# 江苏省仪征中学2024-2025学年度第二学期高二数学学科导学案

## 复习：离散型随机变量及其分布列、数字特征

研制人：谢春雷 审核人：鲁媛媛

班级： 姓名： 学号： 授课日期：

**一、学习目标**

1.了解离散型随机变量的概念；

2.理解离散型随机变量分布列及其数字特征(均值、方差).

**二、必备知识**

1.随机变量的有关概念

(1)随机变量：一般地，对于随机试验样本空间$Ω$中的每个样本点$ω$都有唯一的实数$X(ω)$与之对应，我们称$X$为随机变量．用大写英文字母表示随机变量，如$X,Y,Z$；用小写英文字母表示随机变量的取值，如$x,y,z$.

(2)离散型随机变量：可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量.

2.离散型随机变量的分布列

一般地，设离散型随机变量$X$的可能取值为$x\_{1},x\_{2},∙∙∙,x\_{n}$，我们称$X$取每一个值$x\_{i}$的概率$P\left(X=x\_{i}\right)=p\_{i},i=1,2,3,∙∙∙,n$为$X$的概率分布列，简称分布列．

与函数的表示方法类似，离散型随机变量的分布列也可以用表格表示：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | $$x\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | … | $$x\_{k}$$ | … | $$x\_{n}$$ |
| $$P$$ | $$p\_{1}$$ | $$p\_{2}$$ | … | $$p\_{k}$$ | … | $$p\_{n}$$ |

3.离散型随机变量的分布列的性质

（1）$p\_{i}\geq 0,i=1,2,3,∙∙∙,n$；（1）$p\_{1}+p\_{2}+∙∙∙+p\_{n}=1$.

注意：① 列出随机变量的所有可能取值；② 求出随机变量的每一个值发生的概率.

4.离散型随机变量的均值与方差

（1）离散型随机变量的均值的概念

一般地，若离散型随机变量$X$的概率分布为：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | $$x\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | … | $$x\_{k}$$ | … | $$x\_{n}$$ |
| $$P$$ | $$p\_{1}$$ | $$p\_{2}$$ | … | $$p\_{k}$$ | … | $$p\_{n}$$ |

则称$E\left(X\right)=x\_{1}p\_{1}+x\_{2}p\_{2}+∙∙∙+x\_{n}p\_{n}=\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}p\_{i}$为随机变量$X$的均值或数学期望,数学期望简称期望.

（2）离散型随机变量的方差的概念

一般地，若离散型随机变量$X$的概率分布列为：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | $$x\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | … | $$x\_{k}$$ | … | $$x\_{n}$$ |
| $$P$$ | $$p\_{1}$$ | $$p\_{2}$$ | … | $$p\_{k}$$ | … | $$p\_{n}$$ |

则称$D\left(X\right)=(x\_{1}−E\left(X\right))^{2}p\_{1}+∙∙∙+\left(x\_{i}−E\left(X\right)\right)^{2}p\_{i}+∙∙∙+\left(x\_{n}−E\left(X\right)\right)^{2}p\_{n}=\sum\_{i=1}^{n}(x\_{i}−E\left(X\right))^{2}p\_{i}$

为随机变量$X$的方差，有时也记为$Var(X)$.称$σ\left(X\right)=\sqrt{D(X)}$为随机变量$X$的标准差.

5.离散型随机变量的均值与方差的常用性质

（1）$E\left(k\right)=k,D\left(k\right)=0$*,*其中$k$为常数；

（2）$E\left(aX+b\right)=aE\left(X\right)+b$，$D\left(aX+b\right)=a^{2}D\left(X\right)，a,b$为常数，$X$是随机变量；
（3）$E\left(X\_{1}+X\_{2}\right)=E\left(X\_{1}\right)+E(X\_{2})$； （4）$D\left(X\right)=E\left(X^{2}\right)−(E\left(X\right))^{2}$；
（5）若$X\_{1},X\_{2}$相互独立,则$E\left(X\_{1}∙X\_{2}\right)=E\left(X\_{1}\right)∙E(X\_{2})$；

**三、典型例题**

**题型一：离散型随机变量分布列的性质**

1.设随机变量$ξ$的分布列为$P\left(ξ=\frac{k}{5}\right)=ak(k=1,2,3,4,5)$，则(    )

*A.* $15a=1$ *B.* $P(0.5<ξ<0.8)=0.2$ *C.* $P(0.1<ξ<0.5)=0.2$ *D.* $p(ξ=1)=0.3$

2.一校园公用电话在某时刻恰有$k(k\in N)$个学生正在使用或等待使用该电话的概率为$P(k)$，根据统计得到$P\left(k\right)=\left\{\begin{matrix}\frac{c}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)},0\leq k<4\\0,k\geq 4\end{matrix}\right.$，其中$c$为常数，则在该时刻没有学生正在使用或等待使用该电话的概率为( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{8}$

**题型二：离散型随机变量的数字特征**

甲、乙两人进行射击比赛，一局比赛中，先射击的一方最多可射击$3$次，一旦未击中目标即停止，然后换另一方射击，一旦未击中目标或两方射击总次数达$5$次均停止，本局比赛结束，各方击中目标的次数即为其本局比赛得分$.$已知甲、乙每次射击击中目标的概率分别为$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{2}$，两人的各次射击是否击中目标相互独立$.$一局比赛中，若甲先射击．
$(1)$求甲、乙得分相同的概率$;(2)$设乙的得分为$X$，求$X$的分布列及数学期望．

**题型三：方案与决策问题**

从$2021$年起，全国高考数学加入了新题型多选题，每个小题给出的四个选择中有多项是正确的，其中回答错误得$0$分，部分正确得$2$分，完全正确得$5$分，小明根据以前做过的多项选择题统计得到，多选题有两个选项的概率为$p$，有三个选项的概率为$1−p($其中$0<p<1)$．

$(1)$若$p=\frac{1}{2}$，小明对某个多项选择题完全不会，决定随机选择一个选项，求小明得$2$分的概率$;$

$(2)$在某个多项选择题中，小明发现选项*A*正确，选项*B*错误，下面小明有三种不同策略：

Ⅰ$:$选择$A$，再从剩下的$C$，$D$选项中随机选择一个，小明该题的得分为$X;$

Ⅱ$:$选择$ACD$，小明该题的得分为$Y;$

Ⅲ$:$只选择$A$，小明该题的得分为$Z;$

在$p$变化时，根据该题得分的期望来帮助小明分析该选择哪个策略．

**题型四：离散型随机变量概率与分布列的综合应用**

现有两个口袋，$A$口袋中有$m$个球，一部分是红球，另一部分是白球，从中取出一个球恰好是白球的概率为$\frac{2}{3}$，$B$口袋中有$6$个球，$4$个红球，$2$个白球．若将两个口袋混合在一起，从中取出一个球，恰好是白球的概率为$\frac{4}{9}$．

$(1)$若甲从$B$口袋中每次有放回地取一个球，直到取到白球停止，则恰好第三次后停止的概率；

$(2)$甲乙两人进行游戏，由第三人从两个口袋中各取一个球，若同色甲胜，否则乙胜，通过计算说明这个游戏对两人是否公平；

$(3)$从$B$口袋中一次取$3$个球，取到一个白球得$2$分，取到一个红球得$1$分，求得分的期望．

**四、课堂小结**