^2}{3(2x^2+yz)}.$$

又 $2x^2 + yz = 2(y+z)^2 + yz = (2y+z)(y+2z) = (y-x)(z-x)$, 所以

$$\frac{a}{7a+b+c} = \frac{x^2}{3(y-x)(z-x)}.$$

同理可得:

$$\frac{b}{a+7b+c} = \frac{y^2}{3(x-y)(z-y)},$$

$$\frac{c}{a+b+7c} = \frac{z^2}{3(x-z)(y-z)}.$$

所以

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{a}{7a+b+c} + \frac{b}{a+7b+c} + \frac{c}{a+b+7c} \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{(y-x)(z-x)} + \frac{y^2}{(x-y)(z-y)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z^2}{(x-z)(y-z)} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^2(z-y) + y^2(x-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z^2}{(x-z)(y-z)} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{(x^2 - y^2)z - xy(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z^2}{(x-z)(y-z)} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{-z^2 - xy}{(y-z)(z-x)} + \frac{z^2}{(x-z)(y-z)} \right] \\
 &= \frac{2z^2 + xy}{3(x-z)(y-z)} = \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$

故为定值.

374. 一盒中装有红色和蓝色纸牌各 10 张, 每色纸牌都含标数为 $1, 3, 3^2, \dots, 3^9$ 的牌各一张, 两色纸牌的标数总和记为 S . 对于给定的正整数 n ,

若能从盒中取出若干张牌,使其标数之和恰为 n ,便称为一种取牌 n -方案,不同的 n -方案种数记为 $f(n)$. 试求 $P = f(1) + f(2) + \cdots + f(1000)$ 的值.

(215500 江苏省常熟市中学 查正开 供题)

解法 1 (246004 安徽省安庆市第一中学高三(15)班 刘毅 提供)

由条件知 $f(1) = 2, f(2) = 1$.

对于给定的正整数 n ,可以唯一表示为

$$n = a_0 \cdot 3^0 + a_1 \cdot 3^1 + a_2 \cdot 3^2 + \cdots + a_k \cdot 3^k,$$

其中 $a_i = 0, 1, 2 (i = 0, 1, 2, \cdots, k)$.

所以,

$$3n = a_0 \cdot 3^1 + a_1 \cdot 3^2 + a_2 \cdot 3^3 + \cdots + a_k \cdot 3^{k+1}.$$

$$\text{于是可得: } f(3n) = f(n), f(3n+1) = 2f(3n) = 2f(n), f(3n+2) = f(3n) = f(n).$$

所以

$$f(3n) + f(3n+1) + f(3n+2) = 4f(n).$$

记 $T_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, 则

$$\begin{aligned} T_{3n+2} &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(3n+2) \\ &= f(1) + f(2) + 4[f(1) + f(2) + \cdots + f(n)] \\ &= 4T_n + 3, \end{aligned}$$

$$T_{3n+1} = T_{3n+2} - f(3n+2) = 4T_n + 3 - f(n),$$

$$T_{3n} = T_{3n+1} - f(3n+1) = 4T_n + 3 - 3f(n),$$

于是

$$P = f(1) + f(2) + \cdots + f(1000)$$

$$= T_{1000} = 4T_{333} + 3 - f(333)$$

$$= 4[4T_{111} + 3 - 3f(111)] + 3 - f(111)$$

$$= 16T_{111} - 13f(111) + 15$$

$$= 16[4T_{37} + 3 - 3f(37)] - 13f(37) + 15$$

$$= 64T_{37} - 61f(37) + 63$$

$$= 64[4T_{12} + 3 - f(12)] - 61 \times 2f(12) + 63$$

$$= 256T_{12} - 186f(12) + 255$$

$$= 256[4T_4 + 3 - 3f(4)] - 186f(4) + 255$$

$$= 1024T_4 - 954f(4) + 1023$$

$$= 1024[4T_1 + 3 - f(1)] - 954 \times 2f(1) + 1023$$

$$= 1024 \times (4 \times 2 + 3 - 2) - 954 \times 2 \times 2 + 1023 = 6423.$$

解法 2 (315700 浙江省象山中学 杨育池 提供)

因为 $3^j (j \in \mathbb{N})$ 的 3 进制表示为 $(\underbrace{10 \cdots 0}_j)_3$. 又

任何一个正整数 n 在 3 进制下的表示唯一, 且若

其第 $j+1$ 位上的数字为 1, 则对应从标有 3^j 的红色或蓝色纸牌中取 1 张, 有 2 种取法; 若其第 $j+1$ 位上的数字为 2, 则对应同时取标有 3^j 的红色与蓝色纸牌, 只有 1 种取法; 若其第 $j+1$ 位上的数字为 0, 则表示不取任何牌, 也只有 1 种取法.

