



圆锥曲线中档解答题 100 道

题 1 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 M 到其焦点的距离为 3, 到 y 轴的距离为 2.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若不过原点 O 的直线 $l: y = x + m$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 求实数 m 的值.

题 2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且经过点 $T(1, \frac{3}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 求椭圆 C 上的点到直线 $l: y = 2x$ 的距离的最大值.



题 3 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{2}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

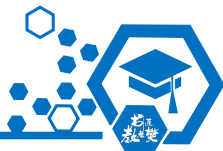
(1) 求 C 的标准方程;

(2) 若 $A(-\frac{5}{2}, 0)$, 直线 $l: x = ty + \frac{3}{2} (t > 0)$ 交椭圆 C 于 E, F 两点, 且 $\triangle AEF$ 的面积为 $\frac{\sqrt{46}}{2}$, 求 t 的值.

题 4 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p \text{ 为常数}, p > 0)$ 的焦点 F 与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点重合, 过点 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) 若直线 AB 的斜率为 1, 求 $|AB|$.



题 5 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的其中一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$, 一条渐近线方程为 $2x - y = 0$

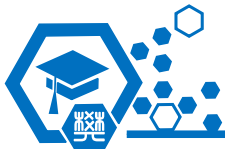
(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 已知倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线 l 与双曲线 C 交于 A, B 两点, 且线段 AB 的中点的纵坐标为 4, 求直线 l 的方程.

题 6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其中左焦点 $F(-2, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若直线 $y = x + m$ 与椭圆 C 交于不同的两点 A, B , 且线段的中点 M 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 求 m 的值.



题7 已知曲线 C 上任意一点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离比它到直线 $l: x=-1$ 的距离大1.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $l: x+my-8=0$ 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求证: $OA \perp OB$.

题8 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $P(2, \sqrt{6})$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若直线 m 过椭圆 E 的右焦点和上顶点, 直线 l 过点 $M(2,1)$ 且与直线 m 平行. 设直线 l 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 求 AB 的长度.



题 9 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F(2, 0)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 直线 $l: y = x + m$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABO$ 面积为 $\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.

题 10 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点与双曲线 $E: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点重合, 双曲线 E 的渐近线方程为 $x \pm \sqrt{3}y = 0$.

- (1) 求抛物线 C 的标准方程和双曲线 E 的标准方程.
- (2) 斜率为 2 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 与 x 轴交于点 P , 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 求 $|AB|$.



题 11 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(0, 2)$, $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y = x - 2$ 交椭圆 C 于 A, B 两点, O 是坐标原点, 求 $\triangle AOB$ 的面积 S .

题 12 设双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线被 E 截得的弦长为 $\frac{10}{3}$, $|F_1F_2| = 2\sqrt{14}$, 过原点且斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 的直线 l 交 E 于 B, C 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 求四边形 F_1BF_2C 的面积.



题 13 已知椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$, 焦点是 $(-3, 0)$ 和 $(3, 0)$,

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 若直线 L (不过原点) 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M , 求直线 AB 与直线 OM 的斜率乘积 $k_{OM} \cdot k_{AB}$ 的值.

题 14 已知双曲线的中心在原点, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 离心率等于 3, 且经过点 $(-3, 8)$, 直线 $y = 3x + 2$ 与双曲线交于点 A, B .

- (1) 求双曲线的标准方程;
- (2) 求 $\triangle F_1AB$ 的面积.



题 15 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $F(-\frac{4}{3}, 0)$ 作斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线交椭圆 C 于 P, Q 两点, 求弦 PQ 中点坐标.

题 16 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $F(0, 1)$, P 为动点, 以 PF 为直径的圆与 x 轴相切, 记 P 的轨迹为 Γ .

(1) 求 P 的方程;

(2) 设 M 为直线 $y = -1$ 上的动点, 过 M 的直线与 Γ 相切于点 A , 过 A 作直线 MA 的垂线交 Γ 于点 B , 求 $\triangle MAB$ 面积的最小值.

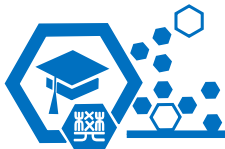


题 17 已知点 $A(-2,0)$, $B(0,-1)$, 直线 l 过点 $P(0,1)$,

- (1) 若 A 到直线 l 距离为 2, 求直线 l 的方程;
- (2) 若 A 、 B 到直线 l 距离相等, 求直线 l 的方程.

题 18 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 2, 焦点到一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

- (1) 求双曲线 C 的方程;
- (2) 若过双曲线的左焦点 F 的直线 l 交双曲线于 A, B 两点, 交 y 轴于 P , 设 $\overrightarrow{PF} = m\overrightarrow{FA} = n\overrightarrow{FB}$, 证明: $m + n = -\frac{8}{3}$.

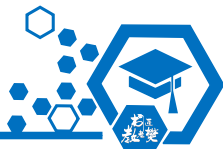


题 19 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A, B 分别为椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的左焦点和右焦点, 且三个内角 A, B, C 满足关系式 $\sin B - \sin A = \frac{1}{2} \sin C$.

- (1) 求线段 AB 的长度;
- (2) 求顶点 C 的轨迹方程.

题 20 已知抛物线 $\Gamma: y^2 = 2x$, A, B, M, N 为抛物线 Γ 上四点, 点 T 在 y 轴左侧, 满足 $\overrightarrow{TA} = 2\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{TB} = 2\overrightarrow{TN}$.

