# 江苏省仪征中学2024-2025学年度第二学期高二数学学科导学案

## 复习：导数求函数的极值、最值

研制人：姜业锋 审核人：鲁媛媛

班级： 姓名： 学号： 授课日期：

**一、学习目标**

1.借助函数的图象,了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件;

2.能利用导数求某些函数的极大值、极小值以及给定闭区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值;

3.体会导数与单调性、极值、最大(小) 值的关系.

**二、必备知识**

**1.函数的极值**

①函数的极小值：

函数$y=f(x)$在点$x=a$的函数值$f(a)$比它在点$x=a$附近其它点的函数值都小，$f^{'}\left(a\right)=0$，而且在点$x=a$附近的左侧$f^{'}\left(x\right)<0$,右侧$f^{'}\left(x\right)>0$，则点$a$叫做函数$y=f(x)$的极小值点，$f(a)$叫做函数$y=f(x)$的极小值.

②函数的极大值：

函数$y=f(x)$在点$x=b$的函数值$f(b)$比它在点$x=b$附近的其他点的函数值都大，$f^{'}\left(b\right)=0$，而且在点$x=b$附近的左侧$f^{'}\left(x\right)>0$,右侧$f^{'}\left(x\right)<0$,则点叫做函数$y=f(x)$的极大值点，$f(b)$叫做函数$y=f(x)$的极大值.

极小值点，极大值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

**2.函数的最值**

①函数$f(x)$在$[a，b]$上有最值的条件：如果在区间$[a，b]$上函数$y＝f(x)$的图象是一条连续的曲线，那么它必有最大值和最小值．

②由区间$[a，b]$上单调性情况求最值：

若函数$f(x)$在$[a，b]$上单调递增，则$f(a)$为函数的最小值，$f(b)$为函数的最大值；若函数$f(x)$在$[a，b]$上单调递减，则$f(a)$为函数的最大值，$f(b)$为函数的最小值.

③若函数$f(x)$在$[a，b]$上先增后减，极大值为最大值，$f(a)$与$f(b)$中较小值即为最小值；或先减后增，极小值为最小值，$f(a)$与$f(b)$中较大值即为最大值；

④若函数$f(x)$在$[a，b]$上增减增，极大值与$f(b)$中较大值即为最大值，极小值与$f(a)$中较小值即为最小值；若函数$f(x)$在$[a，b]$上减增减，极大值与$f(a)$中较大值即为最大值，极小值与$f(b)$中较小值即为最小值.

**重要结论：**

1.若函数$f(x)$在定义域范围内存在极大(小)值，其极大(小)值未必唯一，可能有多个极大(小)值，且极大值与极小值之间没有必然的大小关系.

2.函数的极值刻画的是函数的局部性质，且极值点是一个数，不是点.

3.若函数$f(x)$在开区间$(a，b)$内只有一个极值点，则相应的极值点一定是函数的最值点．

4.函数的极值表示函数在一点附近的情况，是在局部对函数值的比较；函数的最值是表示函数在一个区间上的整体情况，是函数在整个区间上的函数值的比较．

5.若函数$f(x)$在开区间$(a，b)$内只有一个极值点，则相应的极值点一定是函数的最值点．

6.函数的极值表示函数在一点附近的情况，是在局部对函数值的比较；函数的最值是表示函数在一个区间上的整体情况，是函数在整个区间上的函数值的比较．

7.解决实际问题应注意：

①由实际问题抽象出函数模型，利用导数求函数最优解，注意变量的实际意义；

②用导数求解实际问题中的最大(小)值，如果函数在区间内只有一个极值点，根据实际意义，该极值点就是最值点.

**三、典型例题**

**题型一****：利用导数研究函数的极值**

1.若$x=1$是函数$f(x)=(x^{2}+ax−1)e^{x−1}$的极值点，则$f(x)$的极大值为(    )

A. $−1$ B. $−2e^{−3}$ C. $5e^{−3}$ D. $1$

2.（多选）函数$y=f(x)$的导函数$y=f′(x)$在$(−\infty ,−2)$和$(−1,+\infty )$上单调递增，在$(−2,−1)$上单调递减，有且仅有两个零点$f′(−3)=f′(−1)=0$，则以下命题是假命题的有

A. $−3$是函数$y=f(x)$的极值点 B. $−1$是函数$y=f(x)$的最小值点
C. $y=f(x)$在区间$(−3,−1)$上单调递增 D. $y=f(x)$在$x=−\frac{3}{2}$处切线的斜率小于零

**题型二：利用导数研究函数的最值**

1.已知函数$f\left(x\right)=(x^{2}−x−1)e^{x−1}$，则$f\left(x\right)$的大致图象为(    )

A.  B.  C.  D. 

2.设直线$x=t$与函数$f(x)=x^{2},g(x)=lnx$的图像分别交于点$M,N$，则当$\left|MN\right|$达到最小时$t$的值为(    )

A. $1$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt[ ]{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}$

3.已知函数$f(x)=ax^{2}−lnx$，$a\in R$．
$(1)$若$f(x)>0$，求$a$的取值范围；
$(2)$若$a=−1$时，方程$f(x)=b−3x(b\in R)$在$[\frac{1}{2},2]$上恰有两个不等的实数根，求实数$b$的取值范围．

**题型三：导数与极值、最值关系的简单应用**

1.已知函数$f(x)=xlnx−ax^{2}+a(a\in R)$．

$(1)$若函数$f(x)$在$x=1$处的切线与直线$2x−y+1=0$垂直，求实数$a$的值．

$(2)$若函数$f(x)$存在两个极值点，求实数$a$的取值范围．

2.知函数$f(x)=ax^{2}+xln x(a\in R)$．

$(1)$当$a=0$时，求$f(x)$的最小值；

$(2)$在区间$(1,2)$内任取两个实数$p$，$q(p\ne q)$，若不等式$\frac{f(p+1)−f(q+1)}{p−q}>1$恒成立，求实数$a$的取值范围；

$(3)$求证：$\frac{ln 2}{2^{3}}+\frac{ln 3}{3^{3}}+\frac{ln 4}{4^{3}}+…+\frac{ln n}{n^{3}}<\frac{1}{e}($其中$n>1$，$n\in N^{∗}$，$e=2.71828…)$．

**四、小结**