

高中数学“对应”大概念的内容贯通与方法论研究

虞 涛 时 杰

(上海市建平中学,上海 200135)

摘 要 函数作为贯穿高中数学课程的主线之一,本质是“对应”的大概念.教师对“对应”的大概念在高中数学内容中贯穿的方式缺少深入的理解,一定程度上不利于对数学整体性的认识和学科核心素养的落实.“对应”的大概念在当前高中数学课程内容中的贯穿表现为“对应”的发生、内涵、表达、建立和发展.教师要把“对应是一种方法论”作为中学数学学习的一个核心定位.

关键词 函数;对应;大概念;方法论

我国的基础教育课程改革已经进入了核心素养时代,培养和发展学生的数学学科核心素养成为基础数学教育的根本目标.为了实现这一目标,需要整体把握数学课程,打破传统的以知识点为中心的、低效的碎片化教学,构建数学知识之间的逻辑结构,开展单元教学.大概念(big idea)因其所具有的概括性、统摄性、迁移性等特点,被认为是落实数学学科核心素养的重要途径.从学科本质的角度来看,大概念指向学科具体知识背后本质的内容;从课程内容的角度来看,大概念贯穿了整个课程或课程的主要部分.德国数学家克莱因认为“函数概念,应该成为数学教育的灵魂.以函数概念为中心,将全部数学教材集中在它周围,进行充分地综合.”新课标指出,函数应作为贯穿高中数学课程的主线之一,其本质是“对应”.^[1]因此文章基于现行的七种普通高中数学新教材,包括人民教育出版社A版、人民教育出版社B版、江苏凤凰教育出版社、湖南教育出版社、北京师范大学出版社、湖北教育出版社、上海教育出版社(以下依次对应简称“教材1—教材7”)分析“对应”大概念在高中数学课程内容中的贯通方式,以揭示“对应”大概念下系统学习和理解数学的方式.

一、“对应”的发生

各版教材无一例外均采用了“集合对应说”的观点定义函数概念,但“对应关系”的发生主要分为两种方式,一是基于数学内部的抽象,二是基于客观现实的抽象.教材7是第一种方式的代表.它通过正比例函数 $y = 2x$ 和对数函数 $y = \log_3 x$ 这两个数学例子说明“都出现了两个处于变化之中的量,其中一个量之值随另一个

量之值的确定而按一定的对应关系唯一确定,从而随着另一个量在一定范围内的变化而相应地发生变化”.这是一个从理性具体上升到理性一般的思维过程,从而把握了这两个具体研究对象的本质特征是对应.教材1是第二种方式的代表.它在函数概念的引入部分首先指出:“在初中我们已经接触过函数的概念,知道函数是刻画变量之间对应关系的数学模型和工具.”继而给出了四个客观现实中的例子.通过归纳实例的共同特征发现“都包含两个非空数集,用 A, B 来表示;都有一个对应关系;尽管对应关系的表示方法不同,但它们都有如下特性:“对于数集 A 中的任意一个数 x ,按照对应关系,在数集 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应.”这是一个从感性具体上升到理性具体最后上升到理性一般的思维过程,揭示了两个变量之间的对应关系.无论是基于数学内部的抽象还是基于客观现实的抽象,最终都使得研究对象摆脱了对物理背景的依赖,达到抽象的极致,“对应”由此发生.

从“对应”大概念看,函数概念包括三部分:对应的对象、范围 and 方向.“集合对应说”下的函数概念,将变量的取值范围用集合表示,将解析式、图像、表格描述为对应关系,为了表示方便,引进符号 f 统一表示 f 对应的过程中,指定了对应的对象是 x ,对应的范围是 x 构成的集合,即定义域,对应的结果是 $f(x)$,即 y, y 所构成的集合即值域,对应的方向是 $x \xrightarrow{f} y$,方向唯一,以此确定对应属性.

