# 江苏省仪征中学2024-2025学年度第二学期高二数学学科导学案

## 复习：事件的相互独立性与条件概率

研制人：谢春雷 审核人：鲁媛媛

班级： 姓名： 学号： 授课日期：

**一、学习目标**

1.了解两个随机事件独立性的含义,能利用独立性计算概率；

2.了解条件概率,能计算简单随机事件的条件概率；了解条件概率与独立性的关系,会利用乘法公式计算概率；

3.会利用全概率公式计算概率.（\*了解贝叶斯公式）

**二、必备知识**

1.条件概率

（1）⑴定义：一般地，设$A,B$为两个随机事件，且$P\left(A\right)>0$，我们称$P\left(A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}$为在事件$A$发生的条件下，事件$B$发生的条件概率，简称条件概率．

（2）乘法公式：对任意两个事件$A$与$B$，若$P\left(A\right)>0$，则$P\left(AB\right)=P(A)P\left(A\right)$，称之为概率的乘法公式．

（3）条件概率的性质

条件概率只是缩小了样本空间，因此条件概率同样具有概率的性质．设$P\left(A\right)>0$，则

①$P\left(A\right)=1$； ②如果$B$和$C$是两个互斥事件，则$P\left(A\right)=P\left(A\right)+P\left(A\right)$；

③设$\overbar{B}$和$B$互为对立事件，则$P\left(A\right)=1−P\left(A\right)$．

④任何事件的条件概率都在0和1之间，即：$0\leq P\left(A\right)\leq 1$.

2.相互独立与条件概率的关系

|  |  |
| --- | --- |
| 事件$A$与事件$B$相互独立 | 对任意的两个事件$A$与$B$，如果$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P(B)$成立，则称事件$A$与事件$B$相互独立，简称为独立.即事件与相互独立的充要条件是． |
| 性质 | ⑴若事件$A$与事件$B$相互独立，则$A$与$\overbar{B}$，$\overbar{A}$与$B$，$\overbar{A}$与$\overbar{B}$也都相互独立；⑵若事件$A$与事件$B$相互独立，$P\left(A\right)>0$，$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)\leftrightarrow P\left(B\left|A\right.\right)=P(B)$ |
| 概率的乘法公式 | 由条件概率的定义，对任意两个事件$A$与$B$，若$P\left(A\right)>0$，则$P\left(AB\right)=P(A)P\left(A\right)$ |

3.全概率公式

（1）定义：一般地,设$A\_{1},A\_{2},A\_{3},∙∙∙,A\_{n}$是一组两两互斥的事件,$ A\_{1}∪A\_{2}∪A\_{3}∪∙∙∙∪A\_{n}=Ω$,且$P\left(A\_{i}\right)>0$，$i=1,2,3,∙∙∙,n$,则对任意的事件$B⊆Ω$,有$P\left(B\right)=\sum\_{i=1}^{n}P\left(A\_{i}\right)P\left(A\_{i}\right)$,我们称此公式为全概率公式.

（2）全概率公式的直观意义：

①某事件B的发生有各种可能的原因$A\_{i}$（$i=1,2,3,∙∙∙,n$）,并且这些原因两两互斥不能同时发生，如果事件B是由原因$A\_{i}$所引起的，且事件$A\_{i}$发生时，$BA\_{i}$必同时发生，则$P(B)$与$P(BA\_{i})$有关，且等于其总和

$\sum\_{i=1}^{n}P\left(BA\_{i}\right)=\sum\_{i=1}^{n}P\left(A\_{i}\right)P\left(A\_{i}\right)$ .

②“全概率”的“全”就是总和的含义，若要求这个总和，需已知概率$P(BA\_{i})$,或已知各原因$A\_{i}$发生的概率$P(A\_{i})$及在$A\_{i}$发生的条件下$B$发生的概率$P\left(A\_{i}\right)$.通俗地说，事件$B$发生的可能性，就是其原因$A\_{i}$发生的可能性与已知在$A\_{i}$发生的条件下事件$B$发生的可能性的乘积之和.