又 $1000 = (1101001)_3$, 则

(1) 当 n 为 3 进制下的 $m (1 \leq m \leq 6)$ 位数时, 则其首位可取 1 或 2, 有 3 种取法; 设首位后的 $m-1$ 个数位上有 $k (0 \leq k \leq m-1)$ 个 2, 则 2 的取法有 C_{m-1}^k 种; 余下的 $m-k-1$ 个数位上分别取 0 或 1, 则对应的取法有 $C_{m-k-1}^0 + 2C_{m-k-1}^1 + 2^2 \cdot C_{m-k-1}^2 + \cdots + 2^{m-k-1} \cdot C_{m-k-1}^{m-k-1} = (2+1)^{m-k-1} = 3^{m-k-1}$ 种. 因此, 由分步计数原理, 对每一个这样的 m , 取法种数为 $3C_{m-1}^k \cdot 3^{m-k-1} = C_{m-1}^k \cdot 3^{m-k}$, 故 n 为不超过 6 位的 3 进制数的 n -方案总数共有

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{n=1}^{728} f(n) = \sum_{m=1}^6 \left[\sum_{k=0}^{m-1} (3^{m-k} \cdot C_{m-1}^k) \right] \\ &= 3 \sum_{m=1}^6 (3+1)^{m-1} = 4^6 - 1 \text{ 种}. \end{aligned}$$

(2) 当 n 为 3 进制下的 7 位数时, 则其首 2 位的取法分为 2 类:

① 首 2 位为 10 时, 首 2 位的取法有 2 种; 设后 5 位中有 $i (0 \leq i \leq 5)$ 个 2, 则有 C_5^i 种取法; 余下数位上取 0 或 1, 故共 $2C_5^i (C_{5-i}^0 + 2C_{5-i}^1 + 2^2 \cdot C_{5-i}^2 + \cdots + 2^{5-i} \cdot C_{5-i}^{5-i}) = 2 \times 3^{5-i} \cdot C_5^i$ 种, 故这样的 n -方案总数

$$\begin{aligned} N_2 &= \sum_{n=729}^{971} f(n) = 2 \sum_{i=0}^5 (3^{5-i} C_5^i) \\ &= 2 \times 4^5 = 2^{11} \text{ 种}. \end{aligned}$$

② 首 2 位为 11, 则前 3 位为 110, 取法有 $2 \times 2 = 4$ 种;

若第 4 位为 0, 则后 3 位可分别取 $p (0 \leq p \leq 3)$ 个 2, 则共有 $C_3^0 (C_3^0 + 2C_3^1 + 2^2 C_3^2 + 2^3 C_3^3) + C_3^1 (C_2^0 + 2C_2^1 + 2^2 C_2^2) + C_3^2 (C_1^0 + 2C_1^1) + C_3^3 = 2^6$ 种;

若第 4 位为 1, 有 2 种取法, 则最后一位可取 0 或 1, 共 3 种取法.

故符合要求的 n -方案总数 $N_3 = 4 \times (2^6 + 2 \times 3) = 280$ 种.

所以, 由分类计数原理, 得

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^{1000} f(n) = (4^6 - 1) + 2^{11} + 280 \\ &= 6423. \end{aligned}$$

解法 3 (410000 湖南广益实验中学 刘肖潇 提供)

注意到 $1000 = 1 + 3^3 + 3^5 + 3^6$, 所以, 当 $n \leq 1000$ 时, 符合要求的 n —方案中, 标数大于 3^6 的纸牌不能出现, 标数为 3^6 的纸牌最多出现一张.

