

CPFS结构下的高中数学 概念教学实践与思考 ——以“导数的概念”为例

吴玉章 姚 松 江苏省新沂市第一中学 221400

[摘要] 数学概念是组成数学这门学科的基石,是学生进行数学思维活动的基础,更是数学教学不可或缺的内容.结合CPFS结构理论,以高中数学的导数概念教学设计为例,以概念形成视觉化、概念理解多元化、概念应用自动化三种策略,引导学生进行学习实践,并对CPFS结构应用于高中数学概念教学进行反思.

[关键词] CPFS结构;概念教学;导数的概念;实践与反思

问题提出

随着《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(下文简称新课标)的稳步实施,高中数学课堂生态和教学模式正在发生积极改变.然而,在现实的概念教学中,依旧存在这样的教育现象:教师满足于“一个定义,三项注意”的传统教学模式,没有从概念发生、发展及形成的过程来设计教学活动,教学中注重应用而轻视理解;学生只满足于对概念的记忆,没有抓住概念的本质和内涵,更没有在头脑中形成关于某一概念的结构体系,导致学生学习完概念后,只知道概念表层的意思,却不会灵活运用.如何让概念教学更贴合学生的认知经验?在概念教学中,如何让教师的教、学生的学深度融合?研究表明,CPFS结构理论是解决以上一系列问题的可行途径,为教师帮助学生更好地理解概念本质提供了新思路.

CPFS结构与高中数学概念

1. CPFS结构及功能概述

CPFS结构是基于概念域、概念系、命题域、命题系而形成的一种认知结构^[1].个体的CPFS结构就是学生将数学知识内化到头脑中的知识网络,是数学学习中特有的一种认知结构,融知识与方法于一体,是知识理解的基础.CPFS结构的功能包括:促进知识的存储与提取,加深对概念的理解,便于知识的迁移,以及推动思维的发展.

2. 数学概念

数学概念是人脑对客观事物中有关数量关系和空间形式的本质特征的一种反映形式,主要是直接从客观事物的数量关系和空间形式反映得到的,或是在数学理论基础上经过抽象获得的,具有抽象性、多元性、层次性和系统性,它是数学思维的基本形式,构成数学知识的基础^[2].

3. CPFS结构与高中数学概念教学

数学是一门以抽象思维为主的学科,概念则是发展数学抽象思维的起点,高中数学概念众多,让学生体会概念发生、发展的过程,提高对概念本质的理解显得尤为重要.众所周知,概念并不是独立存在的,而是与各种概念、命题、思想方法有机结合的一个知识体系,要让学生学好数学就必须掌握好概念与概念、命题与命题之间的关系^[3],帮助学生建立起良好的认知结构.在众多认知结构中,CPFS结构是数学学科特有的一种认知结构,个体形成的CPFS结构是数学知识理解的基础.所以,构建良好的CPFS结构,并提出能够完善CPFS结构的数学概念教学策略,是帮助学生真正理解数学概念本质的重要途径.

CPFS结构下的导数概念教学设计

本节课是《普通高中教科书数学

基金项目:江苏省教育科学“十四五”规划普教重点课题“指向关键能力的高中数学主题单元式教学的实践研究”(B/2021/02/34)阶段性研究成果;江苏省徐州市教育科学“十四五”规划课题“指向深度学习的高中主题单元式教学的实践研究”(GH14-24-L037);江苏省新沂市2024年度“十四五”规划课题“指向深度学习的高中数学主题单元式教学的实践研究”(xjkg2024Z16).

作者简介:吴玉章(1977—),中小学高级教师,从事数学教学与考试命题研究工作.

选择性必修第二册(2019)(人教A版)》(下文简称人教A版教材)第五章5.1.2节的第一课时——导数的概念.导数是微积分的核心概念之一,是现代数学的基本概念,是研究函数性质的基本工具,有极其丰富的实际背景和广泛的应用.

1. 学习内容及认知分析

学生在高一年级物理课程中学习过瞬时速度,并且在之前学习函数零点时,已经积累了使用“二分法”来逼近函数零点的实践经验.因此,学生已经具备了一定的认知基础.导数的概念本质就是瞬时变化率.在人教A版教材中,由于未介绍极限的形式化定义及其相关知识,因此学生很难理解极限的形式化定义.本节课旨在通过实际案例,引导学生经历平均变化率和瞬时变化率的探究过程.通过亲自计算和运用信息技术工具,学生将体验逼近思想的应用,并深刻理解数学中的极限概念,从而抽象并形成导数的基本认识.