二、“对应”的内涵

虽然各版教材的函数定义中均出现了“对应”,但

基金项目:上海市第四期“双名工程”攻关计划虞涛数学基地攻关课题“中学数学结构化教学设计与实施的行动研究”(课题编号:SMGC-201904-B55)。

究竟什么是“对应”,却没有教材定义过.不妨选择教材7中函数定义:“设 D 是一个非空的实数集,如果按照某种对应关系 f ,使对集合 D 中的任意给定的 x ,都有唯一的实数 y 与之对应,就称这个对应关系 f 为集合 D 上的一个函数,记作 $y=f(x),x\in D$.”仔细体会,不难发现教材7是将两个集合间元素的“对应关系”定义为函数,换言之,函数的本质是“对应”,而“对应”的本质则是“关系”.从语义上理解,“关系”是事物间的客观联系,有的明晰,有的模糊,具有高度的概括性,不可强加.^[2]从数学上理解,数学中对“关系”的定义是:设 X_1 和 X_2 都是集合,称集合 $X_1\times X_2=\{(x,y)|x\in X_1,y\in X_2\}$ 为 X_1 与 X_2 的笛卡儿积.集合 X 上的一个关系 R 是 $X\times X$ 的一个子集,当 $(x_1,x_2)\in R$ 时,说 x_1 与 x_2 具有关系 R ,记作 x_1Rx_2 .^[3]利用“关系”概念,可以给出函数的“关系说”定义:设 f 是实数集合 X 与实数集合 Y 的关系,即 $f\subseteq X\times Y$,如果还满足 $(x_1,y_1)\in f,(x_2,y_2)\in f$,则 $y_1=y_2$,那么称 f 是集合 X 到集合 Y 的函数.“关系说”用集合定义“关系”,用“关系”定义函数,将函数概念彻底数学化,真正揭示数学学科中“对应”的本质是一种特殊的“关系”,而函数则是集合间的一种“对应关系”.用“关系说”定义函数概念虽然更严谨、科学,但是这种定义过于形式化,丧失了函数关系中变量的运动变化特征,不符合学生的认知水平,故各版教材没有给出“关系说”,而是采用“对应说”,既揭示函数概念本质,又符合学生认知.

三、“对应”的表达

数学概念大体上由内涵与外延所构成,“对应”的内涵是一种“关系”,那么“对应”的外延又是什么?一方面,各版教材皆由诸多具体的研究对象来表达“对应”.教材中出现的基本初等函数的解析式与图像、表格、分段函数等函数表示方法一道,都是“对应”的具象存在.另一方面,用“对应说”定义函数,主要关注对应的结果,而非过程.教材1在函数的基本性质部分指出“函数 $y=f(x)(x\in A)$ 描述了客观世界变量之间的一种对应关系,可以通过研究函数的变化规律来把握客观世界中事物的变化规律”“变化中的不变性就是性质,变化中的规律性也是性质”.这表明函数性质就是“对应”的抽象存在.教材2引入奇偶性时指出“当自变量取互为相反数的两个值 x 和 $-x$ 时,对应的函数值相等.”教材6引入单调性时提问:“ x 的值逐渐增大时,与它相应的 y 的值如何变化?”类似地,最值就是研究自变量变化

时,其对应的因变量是否达到最大(小)值;周期性就是研究自变量每次变化一个固定值,其对应的因变量取值是否不变;零点就是研究是否存在自变量取值对应因变量为零.除了利用函数的性质表达“对应”的抽象存在,还可以通过调换对应的方向,研究对应关系是否成立,例如,教材3反函数定义中指出“对任意一个 $y\in B$,都有唯一的 $x\in A$ 与之对应”;通过对应关系的运算构建新的对应关系,就是函数的运算;通过多次对应形成新的对应关系,就是复合函数.无论何种方式表达“对应”,最终都形成一个包括自变量与因变量以及两个变量之间的对应关系的抽象结构.