(1) 当所取纸牌的标数不大于 3^5 时, 在两种颜色的 $1, 1, 3, 3, \dots, 3^5, 3^5$ 这 12 张牌中任取 k 张, 它们的标数之和 $S \leq 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^5) = 3^6 - 1 < 1000$, 于是可得

$$f(1) + f(2) + \dots + f(3^6 - 1) \\ = C_{12}^1 + C_{12}^2 + \dots + C_{12}^{12} = 2^{12} - 1 = 4095;$$

(2) 当所取纸牌中有一张标数为 3^6 且不出现标数 3^5 时, 注意到两种颜色的 $1, 1, 3, 3, \dots, 3^4, 3^4$ 这 10 张牌的标数之和 $2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^4) = 3^5 - 1, 3^6 + 3^5 - 1 = 971$, 于是可得

$$f(3^6) + f(3^6 + 1) + \dots + f(971) \\ = C_2^1 \cdot (C_{10}^0 + C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}) = 2^{11} = 2048.$$

(3) 当所取纸牌中同时出现标数 3^6 和 3^5 (各一张), 但不出现标数 3^3 , 注意到两种颜色的 $1, 1, 3, 3, 3^2, 3^2$ 这 6 张牌的标数之和 $2 \cdot (1 + 3 + 3^2) = 3^3 - 1, 3^6 + 3^5 + 3^3 - 1 = 998$, 于是可得

$$f(972) + f(973) + \dots + f(998) \\ = C_2^1 C_2^1 (C_6^0 + C_6^1 + \dots + C_6^6) = 2^8 = 256;$$

(4) 当所取纸牌中同时出现标数 $3^6, 3^5$ 和 3^3 (各一张), 于是可得

$$f(999) + f(1000) \\ = C_2^1 C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 = 24.$$

综上可得:

$$P = f(1) + f(2) + \dots + f(1000) \\ = 4095 + 2048 + 256 + 24 = 6423.$$

375. 已知正数 a, b, c 满足 $a + b + c = 3$, 求证:

$$\left(\frac{3}{a} - 2\right)\left(\frac{3}{b} - 2\right)\left(\frac{3}{c} - 2\right) \leq \frac{3\sqrt{(abc)^2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(712000 陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心 安振平 供题)

证明 (430022 湖北省武汉外国语学校高三(3)班 王思睿 提供)

因为 $a + b + c = 3$, 所以

$$\left(\frac{3}{a} - 2\right)\left(\frac{3}{b} - 2\right)\left(\frac{3}{c} - 2\right) \\ = \left(\frac{a+b+c}{a} - 2\right)\left(\frac{a+b+c}{b} - 2\right)\left(\frac{a+b+c}{c} - 2\right) \\ = \frac{1}{abc}(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

因为 a, b, c 为正数, 不妨设 $a \geq b \geq c$, 则 $a +$

$b - c > 0, c + a - b > 0$, 若 $b + c - a \leq 0$, 不等式显然成立.

若 $b + c - a > 0$, 则 a, b, c 构成一个三角形的三边长, 应用三角形的面积公式可得

$$S = \frac{1}{4} \cdot$$

$$\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

又 $S = \frac{abc}{4R}$, 其中 R 为三角形的外接圆的半径, 故

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \\ = \left(\frac{abc}{R}\right)^2,$$

于是可得

$$\left(\frac{3}{a} - 2\right)\left(\frac{3}{b} - 2\right)\left(\frac{3}{c} - 2\right) \\ = \frac{1}{3abc} \cdot \left(\frac{abc}{R}\right)^2 = \frac{abc}{3R^2}.$$

因此, 要证原不等式, 只需证

$$\frac{abc}{3R^2} \leq \frac{3\sqrt{(abc)^2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

又由 $a + b + c = 3$ 及均值不等式可得 $abc \leq 1$, 于是, 只需证:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}.$$

不妨设 C 为锐角, 则

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \\ = 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1 \\ = -2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1 \\ \geq -2\cos C + 2\cos^2 C - 1 \\ = 2\left(\cos C - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2},$$

当且仅当 $A = B = C$ 时取等号.

故原不等式获证, 当且仅当 $a = b = c = 1$ 时取等号.

2019 年第 1 期问题

381. 已知实数 x, y 满足 $3x^2 + 17xy + 12y^2 = 58$, 求 $P = x + 2y + 3xy$ 的最大值.