- (1) 求抛物线 Γ 的准线方程和焦点坐标;
- (2) 设线段 AB 的中点为 D . 证明: 直线 TD 与 y 轴垂直;



题 21 已知点 $F(1,0)$, 直线 $l: x = -2$, P 为 y 轴右侧或 y 轴上动点, 且点 P 到 l 的距离比线段 PF 的长度大 1, 记点 P 的轨迹为 E .

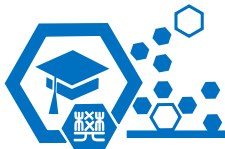
(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 已知直线 $l_1: x = 1$ 交曲线 E 于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的上方), C, D 为曲线 E 上两个动点, 且 $\angle CAB = \angle DAB$, 求证: 直线 CD 的斜率为定值.

题 22) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 C 的顶点是原点, 以 x 轴为对称轴, 且经过点 $P(1, 2)$.

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 设点 A, B 在抛物线 C 上, 直线 PA, PB 分别与 y 轴交于点 M, N , $|PM| = |PN|$. 求直线 AB 的斜率.



题 23 已知圆 $F: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 动点 $M(x, y) (x \geq 0)$, 线段 FM 与圆 F 交于点 I , $MH \perp y$ 轴, 垂足为 H , $|MI| = |MH|$, 设动点 M 形成的轨迹为曲线 C .

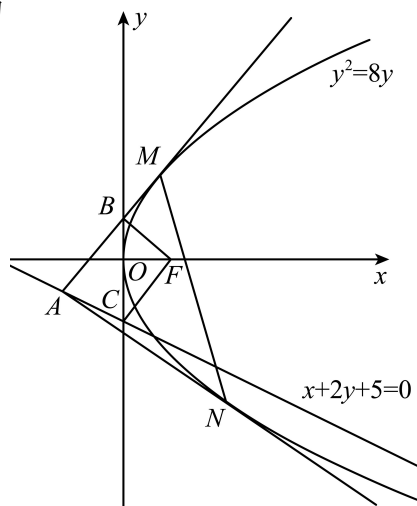
(I) 求曲线 C 的轨迹方程, 并证明斜率为 -2 的一组平行直线与曲线 C 相交形成的弦的中点在一条直线上;

(II) 曲线 C 上存在关于直线 $l: x - 2y - 3 = 0$ 对称的相异两点 A 和 B , 求线段 AB 的中点 D 的坐标.

题 24 过直线 $x + 2y + 5 = 0$ 上一动点 A (A 不在 y 轴上) 作焦点为 $F(2, 0)$ 的抛物线 $y^2 = 2px$ 的两条切线, M, N 为切点, 直线 AM, AN 分别与 y 轴交于点 B, C .

(1) 求证: $BF \perp AM$, 并求 $\triangle ABC$ 的外接圆面积的最小值;

(2) 求证: 直线 MN 恒过一定点.



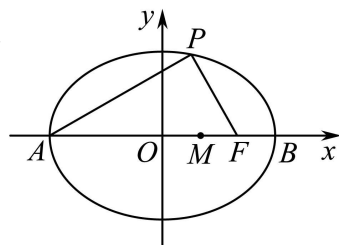


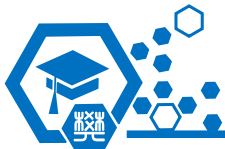
题 25 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点为 $F(1, 0)$, 且过点 $A(-2, 0)$.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 点 P, Q 分别在 C 和直线 $x = 4$ 上, $OQ \parallel AP$, M 为 AP 的中点, 求证: 直线 OM 与直线 QF 的交点在某定曲线上.

题 26 如图, 点 A, B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 长轴的左、右端点, 点 F 是椭圆的右焦点, 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方, $PA \perp PF$.

- (1) 求点 P 的坐标;
- (2) 设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点, M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$, 求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.





题 27 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(4,0)$, $B(1,0)$, 动点 P 满足 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 6|\overrightarrow{PB}|$

(1) 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 若直线 $y = x + b (b > 0)$ 与轨迹 C 相交于 M, N 两点, 直线 $y = x - b$ 与轨迹 C 相交于 P, Q 两点, 顺次连接 M, N, P, Q 得到的四边形 $MNPQ$ 是菱形, 求 b .

题 28 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点 Q (异于顶点) 与双曲线两顶点连线的斜率之积为 $\frac{1}{9}$, E 在双曲线 C 上, F 为双曲线 C 的右焦点, $|EF|$ 的最小值为 $\sqrt{10} - 3$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 过椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > n > 0)$ 上任意一点 P (P 不在 C 的渐近线上) 分别作平行于双曲线两条渐近线的直线, 交两渐近线于 M, N 两点, 且 $|PM|^2 + |PN|^2 = 5$, 是否存在 m, n 使得椭圆的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$? 若存在, 求出椭圆的方程, 若不存在, 说明理由.



题 29 已知点 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 且 F 到准线 l 的距离为 2.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) 若点 P 在抛物线上, 且在第一象限, 其横坐标为 4, 过点 F 作直线 PF 的垂线交准线 l 于点 Q .

证明: 直线 PQ 与抛物线 C 只有一个交点.

题 30 已知椭圆 C 的焦点在 x 轴上, 中心在原点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $l: y = x + 2$ 与以原点为圆心, 椭圆 C 的短半轴为半径的圆 O 相切.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设椭圆 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点 M 是椭圆上异于 A_1, A_2 的任意一点, 直线 MA_1, MA_2 的斜率分别为 k_{MA_1}, k_{MA_2} . 证明: $k_{MA_1} \cdot k_{MA_2}$ 为定值.