2. CPFS结构下的学习目标设计

依据新课标内容要求并结合学生的认知水平,基于CPFS结构确定本节课的教学主线:借助高台跳水问题,由平均速度过渡到瞬时速度,明确瞬时速度的含义(概念域)→借助抛物线切线的斜率问题,由割线斜率过渡到切线斜率,明确切线斜率与瞬时变化率的关系(概念域、概念系)→从具体案例中抽象出导数的概念(命题域)→导数概念的高度抽象,不仅需要深入理解,还必须强化导数概念的“多元联系”(命题域、命题系).

结合学生的认知经验,确定CPFS结构下的导数概念学习目标路线图(如图1所示).

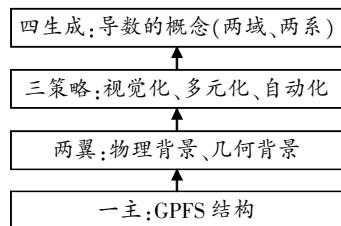


图1

3. 基于思维进阶的教学活动设计

基于思维进阶,设计CPFS结构

下的导数概念教学活动流程图(如图2所示).

CPFS结构下的导数概念教学过程

学习活动的设计旨在服务于教学目标,依据CPFS结构来创设合适的背景情境,并提出合理的问题.从解决问题的角度出发,引导学生参与相应的学习活动.

环节1 呈现背景,提出问题

背景1 请同学们回顾高台跳水的例子:在一次高台跳水运动中,某运动员在运动过程中的重心相对于水面的高度 h (单位:m)与起跳后的时间 t (单位:s)存在函数关系 $h(t)=-4.9t^2+4.8t+11$.我们发现,运动员在 $0 \leq t \leq \frac{48}{49}$ 这段时间内的平均速度为0,而实际上,运动员在这段时间内并不是静止的.这说明平均速度不能准确反映运动员在这段时间内的运动状态.

设计意图 构建CPFS结构的切入点:利用学生头脑中的旧知识(平均速度只能粗略地描述某段时间内的运动状态),引导他们获得新知识(需要精确刻画运动员在某一时间段内的运动状态),激发学生的认知冲突,并在此基础上建立两者之间的联系,从而潜移默化地建立CPFS结构.

问题1 用一个什么样的量可以刻画物体在某一时间段内的运动状态?

师:数学源于生活,让我们一起看一个视频——高速公路上的测速仪.

师:测速仪是如何在汽车经过的

瞬间,测量出其“即时速度”的呢?这里所测量的速度是瞬时速度吗?怎样才能更好地表示瞬时速度呢?

(在学生回答的基础上)教师讲述测速仪的原理,利用激光反射,测量出汽车在给定时间里的移动距离,从而得出其在这段时间内的平均速度.实际上,瞬时速度是无法通过仪器精确测量的.我们通常采用平均速度作为瞬时速度的近似值,为了使平均速度更准确地反映瞬时速度,应当尽可能缩短测量的时间间隔.

设计意图 构建CPFS结构的切入点:由生活实例中的测速原理,引导学生从平均速度入手,寻求解决瞬时速度的思路,说明两者具有紧密的联系.使问题具体化,为求运动员在 $t=1$ s时的瞬时速度做铺垫,丰富学生头脑中的CPFS结构.

师:设汽车在 t_0 时刻附近某一时间段内的平均速度为 $\bar{v}$,可以想象,如果不断缩短这一时间段的长度,那么 $\bar{v}$ 将越来越趋近于汽车在 t_0 时刻的瞬时速度.用同样的方法,我们可以计算运动员在 $t=1$ s的瞬时速度吗?

(1) 自己动手,解决问题

教师向学生提出数学实验任务:根据高台跳水的例子,请完成数学实验记录单(表1)中 $t=1$ s附近的平均速度的计算,观察平均速度的变化趋势,并说明理由.(当 Δt 取不同值时,计算平均速度 $\bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{\Delta t}$ 的值.)