四、“对应”的建立

通过函数学习,学生基本能够体会到线性函数、指数函数和对数函数分别可以用来刻画“直线上升”“指数爆炸”和“对数增长”等现实生活中的运动变化现象.三角函数是刻画周期现象的重要模型.但与多项式函数、幂函数、指数函数和对数函数等不同,三角函数不以“代数运算”为媒介,而是几何量(角与有向线段)之间的直接对应,不是通过对 α 进行代数运算得到函数值.^[4]三角函数本质是自变量与因变量之间的周期性对应关系,这种对应关系并不是直接给出的,而是通过多环节的对应建立起来的.在三角函数中“对应”起到建立知识体系的作用.首先是引入弧度制,如教材1指出:“角的概念推广后,在弧度制下,角的集合与实数集 R 之间建立起一一对应的关系.”然后将角置于直角坐标系中,建立角与有向线段比值的对应,教材4指出:“对于每一个确定的角 α ,都分别有唯一确定的比值 $\frac{y}{r}$ 和 $\frac{x}{r}$ 与之对应,故正弦和余弦都是角 α 的函数.”继而在单位圆中建立角与单位圆上点的坐标的对应,教材7指出:“任意一个角 α 对应于单位圆上一点 P ;反之,单位圆上一点 P 可对应无穷多个角.”最终实现实数与三角比的对应.三角函数的周期性对应关系是通过对应的方法建立的,从这个意义上讲,对应既是数学学科所研究的一种关系,也是建立数学学科知识体系的一种方法.

五、“对应”的发展

(一)在复数中的发展

“对应”萌芽于两个变量之间的函数关系,而在代数学中进一步发展,主要体现在复数中的“对应”.将复数看成一个二元数,那么复数的代数形式 $a+bi(a,b\in R)$ 就与有序实数对 (a,b) 一一对应,而有序实数对 (a,b) 与平面直角坐标系中的点 $Z(a,b)$ 一一对应,

点 $Z(a,b)$ 又对应于平面向量 $\overrightarrow{OZ} = (a,b)$, 因此教材 1 在引入复数的几何意义时指出:“复数集与平面直角坐标系中的点集之间可以建立一一对应关系”“复数集中的数与复平面内以原点为起点的向量建立了一一对应关系。”关于复数的三角形式,教材 3 指出:“每一个非零的复数 $z = a + bi$ 都有唯一确定的模与辐角主值;反过来,复数的模与辐角主值可以唯一确定这个复数。”这暗示复数的三角形式建立了复数与另一种有序实数对 (r,θ) 的一一对应.复数中的对应建立了复数与向量、三角函数之间的关系.基于这些对应关系,在处理复数问题时的视角就是多元的,其一是实数域中的“二元数”视角,也就是将复数问题转化为实数问题研究,关注复数的实部与虚部;其二是复平面中的“点”视角,用运动变化的眼光看待复数,用点的“轨迹”刻画复数的变化特征;其三是直角坐标系中的“向量”视角,复数与向量的线性运算完全一致,复数运算的几何意义可以通过向量凸显出来.

(二)在平面解析几何中的发展

解析几何作为几何学与代数学交融的典范,可以看成是“对应”的另一种发展.教材 2 和教材 4 在引入“曲线方程”核心概念时的表述都是:“在平面直角坐标系中,如果曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x,y) = 0$ 的实数解建立了如下关系……”虽然两版教材都没有明确指出是什么关系,但是教材 2 中提到“如果曲线 C 的方程是 $F(x,y) = 0$,且 $P(x,y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点,则 $P(x,y) \in C \Leftrightarrow F(x,y) = 0$.”这暗示曲线上点的坐标与方程的解就是一种对应关系,这种对应关系带来的结果不仅仅是创造了一个研究几何的新方法——坐标法,更重要的是实现了对几何图形空间形式和数量关系的量化表达,同时曲线是由静态的点组成的集合也转变为动态的点的轨迹,观念上由静态转入动态,由常量转入变量.值得注意的是,教材 7 在平面解析几何内容中特意加入了参数方程和极坐标方程.在定义参数方程时,它指出:“如果对于 t 的每一个允许值,由上述方程组所确定的点 $P(x,y)$ 都在曲线 C 上;反之,对于曲线 C 上任意一点的坐标,都存在 t 的某个允许值使得上述方程组成立……”这表明参数方程是通过参数 t 间接建立了曲线上点的坐标与方程的解的对应关系.在极坐标方程内容中,则直接强调了“尽管在极坐标系中点的坐标不唯一,但是在极坐标系中,除了极点外,平面上的所有点所成的集合和实数对集合