题 31 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 是椭圆上的一点, $AF_2 \perp F_1F_2$, 原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\frac{1}{3}|OF_1|$.

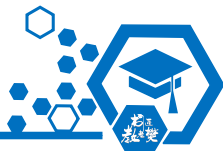
(1) 求椭圆 E 的离心率;

(2) 平面上点 B 满足 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF_1} + \overrightarrow{AF_2}$, 过 F_1 与 AB 平行的直线交 E 于 M, N 两点, 若 $|MN| = 3\sqrt{2}$, 求椭圆 E 的方程.

题 32 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 过 F_2 的直线与椭圆 C 交于 M, N 两点, 且 $\triangle MNF_1$ 的周长为 8, $\triangle MF_1F_2$ 的最大面积为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 $b > 1$, 是否存在 x 轴上的定点 P , 使得 $\triangle PMN$ 的内心在 x 轴上, 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.



题 33 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$, A, B 分别是椭圆 C 的左、右顶点, P 为椭圆 C 的上顶点, $\triangle PAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N , 点 $Q(2, 0)$, 若直线 MQ 的斜率与直线 NQ 的斜率互为相反数, 求证: 直线 l 过定点.

题 34 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 4, 且过点 $(-3, 2\sqrt{6})$.

- (1) 求双曲线方程;
- (2) 若直线 $l: y = kx + 2$ 与双曲线 C 有且只有一个公共点, 求实数 k 的值.



题 35 设椭圆 $\frac{x^2}{m^2+1} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的两个焦点分别是 F_1, F_2 , M 是椭圆上任意一点, $\triangle F_1MF_2$ 的周长为 $2 + 2\sqrt{2}$.

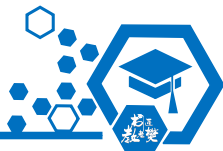
(1) 求椭圆的方程;

(2) 过椭圆在 y 轴负半轴上的顶点 B 及椭圆右焦点 F_2 作一直线交椭圆于另一点 N , 求 $\angle F_1NB$ 的正切值.

题 36 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 且点 $T(1, \frac{3}{2})$ 在 E 上.

(1) 求 E 的方程;

(2) 已知过定点 $M(0, m)$ 的动直线 l 交 E 于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 N , 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 为定值, 试求 m 的值.



题 37 已知 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$ 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, A 为双曲线在第一象限的点, $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆与 x 轴交于点 $P(1, 0)$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上任意一点 Q 处的切线 l , 若 l 与双曲线 C 左、右两支分别交于点 M 、 N , 问: $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$ 是否为定值? 若是, 求出此定值; 若不是, 说明理由.

题 38 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $l: x = my + n$ 与 C 交于 A, B 两点, 且当 $m = 2, n = -1$ 时, $|AB| = 4\sqrt{15}$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若 $AF \perp BF$, 求 $\triangle ABF$ 面积的最小值.

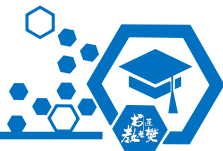


题 39 已知双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 虚轴长为 $2\sqrt{3}$, 点 $A(2, 3)$ 在曲线 C 上.

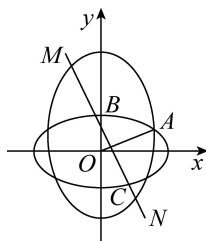
- (1) 求双曲线 C 的离心率;
- (2) 过原点 O 的直线与双曲线 C 交于 S, T 两点, 已知直线 AS 和 AT 的斜率存在. 证明: 直线 AS 和 AT 的斜率之积为定值.

题 40 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 下顶点为 B_1 , 上顶点为 B_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 且 $\overrightarrow{FB_1} \cdot \overrightarrow{FB_2} = -2$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 设椭圆 C 的右顶点为 A , 椭圆 C 上有一点 P (不与 A 重合), 直线 PF 与直线 $x = 2$ 相交于 M . 若 $|AM| = \sqrt{3}$, 求点 P 的横坐标.



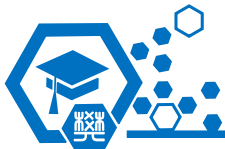
题 41 如图,椭圆 $W: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距与椭圆 $\Omega: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的短轴长相等,且 W 与 Ω 的长轴长相等,这两个椭圆的在第一象限的交点为 A ,直线 l 经过 Ω 在 y 轴正半轴上的顶点 B 且与直线 OA (O 为坐标原点) 垂直, l 与 Ω 的另一个交点为 C , l 与 W 交于 M, N 两点.



(1) 求 W 的标准方程;

(2) 求 $\frac{|BC|}{|MN|}$.

题 42 已知抛物线 $y^2 = x + 1$, 定点 $A(3, 1)$, B 为抛物线上任意一点, 点 P 在线段 AB 上, 且有 $BP:PA = 1:2$, 当点 B 在抛物线上变动时, 求点 P 的轨迹方程, 并指出这个轨迹为那种曲线.



题 43 在平面直角坐标系中,动点 C 到点 $F(1,0)$ 的距离与到直线 $x=-1$ 的距离相等.

(1) 求动点 C 的轨迹方程;

(2) 若直线 $l: y = x + m$ 与动点 C 的轨迹交于 P, Q 两点,当 $\triangle PQF$ 的面积为 2 时,求直线 l 的方程.