(237005 安徽省六安第二中学 陶兴红 供题)

382. 已知非负实数 x, y, z 满足 $\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} +$

$\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}+\sqrt{1-\frac{z^2}{36}}=2$, 求 $M=3xy+yz+2zx$ 的最大值.

(314300 浙江省元济高级中学 奚青伟 供题)

383. 设 S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 求证:

$$\frac{bc}{\tan A} + \frac{ca}{\tan B} + \frac{ab}{\tan C} \geq 4S.$$

(712000 陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心 安振平 供题)

384. 已知 a, b, c 是大于 -1 的实数, 求证:

$$\frac{1+a^2}{1+a+b^2} + \frac{1+b^2}{1+b+c^2} + \frac{1+c^2}{1+c+a^2} \geq 2.$$

(246700 安徽省枞阳县宏实中学 江保兵 供题)

385. 设正数 a, b, c 满足 $a+b+c=3$, 证明:

$$\frac{a^2}{a+3b^4} + \frac{b^2}{b+3c^4} + \frac{c^2}{c+3a^4} \geq \frac{3}{4}.$$

(621000 四川省绵阳东辰学校高中部 姚先伟 供题)

(上接第 60 页)

例 3 某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位: m), 如图 3, 垂直放置的标杆 BC 的高度 $h=4$ m, 仰角 $\angle ABE=\alpha$, $\angle ADE=\beta$. 该小组分析若干测得的数据后, 认为适当调整标杆到电视塔的距离 d (单位: m), 使 α 与 β 之差较大, 可以提高测量精确度. 若电视塔的实际高度为 125 m, 试问 d 为多少时, $\alpha-\beta$ 最大?

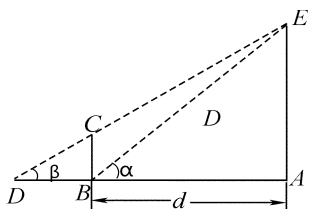


图 3

解析 由题设知 $d=AB$, 得 $\tan \alpha = \frac{H}{d}$.

由 $AB=AD-BD=\frac{H}{\tan \beta}-\frac{h}{\tan \beta}$, 得 $\tan \beta = \frac{H-h}{d}$, 所以

$$\begin{aligned} \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{H}{d} - \frac{H-h}{d}}{1 + \frac{H}{d} \cdot \frac{H-h}{d}} = \frac{h}{d + \frac{H(H-h)}{d}} \leq \frac{h}{2\sqrt{H(H-h)}}, \end{aligned}$$

当且仅当 $d = \frac{H(H-h)}{d}$, $d = \sqrt{H(H-h)}$

$= 55\sqrt{5}$ 时, 等式成立.

所以, 当 $d = 55\sqrt{5}$ 时, $\tan(\alpha-\beta)$ 最大.

因为 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以,

当 $d = 55\sqrt{5}$ 时, $\alpha - \beta$ 最大.

本题是江苏省 2010 年的高考试题, 也是米勒问题为背景的实际应用的一个典型案例. 实际上, 在工程测量和其他测量工作中, 米勒问题起着重要的理论价值和实际的指导意义. 当然, 生活中的米勒问题还有其他的表现形式, 如米勒问题与足球: 足球比赛场的宽度为 a 米, 球门宽为 b 米, 在足球比赛中, 甲方边锋沿球场边线, 带球过人沿直线向前推进. 试问: 该边锋在距乙方底线多远时起脚射门时命中率最大? 等等, 只要细心观察, 像这样的以米勒问题为背景的问题比比皆是, 就不再一一列举了.

综合以上例子可以看出, 许多数学试题都有着其特定的命题背景, 蕴含着浓厚的历史气息. 与此同时, 通过对米勒问题背景下的平面几何问题、解析几何问题、实际应用问题进行梳理也不难发现, 很多问题看上去毫不相干, 但试题的背后却有着相同的背景, 可以用相同或类似的方法加以处理. 我想, 对于我们每一个高三学生而言, 在高三高强度的训练下, 要多思考怎样的训练才是有效的. 我以为, 善于归类整理是一个有效的途径. 一题多解固然重要, 但更重要的是多题归一, 将解题过程算法化, 形成相应的微专题和解题模块, 这样才能有效提升我们高三复习的效率.

(收稿日期: 2018-09-15)