$\{(\rho,\theta) | \rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 是一一对应的”.可见,“对应”概念不仅在普通方程中存在,在参数方程和极坐标方程中也存在.平面解析几何集成了几何、代数、函数等众多领域.从对应概念看,曲线与方程的联系和函数解析式与函数图像的联系有相似性,又有差异性.相似性表现在曲线方程和函数解析式都建立了几何点集与方程解集之间的对应关系,差异性表现在函数着重研究自变量和因变量在某种运算关系下的对应,而曲线与方程的出发点是在几何图形的代数表示下成对变量与点的对应,并且,函数中两个变量的对应有序性,一定是由自变量 x 确定因变量 y ,反之未必是函数,即使是函数,一般也不是同一个函数,而曲线方程中两个变量地位均等,只关心哪个数组满足方程.^[5]教材 2 对此特意作了说明:“有些函数的解析式可以看成一种特殊的方程,此时,解析式与函数图像之间的关系,实际上是方程与曲线的关系……不过曲线的方程并不一定是函数……”

(三)在概率统计中的发展

“对应”大概念在概率统计中的发展,将确定性数学工具引入到对随机性数学问题的研究.随机变量是概率论的核心内容,以随机变量及其分布为抓手,分析“对应”大概念在概率统计中的体现主要包含两部分:其一,定义随机变量,建立样本空间与实数集的对应.教材 7 对随机变量的定义是:“以样本空间作为定义域的一个函数 X 称作一个随机变量,即对样本空间 Ω 中任意给定的元素 ω ,都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应.”其他各版中随机变量的定义也都指出了样本点 ω 与实数 $X(\omega)$ 之间的对应关系,教材 3 在边框中更是特意表明:“随机变量就是建立在 Ω 到 R 的单值对应,样本空间 Ω 相当于函数的定义域,不同的是 Ω 未必是数集.”由此可见,随机变量建立了样本空间与实数集的对应关系,从而使得随机试验的样本点数量化,完成了对随机事件的数学刻画.其二,引入随机变量的分布函数,建立随机变量的取值与相应样本空间随机事件的概率的对应.各版教材对此没有作出明确的说明,只有教材 7 指出:“随机变量所有可能的取值以及相应的概率,称为随机变量的分布.”暗示随机变量取值与概率之间的对应关系.我们以重要的概率模型——二项分布具体解释随机变量蕴含的“对应”大概念,“ n 次独立的伯努利试验的实验结果” $\rightarrow$ “实验结果中事件 A 出现的次数 k ” $\rightarrow$ “事件 A 出现次数 k 的概率 $P(X = k) = C_n^k P^k (1 - P)^{n-k}$ ”,从

而得到二项分布这一刻画 n 次独立的伯努利试验的函数,进而围绕二项分布建立均值、方差等概念,并运用它们研究、解决 n 次独立的伯努利试验的各种问题.因此,随机变量及其分布本质是“对应”,“对应”大概念使得概率统计可以与函数、几何、代数等建立联系,还可以利用函数这一确定性数学工具处理概率统计问题.