题 44 已知 $A(-2,0), B(2,0)$ 为椭圆 C 的左、右顶点, F 为其右焦点, P 是椭圆 C 上异于 A, B 的动点,且 $\triangle APB$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$.

(I) 求椭圆 C 的方程及离心率;

(II) 直线 AP 与椭圆在点 B 处的切线交于点 D ,当直线 AP 绕点 A 转动时,试判断以 BD 为直径的圆与直线 PF 的位置关系,并加以证明.



题 45 在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 M 在椭圆 C 上且 $MF_2 \perp x$ 轴, 直线 MF_1 交 y 轴于 H 点, $OH = \frac{\sqrt{2}}{4}$, Q 为椭圆 C 的上顶点, $\triangle F_1F_2Q$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过 F_1 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B , 且满足 $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}|$, 求 $\triangle ABO$ 的面积.

题 46 在平面直角坐标系 xOy 中: ①已知点 $A(\sqrt{3}, 0)$, 直线 $l: x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 动点 P 满足到点 A 的距离与到直线 l 的距离之比 $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ②已知点 S, T 分别在 x 轴, y 轴上运动, 且 $|ST| = 3$, 动点 P 满 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OT}$; ③已知圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 直线 l 为圆 C 的切线, 记点 $A(\sqrt{3}, 0), B(-\sqrt{3}, 0)$ 到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2 , 动点 P 满足 $|PA| = d_1, |PB| = d_2$.

(1) 在①, ②, ③这三个条件中任选一个, 求动点 P 的轨迹方程;

(2) 记 (1) 中动点 P 的轨迹为 E , 经过点 $D(1, 0)$ 的直线 l' 交 E 于 M, N 两点, 若线段 MN 的垂直平分线与 y 轴相交于点 Q , 求点 Q 纵坐标的取值范围.



题 47 在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右顶点分别为 $P(-\sqrt{6}, 0)$ 、

$Q(\sqrt{6}, 0)$, 且椭圆上任意一点 M (异于 P, Q) 满足直线 $k_{PM} \cdot k_{QM} = -\frac{1}{3}$.

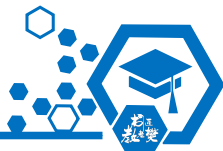
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l: x - my + 2 = 0 (m \in \mathbb{R})$ 与椭圆 C 交于不同的两点 A, B , 求 $(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PO}) \cdot (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QB})$ 的取值范围.

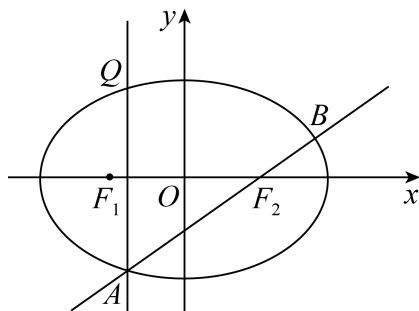
题 48 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 3 倍, 且椭圆 C 经过点 $(1, \frac{2\sqrt{2}}{3})$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设 A 是椭圆 C 的右顶点, P, Q 是椭圆 C 上不同的两点, 直线 AP, AQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 k_2 = \frac{1}{3}$. 过 A 作 $AB \perp PQ$, 垂足为 B , 试问是否存在定点 M , 使得线段 BM 的长度为定值? 若存在, 求出该定点; 若不存在, 请说明理由.



题 49 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 过椭圆的左、右焦点 F_1, F_2 分别作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的两条直线, 且这两条直线之间的距离为 $\sqrt{3}$.



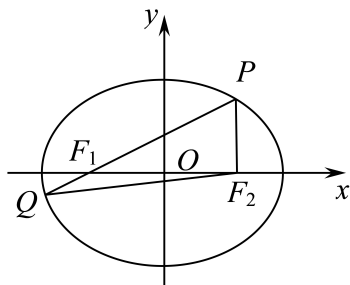
- (1) 求椭圆 E 的标准方程;
- (2) 过 F_2 与坐标轴不垂直的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点. 过点 A 作与 x 轴垂直的直线与椭圆交于点 Q , 证明: 直线 QB 过定点.

题 50 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A, P 为 C 上一点, O 为原点, $|PA| = |PO|$, $\angle APO = 90^\circ$, $\triangle APO$ 的面积为 1.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 设 B 为 C 的右顶点, 过点 $(1, 0)$ 且斜率不为 0 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 证明: $3 \tan \angle MAB = \tan \angle NBA$.



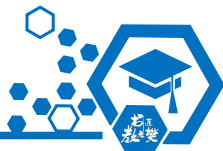
题 51 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为 C 椭圆上一点,且 PF_2 垂直于 x 轴,连结 PF_1 并延长交椭圆于另一点 Q ,设 $PQ = \lambda F_1Q$.



- (1) 若点 P 的坐标为 $(2, 3)$, 求椭圆 C 的方程及 λ 的值;
- (2) 若 $4 \leq \lambda \leq 5$, 求椭圆 C 的离心率的取值范围.

题 52 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 P , 右焦点为 F , 点 $Q(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$ 满足 $3\vec{FQ} = 2\vec{PF}$.

- (1) 判断点 Q 是否在椭圆上, 并给出理由;
- (2) 已知与线段 PQ 相交的直线 $y = kx$ 交椭圆于 M, N (不同于点 P, Q) 两点, 求四边形 $PMQN$ 面积的最大值.