展示一个小组的实验结果,并让一位代表说说其发现:“当 Δt 趋近于0时,平均速度趋近于一个确定的

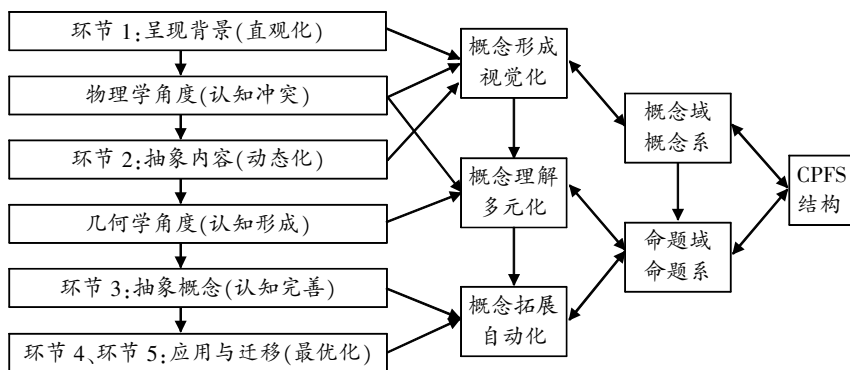


图2

表1 数学实验记录单

当 $\Delta t > 0$ 时, 在 $[1, 1+\Delta t]$ 内		当 $\Delta t < 0$ 时, 在 $[1+\Delta t, 1]$ 内	
Δt	$\bar{v}$	Δt	$\bar{v}$
0.01		-0.01	
0.001		-0.001	
0.0001		-0.0001	
.....			

值-5.”再组织学生讨论平均速度的变化趋势,并总结:“根据物理知识,当 Δt 无限趋近于0时,平均速度无限趋近于瞬时速度.从而得出:当 $t=1$ s, Δt 无限趋近于0时,平均速度 $\bar{v}$ 无限趋近于一个定值,即运动员在 $t=1$ s时的瞬时速度.”

设计意图 构建CPFS结构的切入点:通过计算,让学生亲身体会逼近思想,明确瞬时速度的含义,这是构建导数概念的CPFS结构的第一步,必须给学生留下深刻的印象.

(2)更多数据,感受规律

师:我们用这个方法求得运动员在 $t=1$ s时刻附近的平均速度逼近一个确定的常数,那么,其他时刻呢?请大家按照我们刚才探究 $t=1$ s时刻附近的平均速度的过程,计算 $t=2$ s时刻附近的平均速度(小组展示计算结果).

小组展示计算结果:

$$\bar{v} = \frac{h(2+\Delta t) - h(2)}{\Delta t} = -14.8 - 4.9\Delta t,$$

当 $t=2$ s, Δt 无限趋近于0时,平均速度无限趋近于一个确定的值-14.8.

设计意图 构建CPFS结构的切入点:通过再次实验,使学生感受在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度趋近于一个常数,并理解这个常数的意义,从感性上获得求瞬时速度的方法.获取更多的数值有助于学生揭示其中所蕴含的规律,是巩固CPFS结构的概念域.

(3)联系激活,螺旋上升

师:怎样表示运动员在 t_0 时刻的瞬时速度?

教师带领学生回顾探求 $t=1$ s和 $t=2$ s时瞬时速度的全过程,获得 $t=t_0$ s时瞬时速度的形式化表示.教师介绍符号,

并解释符号的含义: $v = \frac{h(t_0+\Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} =$

$-9.8t_0 - 4.9\Delta t + 4.8$.显然,当 Δt 无限趋近于0时, $-4.9\Delta t$ 也无限趋近于0,所以 $\bar{v}$ 无限趋近于 $-9.8t_0 + 4.8$.我们把这个常数叫做“当 Δt 无限趋近于0时, $\bar{v} = \frac{h(t_0+\Delta t) - h(t_0)}{\Delta t}$ 的极限”,记为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t_0+\Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} = -9.8t_0 + 4.8.$$

设计意图 构建CPFS结构的切入点:从特殊时刻 $t=1$ s和 $t=2$ s到任意时刻 $t=t_0$ s的瞬时速度的形式化表示,引入极限的概念.在从特殊到一般的过程中,让学生体会研究同一类问题的思想方法是相同的,这是构建导数概念的CPFS结构的第二步.