六、“对应”的方法论

“对应”是个如此自然而又使用广泛的概念,是人类理性思考活动常用的方法.人们利用对应来建立事物间的联系,“对应”概念在数学学科内部的运用增强了人们对数学学科的整体性认识.中学数学学科中的“对应”概念依附于众多的数学知识,它的价值首先在于要素化,从数量和图形等方面把握研究对象的组成要素,得到数学的基本概念,包括数学研究对象的定义、刻画研究对象关系的术语和运算的方法.其次是关系化,与研究对象组成要素的存在性相比,研究对象要素之间的关系更为本质,“对应”概念在于揭示要素之间的对应关系.从前文的分析来看,中学数学主要是将研究对象与实数集建立对应关系,从而可以量化研究事物的数量关系与空间形式.最后是符号化,符号是知识生成和不断增长的中介,简约的符号承载着深刻的数学思想,中学数学中的“对应”概念用集合论的符号和术语描述研究对象,带来分析、表达和处理上的便捷.

“对应”也是数学抽象的一种方式.数学从本质上来说是研究“关系”,用“对应”将事物之间的联系抽象成集合与集合之间的对应关系是中学数学的重要任务,在此过程中帮助学生学会数学地看待世界,发现和提出问题、分析问题和解决问题,学会数学地思考,则是“对应”所发挥的育人价值.中学数学中的“对应”伴随着函数概念的数学抽象水平不断加深而生成.史宁中教授认为数学抽象的过程可以分为简约阶段、符号阶段、普适阶段等三个阶段,其中简约阶段主要是把握事物关于数量或者图形的本质,把复杂问题简单化,给予清晰表达;符号阶段主要是去掉具体内容,利用符号和关系术语,表述已经简约化的事物;普适阶段主要是通过假设和推理,建立法则、模式和模型,在一般意义上描述一系列事物的特征或规律.^[6]函数观点下“对应”的生成也经历了如上的三个阶段.在初中,学生通过对客观世界运动变化现象的观察,从“变量间的依赖关系”抽象出了函数的“变量说”,可以认为这是“对应”生成的简约阶段,简化了复杂的现实问题,把握了变化过程中两个变量的相依关系,自然、形象而且直观.“变量说”

下的函数概念中,变量之间依托具体背景多半大致已经“天然地”建立了“对应关系”,但却没能突出函数的本质属性,因此,高中阶段的函数概念进入了“对应”生成的符号阶段,并辐射渗透到其他数学知识中.至于“对应”生成的普适阶段则要待到高等数学中基于序偶定义及二元关系定义的函数“关系说”,才最终将函数概念建立在集合论的基础之上.

站在更高的角度来看“对应”概念,其实是一种方法论.教师要把“对应是一种方法论”作为中学数学学习的一个核心定位.

“对应”的观念贯穿了整个高中数学必修和选择性必修课程的主要内容,但是教师要从中借鉴的不是“对应”所带来的数学结果性知识,而是“对应”的方法.如果说“函数”“解析几何”“向量”等数学知识是“对应”的载体,那它们只能被称为“数学”,而“对应”概念则可以被成为“一般数学”.“一般数学”和“数学”不同,二者的关系就好比“工具”和“通过工具获得的成果”.“对应”概念打破了数学学科具体研究对象的限制,将数学的研究对象统统归结为事物之间的某种对应关系,也就归纳出了数学知识的研究共性,它是关于数学本质的认识和数学演进的理解,这使得“对应”的系统性、抽象性和应用性都远远超越了它所依附的数学知识,成为一种发现和研究真理的普适性方法.

参考文献

- [1]教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020:9.
- [2]苏雯雯,徐章韬.微言要义:对应法则为何要改为对应关系[J].数学通报,2015(10):9-11+15.
- [3]尤承业.基础拓扑学[M].北京:北京大学出版社,1997:9-10.
- [4]章建跃.用几何直观和代数运算的方法研究三角函数[J].数学通报,2020(11):4-13+57.
- [5]李大永.基于数学思想方法的理解,整体设计解析几何的教学[J].数学通报,2016(11):13-18.
- [6]史宁中.数学基本思想18讲[M].北京:北京师范大学出版社,2021:14-15.

(虞涛,上海市建平中学正高级教师)

(责任编辑:万丙晟)