题 53 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶

点, 直线 $l: y = -x + 3$ 与椭圆 E 相切于点 T .

(1) 求椭圆 E 的离心率;

(2) 求椭圆 E 的标准方程及点 T 的坐标;

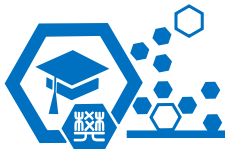
(3) 设 O 为坐标原点, 直线 l' 平行于直线 OT , 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 且与直线 l 交于点 P , 那么是否存在常数 λ , 使得 $|PT|^2 = \lambda |PA| \cdot |PB|$? 如果存在, 求出 λ 的值; 如果不存在, 请说明理由.

题 54 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过 y 轴上点 P 的直线 l 与 C 相切于点 Q , 且当 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$ 时,

$|PQ| = 2\sqrt{5}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 P 且垂直于 l 的直线交 C 于 M, N 两点, 若 R 为线段 MN 的中点, 证明: 直线 QR 过定点.



题 55 已知点 Q 是圆 $M: (x+1)^2 + y^2 = 16$ 上一动点 (M 为圆心), 点 N 的坐标为 $(1, 0)$, 线段 QN 的垂直平分线交线段 QM 于点 C , 动点 C 的轨迹为曲线 E .

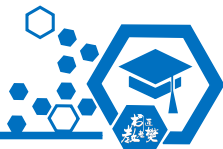
(1) 求曲线 E 的轨迹方程;

(2) 直线 l 过点 $P(4, 0)$ 交曲线 E 于点 A, B , 点 B 关于 x 的对称点为 D , 证明: 直线 AD 恒过定点.

题 56 已知 $M(-1, 0), N(1, 0), |\overrightarrow{MR}| = 2\sqrt{2}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OR}), \overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{MR}, \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{NR} = 0$, 记动点 P 的轨迹为 C .

(1) 求曲线 C 的轨迹方程.

(2) 若斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A, B , l 与 x 轴相交于 D 点, 则 $|DA|^2 + |DB|^2$ 是否为定值? 若为定值, 则求出该定值; 若不为定值, 请说明理由.



题 57 已知点 P 是直线 $y = x + 2$ 与椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的一个公共点, F_1, F_2 分别为该椭圆的左右焦点, 设 $|PF_1| + |PF_2|$ 取得最小值时椭圆为 C .

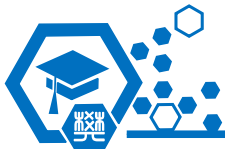
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知 A, B 是椭圆 C 上关于 y 轴对称的两点, Q 是椭圆 C 上异于 A, B 的任意一点, 直线 QA, QB 分别与 y 轴交于点 $M(0, m), N(0, n)$, 试判断 mn 是否为定值, 并说明理由.

题 58 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 点 $P(2, 3)$ 为其上一点, 且 $|PF_1| + |PF_2| = 8$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 $l: y = kx - 4$ 交椭圆 C 于 A, B 两点, 且原点 O 在以线段 AB 为直径的圆的外部, 试求 k 的取值范围.



题 59 已知曲线 E 上任意一点 Q 到定点 $F(\sqrt{14}, 0)$ 的距离与 Q 到定直线 $m: x = \frac{9\sqrt{14}}{14}$ 的距离之比为 $\frac{\sqrt{14}}{3}$.

(1) 求曲线 E 的轨迹方程;

(2) 斜率为 $k(k > \frac{\sqrt{5}}{3})$ 的直线 l 交曲线 E 于 B, C 两点, 线段 BC 的中点为 M , 点 M 在 x 轴下方, 直线 OM 交曲线 E 于点 N , 交直线 $x = -1$ 于点 D , 且满足 $|ON|^2 = |OD||OM|$ (O 为原点). 求证: 直线 l 过定点.

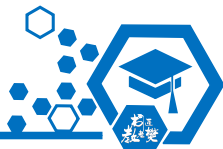
题 60 已知两圆 $C_1: (x-2)^2 + y^2 = \frac{27}{2}$, $C_2: (x+2)^2 + y^2 = \frac{3}{2}$, 动圆 M 在圆 C_1 内部且和圆 C_1 内切, 和圆 C_2 外切.

(1) 求动圆圆心 M 的轨迹方程 C ;

(2) 过点 $A(3, 0)$ 的直线与曲线 C 交于 P, Q 两点. P 关于 x 轴的对称点为 $R, F(2, 0)$,

① 证明 Q, F, R 三点共线;

② 求 $\triangle ARQ$ 面积的最大值.



题 61 已知椭圆 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 椭圆上的点到两焦点的距离和为 $2\sqrt{5}$, 点 $(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2})$ 在椭圆 L 上.

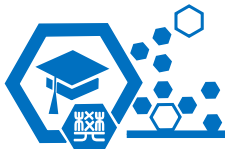
(1) 求椭圆 L 的标准方程;

(2) 过点 $P(0, 2)$ 作直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 点 E 为点 P 关于 x 轴的对称点, 求 $\triangle ABE$ 面积的最大值.

题 62 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且点 $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在 C 上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 F_1, F_2 为椭圆 C 的左, 右焦点, 过右焦点 F_2 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_1$ 内切圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求直线 l 的方程.



题 63 已知点 $A(2,2)$ 为抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px$ 上的点, B, C 为抛物线 Γ 上的两个动点, Q 为抛物线 Γ 的准线与 x 轴的交点, F 为抛物线 Γ 的焦点.