$∗$4.贝叶斯公式：

设$A\_{1} , A\_{2} , … , A\_{n}是一组两两互斥的事件，A\_{1}∪A\_{2}∪…∪A\_{2}=Ω，$

$$且P\left(A\_{i}\right)>0，i=1 , 2 , … , n，则对任意的事件B⊆Ω，P(B)>0，有$$

$$P\left(B\right)=\frac{P\left(A\_{i}B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(A\_{i}\right)P\left(B \right|A\_{i})}{\sum\_{k=1}^{n}P\left(A\_{k}\right)P\left(B \right|A\_{k})}，i=1 , 2 , … , n.$$

**三、典型例题**

**题型一：相互独立事件的概率**

（多选）设$A$，$B$为两个随机事件，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列命题正确的是(    )

A. 若$P(AB)=P(A)P(B)$，则$A$，$B$相互独立 B. 若$A$和$B$相互独立，则$A$和$B$一定不互斥
C. 若$A$和$B$互斥，则$A$和$B$一定相互独立 D. $P(AB)<P(A\overline{B}+\overline{A}B)$

**题型二：条件概率**

1.袋子中有大小相同的$5$个白球和$5$个红球，从中任取$3$个球，已知$3$个球中有白球，则恰好拿到$2$个红球的概率为(    )

A. $\frac{5}{11}$ B. $\frac{4}{11}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{1}{3}$

2.设集合$A⊆B$，且$P(A)=0.2$，$P(B)=0.7$，则下列说法正确的是

A. $P(B|A)=\frac{2}{7}$ B. $P(A|B)=\frac{2}{3}$ C. $P(B|\overline{A})=\frac{5}{8}$ D. $P(\overline{A}B)=\frac{7}{10}$

**题型三：全概率公式**

1.一位飞镖运动员向一个目标投掷三次，记事件$A\_{i}=$“第$i$次命中目标”$(i=1,2,3)$，$P(A\_{1})=\frac{1}{8}$，$P(A\_{i+1}|A\_{i})=2P(A\_{i})$，$P(A\_{i+1}|\overline{A\_{i}})=\frac{1}{8}(i=1,2)$，则$P(A\_{3})=$          ．

2.在二十大报告中，体育、健康等关键词被多次提及，促进群众体育和竞技体育全面发展，加快建设体育强国是全面建设社会主义现代化国家的一个重要目标．某校为丰富学生的课外活动，加强学生体质健康，拟举行羽毛球团体赛，赛制采取$3$局$2$胜制，每局都是单打模式，每队有$5$名队员，比赛中每个队员至多上场一次且是否上场是随机的，每局比赛结果互不影响，经过小组赛后，最终甲、乙两队进入最后的决赛，根据前期比赛的数据统计，甲队种子选手$M$对乙队每名队员的胜率均为$\frac{3}{4}$，甲队其余$4$名队员对乙队每名队员的胜率均为$\frac{1}{2}.($注：比赛结果没有平局$)$

$(1)$求甲队最终$2:1$获胜且种子选手$M$上场的概率；

$(2)$已知甲队$2:1$获得最终胜利，求种子选手$M$上场的概率．

3.一个袋子中有$10$个大小相同的球，其中红球$7$个，黑球$3$个$.$每次从袋中随机摸出$1$个球，摸出的球不再放回．

$(1)$求第$2$次摸到红球的概率；

$(2)$设第$1,2,3$次都摸到红球的概率为$P\_{1}$；第$1$次摸到红球的概率为$P\_{2}$；在第$1$次摸到红球的条件下，第$2$次摸到红球的概率为$P\_{3}$；在第$1$，$2$次都摸到红球的条件下，第$3$次摸到红球的概率为$P\_{4}.$求$P\_{1},P\_{2},P\_{3},P\_{4}$；

$(3)$对于事件$A,B,C$，当$P\left(AB\right)>0$时，写出$P\left(A\right),P\left(B∣A\right),P\left(C∣AB\right),P\left(ABC\right)$的等量关系式，并加以证明．

**四、课堂小结**