环节2 归纳抽象,构建概念

师:前面我们以物理为背景,从“数”的角度进行了研究.下面我们以前几何为背景,从“形”的角度直观感受无限逼近的思想.

背景2 请回顾并说出函数从 x_1 到 x_2 的平均变化率公式.如果用 x_1 与增量 Δx 表示函数的平均变化率,其公式是怎样的?

问题2 你认为应该如何定义抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线?

师:与研究瞬时速度类似,为了研究抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线,我们通常在点 $P_0(1,1)$ 的附近任取一点 $P(x, x^2)$ 考察抛物线 $f(x)=x^2$ 的割线 P_0P 的变化情况.

师:(借助信息技术演示图3)我们发现,当点 P 无限趋近于点 P_0 时,割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置,这个确定位置处的直线 P_0T 称为抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线.

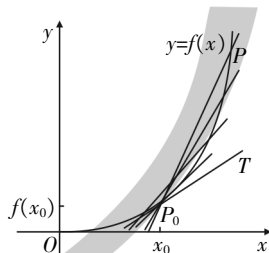


图3 割线 P_0P 的动态变化趋势

师:我们知道斜率是确定直线的

一个要素,如何求抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线 P_0T 的斜率呢?

从上述切线的定义可见,抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线 P_0T 的斜率与割线 P_0P 的斜率有内在的联系.记 $\Delta x = x - 1$,则点 P 的坐标是 $(1+\Delta x, (1+\Delta x)^2)$.于是,割线 P_0P 的斜率 $k = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{1+\Delta x - 1} = \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \Delta x + 2$.

师:我们可以用割线 P_0P 的斜率 k 近似地表示切线 P_0T 的斜率 k_0 ,并且可以通过不断缩短横坐标间隔 $|\Delta x|$ 来提高近似表示的精确度.请大家完成表2所示的数学实验记录单,并说明割线斜率的变化趋势.

表2 数学实验记录单

$\Delta x > 0$		$\Delta x < 0$	
Δx	$k = \Delta x + 2$	Δx	$k = \Delta x + 2$
0.01		-0.01	
0.001		-0.001	
0.0001		-0.0001	
.....			

生:当 Δx 无限趋近于0时,割线 P_0P 的斜率无限趋近于点 P_0 处的切线 P_0T 的斜率 k_0 .

师:事实上,由 $k = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \Delta x + 2$

可以直接看出,当 Δx 无限趋近于0时, $\Delta x + 2$ 无限趋近于2.我们把2叫做“当 Δx 无限趋近于0时, $k = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ 的极限”,记为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2$.

设计意图 构建CPFS结构的切入点:借助信息技术使学生直观感受“平均变化率”逼近“瞬时变化率”的过程,用运动变化的观点研究问题,体会极限思想.这是构建导数概念的CPFS结构的第三步.

环节3 抽象概念,数学表达

师:如果将前面两个变化率问题中的函数都用 $y=f(x)$ 来表示,那么函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率怎样表示?

教师引导学生体会它们的共同特征,并将其抽象为数学问题.由教师给出导数的定义:一般地,函数 $y =$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$,我们称它为函数 $y =$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$,

即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

设计意图 构建CPFS结构的切入点:学生体验了平均速度趋近于瞬时速度,割线斜率趋近于切线斜率的过程.他们通过观察、分析、归纳和抽象,最终确立了导数的概念.这是构建导数概念的CPFS结构的最关键一步.

环节4 概念应用,思维进阶

例题 将原油精炼为汽油、柴油、塑胶等各种不同产品,需要对原油进行冷却和加热.已知在第 x h时,原油的温度(单位: $^{\circ}\text{C}$)为 $y=f(x)=x^2-7x+15(0 \leq x \leq 8)$.计算第2 h、第3.5 h和第6 h时,原油温度的瞬时变化率,并说明它们的意义.

设计意图 构建CPFS结构的切入点:三个计算结果分别为正数、负数、零,让学生感受到导数值的多样性,体会瞬时变化率的实际意义;引导学生用导数解决实际问题,深化对导数的理解,深刻体会导数的本质,进而丰富导数的CPFS结构.