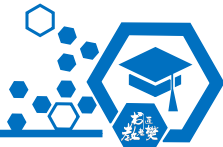
(1) 若 $\angle BOC = 90^\circ$, 求证: 直线 BC 恒过定点;

(2) 若直线 BC 过点 Q , B, C 在 x 轴下方, 点 B 在 Q, C 之间, 且 $\tan \angle BFC = \frac{24}{7}$, 求 $\triangle AFC$ 的面积和 $\triangle BFC$ 的面积之比.

题 64 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 长轴长为 4.

(1) 求椭圆 E 的方程及离心率;

(2) 过点 $M(-3,0)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 B, C , 点 B 关于 x 轴的对称点为 B' . 问: 平面内是否存在定点 P , 使得 B' 恒在直线 PC 上? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.



题 65 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 8\sqrt{2}x$ 的焦点重合, 且椭圆的四个顶点围成的四边形面积为 $8\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知点 P 是直线 $y = -4x + 20$ 上的动点, 过点 P 作椭圆 C 的两条切线, 切点分别为 M, N , 问直线 MN 是否过定点? 若是, 求出该定点; 若不是, 请说明理由.

题 66 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 其中左顶点为 A , 右顶点为 B , O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 直线 $y = x + t (t \neq 0)$ 与椭圆 E 交于不同的两点 P, Q , 直线 AP, BQ 分别与直线 $y = x$ 交于点 M, N . 求证: $|OM| \cdot |ON|$ 为定值.



题 67 在平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{2} = 0$ 交椭圆 C 于 M, N 两点, P 为 M, N 的中点, 且直线 OP 的斜率为 $\frac{1}{3}$.

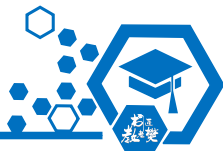
(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设另一直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

题 68 已知直线 $l: y = x + m (m \in \mathbb{R})$ 与直线 l' 关于 x 轴对称.

(1) 若直线 l 与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 8$ 相切于点 P , 求 m 的值和 P 点的坐标;

(2) 直线 l' 过抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点, 且与抛物线 C 交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.



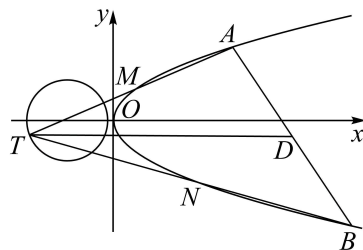
题 69 过坐标原点 O 作圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = 3$ 的两条切线, 设切点为 P, Q , 直线 PQ 恰为抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线.

(1) 求抛物线 E 的标准方程;

(2) 设点 T 是圆 C 的动点, 抛物线 E 上四点 A, B, M, N 满足: $\vec{TA} = 2\vec{TM}$, $\vec{TB} = 2\vec{TN}$, 设 AB 中点为 D .

(i) 证明: TD 垂直于 y 轴;

(ii) 设 $\triangle TAB$ 面积为 S , 求 S 的最大值.



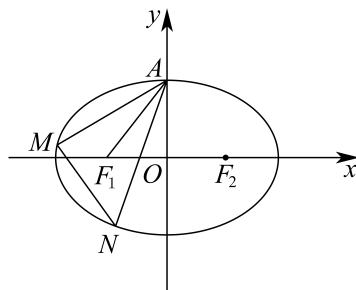
题 70 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 y 轴的一个交点为 $A(0, \sqrt{2})$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 为左、右焦点, M, N 为椭圆上的两

动点, 且 $\angle MAF_1 = \angle NAF_1$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 k_2$ 的值;

(3) 求 $\triangle AMN$ 面积的最大值.





题 71 已知 M, N 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点, F 是椭圆的右焦点, 且 $|MF|$:

$|NF| = 3:1$, 点 $(1, \frac{3}{2})$ 是 C 上一点.

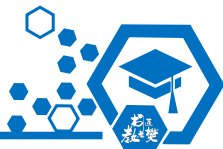
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 记过 F 的直线 l 与椭圆交于 A, B (异于 M, N) 两点, 过点 N 且垂直于 x 轴的直线 l_1 与直线 MA, MB 分别交于 P, Q 两点, 证明: $|NP||NQ|$ 为定值.

题 72 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点与 $y^2 = 4\sqrt{3}x$ 的焦点重合, 点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 且以 PQ 为对角线的菱形的一顶点为 $(-1, 0)$, 求 $\triangle OPQ$ 面积的最大值 (O 为坐标原点).



题 73 已知点 P 为直线 $l: x = -2$ 上任意一点, $F(1, 0)$, M 为平面内一点, 且 $|MP| = |MF| + 1$, $MP \perp l$.

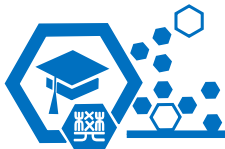
(I) 求点 M 的轨迹 E 的方程;

(II) 过点 P 作曲线 E 的切线, 切点分别是 A, B . 若 $|AB| = 3\sqrt{5}$, 求点 P 的坐标.

题 74 已知椭圆 C 的焦点坐标为 $(\pm 1, 0)$, 且过点 $P(1, \frac{3}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知直线 $l: x = my - 1$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若弦 AB 中点在直线 $y = \frac{3}{8}$ 上, 求直线 l 的方程.