环节5:内化迁移,融合提升

师:同学们,就今天这节课的学习,我们一起完成一份调查报告(调查报告表如表3所示).

设计意图 构建CPFS结构的切入点:深度融合教师的教与学生的学,真正促进学生的认知发展和知识网络构建,完善导数概念的CPFS结构.

CPFS结构对高中数学概念教学的启示

数学概念是高中数学的核心内容,学生形成优良的CPFS结构对提高数学概念理解是很有帮助的.

1. 从概念形成视觉化策略,关注认知起点,构建CPFS结构

CPFS结构强调进行概念教学时,应充分关注学生现有的认知水平,判断学生接受新知的能力,为更好地进行概念教学做好准备.数学概念并非

表3 基于CPFS结构的教、学、评调查报告

报告名称	报告人	调查内容	学生评价	教师评价	评价等第	师生建议
CPFS结构下的导数概念教学调查报告	教师	教学设计				
		教学目标				
		教学效果				
	学生	学习目标				
		学习过程				
		学习效果				

全然新颖,一些是在既有的知识体系中通过抽象思维提炼而成的.以导数的概念为例,学生需构建导数概念的知识体系,以便与其他概念形成相互关联的知识网络.由于数学概念本身具有高度的抽象性,学生一般很难理解其真实内涵,因此从概念形成视觉化角度,以直观的方式将抽象的知识以数学图形、函数图象、实物图形加以呈现,或者借助信息技术工具,将其变化的过程以动态的方式进行展示,化抽象为形象,凸显概念形成、发展过程.经历从特殊到一般或者从抽象到具体的过程,有助于学生快速形成“概念域”和“概念系”,从而构建良好的CPFS结构.

2. 从概念理解多元化策略,重视概念本质,丰富CPFS结构

高中数学概念教学应体现出概念的本质和外延,个体形成的CPFS结构是知识网络更深层的刻画.在传统的概念教学中,许多学生仅仅满足于记忆概念,而未能深入理解其本质,结果在学习完概念后,无法灵活地应用它们.研究表明,倡导多角度、深层次揭示数学本质的CPFS结构,是促进对概念本质理解的有效途径.首先,概念教学应在多种背景下揭示概念的内涵,从感性认识逐渐上升到理性认识.所以,在设计概念教学时使用从特殊到一般的形式.其次,从各个层次中揭示概念的内涵.由于数学概念具有发展性、复杂性和抽象性,随着学生不断积累知识,他们对数学概念的理解深度也会相应地提升.一个更完善的CPFS结构有助于学生更深层次地理解概念.再次,在不同结构中揭示概念的内涵.代数学和几何学,数字和图形之间可以建立对应关系,在不同的结构中形成广义的概念域,

帮助学生丰富CPFS结构.

3. 从概念拓展自动化策略,体会应用价值,完善CPFS结构

数学概念虽然看起来纷繁复杂,但在CPFS结构理论的指导下,通过概念系和命题系的构建,能够透过现象看本质.通常,学生的概念系和命题系一般是在数学知识的应用中形成的.数学概念和命题的应用可以划分为低层次和高层次.低层次是知觉水平的应用,是指学生对概念和命题自身结构的理解;高层次是思维水平的应用,是指学生将所学知识进行拓展,涉及概念、命题、方法、思想等.优良的CPFS结构表明,大脑中存储大量知识,通过知识网络中各个知识节点之间的相互激活,为知识迁移提供了通道.个体CPFS结构中的概念域、概念系、命题域、命题系揭示知识之间的联系,有利于知识迁移,有助于学生对数学概念的理解和应用,从而完善CPFS结构.

本节课围绕CPFS结构下的导数概念进行教学实践,通过两个实例背景引导学生抽象并形成导数的概念,旨在引导学生经历“观察—归纳—抽象—概括”的探究过程,体验从特殊到一般、从具体到抽象的研究方法,进而培养学生的批判性、灵活性和独创性的数学思维品质.

参考文献:

- [1] 喻平. CPFS结构与数学命题教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016(2):5-10.
- [2] 王立文,范后猛,卢昌菊. 对几个数学概念的理清[J]. 中小学数学(初中版), 2013(Z1):19-21.
- [3] 喻平. 论数学命题学习[J]. 数学教育学报, 1999(4):2-6+19.