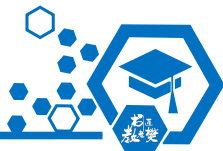


题 75 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

- (1) 点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 上的动点 (与点 A, B 不重合), 若直线 PA , 直线 PB 的斜率存在且斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, 试探究直线 l 是否过定点, 并说明理由;
- (2) 若 $OA \perp OB$. 过点 O 作 $OQ \perp AB$, 垂足为点 Q , 求点 Q 的轨迹方程.

题 76 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$, 点 $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在 C 上, c 为椭圆 C 的半焦距.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 若经过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B (异于 P) 两点, 与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 交于点 M , 设 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 求证: $k_1 + k_2 = 2k_3$.

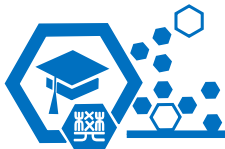


题 77 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 且椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 过抛物线焦点的直线和抛物线相交于 M, N 两点, $|MN| = 8$, 求直线方程;
- (3) 椭圆 C 上是否存在关于直线 $l: x + y = \frac{1}{5}$ 对称的两点 A, B , 若存在, 求出直线 AB 的方程; 若不存在, 请说明理由.

题 78 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, F_1, F_2 为左右焦点. 直线 $l: y = kx + m$ 交椭圆 C 于 A, B 两点, 且 $|AF_1| + |BF_2| = 2\sqrt{5}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若 OA, OB 斜率之积为 $-\frac{4}{5}$, 求证: $\triangle AOB$ 的面积为定值.



题 79 已知正三角形 OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2 = 2x$ 上, 其中 O 为坐标原点, 设圆 C 是 OAB 的外接圆 (点 C 为圆心)

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 设圆 M 的方程为 $(x - 4 - 7\cos\theta)^2 + (y - 7\sin\theta)^2 = 1$, 过圆 M 上任意一点 P 分别作圆 C 的两条切线 PE, PF , 切点为 E, F , 求 $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值.

题 80 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 $(-3, 0)$ 椭圆 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设椭圆 C 与曲线 $|y| = kx (k > 0)$ 的交点为 A, B , 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.



题 81 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 经过点 $A(-2, 0)$, 离心率为 $\sqrt{5}$, 直线 l 过点 $D(3, 0)$ 且与双曲线 C 交于两点 P, Q (异于点 A).

(1) 求证: 直线 AP 与直线 AQ 的斜率之积为定值. 并求出该定值;

(2) 过点 D 分别作直线 AP, AQ 的垂线, 垂足分别为 M, N , 记 $\triangle ADM, \triangle ADN$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $S_1 \cdot S_2$ 的最大值.

题 82 已知 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 动点 P 满足 $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 记动点 P 的轨迹为 S , 过点 F_2 作直线 l 与轨迹 S 交于 P, Q 两点, 过 P, Q 作直线 $x = \frac{1}{2}$ 的垂线 PA, QB , 垂足分别为 A, B , 记 $\lambda = |AP| \cdot |BQ|$.

(I) 求轨迹 S 的方程;

(II) 设点 $M(-1, 0)$, 求证: 当 λ 取最小值时, $\triangle PMQ$ 的面积为 9.



题 83 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , $M(1, \frac{3}{2})$ 为 C 上一点, 记直线 MA_1 的斜率为 k_1 , 直线 MA_2 的斜率为 k_2 , 且 $k_1 k_2 = -\frac{3}{4}$.

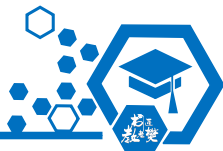
(1) 求 C 的标准方程;

(2) 若 P, Q 为 C 上异于 A_1, A_2 的点, 且直线 PQ 过点 $(\frac{1}{2}, 0)$, 记直线 A_1P 的斜率为 k_{A_1P} , 直线 A_2Q 的斜率为 k_{A_2Q} , 求证: $\frac{k_{A_1P}}{k_{A_2Q}}$ 为定值.

题 84 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 过点 $P(2, 0)$ 作直线 l 与椭圆 C 相交于点 A, B . 若 A 是椭圆 C 的短轴端点时, $\overrightarrow{AF_2} \cdot \overrightarrow{AP} = 3$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 试判断是否存在 l , 使得 $|F_1A|^2, \frac{|F_1P|^2}{2}, |F_1B|^2$ 成等差数列? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.



题 85 以椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的四个顶点为顶点的四边形的四条边与 $\odot O: x^2 + y^2 = 1$ 共有 6 个交点, 且这 6 个交点恰好把圆周六等分.

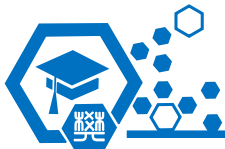
(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 若直线 l 与 $\odot O$ 相切, 且椭圆 M 相交于 P, Q 两点, 求 $|PQ|$ 的最大值.

题 86 设定点 $F(0, 1)$, 动点 E 满足: 以 EF 为直径的圆与 x 轴相切.

(I) 求动点 E 的轨迹 C 的方程;

(II) 设 A, B 是曲线 C 上两点, 若曲线 C 在点 A, B 处的切线互相垂直, 求证: A, F, B 三点共线.



题 87 已知直线 $l: x + my - p = 0$ 与抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 A, B 两点, 与 x 轴交于点 M , $|MA|^2 + |MB|^2 = 4(m^2 + 1)^2$.

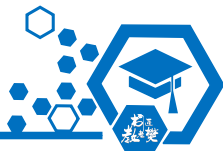
(1) 求抛物线 E 的标准方程;

(2) 过 A, B 分别作抛物线 E 在 A, B 处切线的垂线 l_1, l_2 , 若 l_1 与 l_2 的交点为 P , P 到 y 轴的距离为 d , 直线 l_1, l_2 与 y 轴的交点分别为 C, D , 且 $|CD| = 6d$, 求直线 l 的方程.

题 88 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 圆 $C': x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ 与抛物线 C 相切.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) 若过点 $(5, 0)$ 的直线与抛物线 C 交于 A, B 两点, 抛物线 C 上存在点 P 满足 $\vec{PA} + \vec{PB} = \lambda \vec{PF}$, 求 λ 的取值范围.



题 89 设 A, B 分别是直线 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ 和 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 上的动点, 且 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$, 设 O 为坐标原点, 动点 G 满足 $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

(1) 求点 G 运动的曲线 C 的方程;

(2) 直线 $l: y = kx + m (m \neq 0)$ 与曲线 C 交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 当 k 为何值, $|OM|^2 + |ON|^2$ 恒为定值, 并求此时 $\triangle MON$ 面积的最大值.

题 90 已知点 D 是圆 $Q: (x+4)^2 + y^2 = 72$ 上一动点, 点 $A(4, 0)$, 线段 AD 的中垂线交 DQ 于点 B .

(1) 求动点 B 的轨迹方程 C ;

(2) 定义: 两个离心率相等的圆锥曲线为“相似”曲线. 若关于坐标轴对称的曲线 T 与曲线 C 相似, 且焦点在同一条直线上, 曲线 T 经过点 $E(-3, 0), F(3, 0)$. 过曲线 C 上任一点 P 向曲线 T 作切线, 切点分别为 M, N , 这两条切线 PM, PN 分别与曲线 C 交于点 G, H (异于点 P).

证明: $\frac{|MN|}{|GH|}$ 是一个定值, 并求出这个定值.



题 91 在直角坐标系中,椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其中 F_2 也是抛物线 $C_2: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 P 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点, 且 $|PF_2| = \frac{5}{3}$.

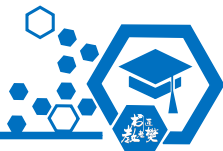
(1) 求椭圆的方程;

(2) 过 F_2 且与坐标轴不垂直的直线交椭圆于 M, N 两点, 若线段 OF_2 上存在定点 $T(t, 0)$ 使得以 TM, TN 为邻边的四边形是菱形, 求 t 的取值范围.

题 92 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线为 l , 过抛物线上一点 B 向 x 轴作垂线, 垂足恰好为抛物线 C 的焦点 F , 且 $|BF| = 4$.

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 设 l 与 x 轴的交点为 A , 过 x 轴上的一个定点 $(1, 0)$ 的直线 m 与抛物线 C 交于 D, E 两点. 记直线 AD, AE 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 + k_2 = \frac{1}{3}$, 求直线 m 的方程.



题 93 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 长轴长为 4, 且椭圆 C 的离心率 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 其左右焦点分别为 F_1, F_2 .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 且过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 求 $\triangle F_1PQ$ 的面积.

题 94 已知椭圆 C_1 , 抛物线 C_2 的焦点均在 x 轴上, C_1 的中心和 C_2 的顶点均为坐标原点 O , 从 C_1, C_2 上分别取两个点, 将其坐标记录于下表中:

x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2
y	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	0	$2\sqrt{2}$

(1) 求 C_1 和 C_2 的标准方程;

(2) 若 C_1 和 C_2 交于不同的两点 A, B , 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的值.



题 95 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$.

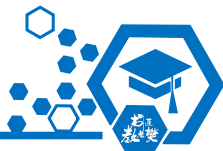
(1) 求 C 的方程;

(2) 直线 $l: x - y - t = 0$ 与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 21$ (O 为坐标原点), 求实数 t 的值.

题 96 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 4)$, 离心率为 $\frac{3}{5}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 求过点 $(3, 0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的中点坐标.



题 97 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 过 F_2 作垂直于 x 轴的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 且满足 $|AF_2| = \frac{\sqrt{3}}{6}c$.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2) M, N 是椭圆 C 短轴的两个端点, 设点 P 是椭圆 C 上一点 (异于椭圆 C 的顶点), 直线 MP, NP 分别与 x 轴相交于 R, Q 两点, O 为坐标原点, 若 $|OR| \cdot |OQ| = 4$, 求椭圆 C 的方程.

题 98 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, F 为 C 的右焦点, 过点 F 作与 x 轴不重合的直线 l , 交 C 于 A, B 两点, 当 l 与 y 轴平行时, $|AB| = 3$.

(1) 求 C 的方程;

(2) P 为 C 的左顶点, 直线 PA, PB 分别交直线 $x = 4$ 于 D, E 两点, 求 $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE}$ 的值.



题 99 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $M(2, 0)$ 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点, P 为椭圆 C 上一点, O 为坐标原点, 且满足 $\vec{OA} + \vec{OB} = t\vec{OP}$, 其中 $t \in (\frac{2\sqrt{6}}{3}, 2)$, 求 $|AB|$ 的取值范围.

题 100 已知直线 $l: y = 2x + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 若椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上存在 C, D 两点关于直线 l 对称.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 O 为坐标原点, 当 $\triangle OCD$ 的面积最大时, 求直线 l 的方程.