江苏省仪征中学2024-2025学年第二学期高二数学周练（12）

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.对四组数据进行统计，获得如图所示的散点图，关于其相关系数的比较，正确的是(    )


A. $r\_{1}<r\_{4}<0<r\_{3}<r\_{2} $B. $r\_{4}<r\_{1}<0<r\_{3}<r\_{2} $C. $r\_{4}<r\_{2}<0<r\_{3}<r\_{1}$D. $r\_{2}<r\_{4}<0<r\_{1}<r\_{3}$

2.函数$f(x)=cosx+\frac{1}{2}x$，$x\in [−\frac{π}{2},\frac{π}{2}]$的单调增区间为(    )

A. $[−\frac{π}{2},\frac{π}{6}]$ B. $[\frac{π}{6},\frac{π}{2}]$ C. $[−\frac{π}{2},\frac{π}{4}]$ D. $[\frac{π}{4},\frac{π}{2}]$

3.某同学家中备三种感冒药，金花清感颗粒$3$盒、连花清瘟胶囊$2$盒、清开灵颗粒$5$盒$.$若这三类药物能治愈感冒的概率分别为$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，他感冒时，随机从这几盒药物里选择一盒服用，则感冒被治愈的概率为(    )

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

4.一箱凤梨共有$10$个，其中有$8$个是优果，从这箱凤梨中随机抽取$2$个，恰有$1$个优果的概率为$p\_{1}.$某果园刺梨单果的质量$M($单位：$g)$服从正态分布$N\left(32,σ^{2}\right)$，且$P\left(30<M<34\right)=0.8$，$P\left(M\geq 34\right)=p\_{2}$，则(    )

A. $p\_{1}=p\_{2}$ B. $p\_{1}<p\_{2}$ C. $p\_{1}+p\_{2}<0.5$ D. $p\_{1}+p\_{2}>0.5$

5.在二项式$\left(\sqrt[ ]{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{n}$的展开式中，二项式系数的和为$64$，把展开式中所有的项重新排成一列，有理项都互不相邻的概率为(    )

A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

6.已知函数$f(x)=x^{3}+mx^{2}$，若$∀x\_{1}$，$x\_{2}\in R$，$x\_{1}\ne x\_{2}$，都有$\frac{f(x\_{1})−f(x\_{2})}{x\_{1}−x\_{2}}>−2$，则实数$m$的最大值为(    )

A. $\sqrt[ ]{3}$ B. $\sqrt[ ]{6}$ C. $2\sqrt[ ]{3}$ D. $2\sqrt[ ]{6}$

7.在空间直角坐标系$Oxyz$中，$Oxy$平面、$Oyz$平面、$Ozx$平面把空间分成了八个部分．在空间直角坐标系$Oxyz$中，确定若干个点，点的横坐标、纵坐标、竖坐标均取自集合$\left\{−2,5,9\right\}$，这样的点共有$n$个，从这$n$个点中任选$2$个，则这$2$个点在同一个部分的概率为(    )

A. $\frac{50}{351}$ B. $\frac{49}{351}$ C. $\frac{17}{117}$ D. $\frac{16}{117}$

8.$设f(x)=\frac{ln x^{2}}{x}$，$g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^{2}−mf\left(x\right)−1$，若$g\left(x\right)$在其定义域上有且仅有两个零点，则$m$的取值范围是(    )

A. $\left(1+\frac{2}{e},+\infty \right)$ B. $\left(\frac{2}{e}−\frac{e}{2},\frac{e}{2}−\frac{2}{e}\right)$ C. $\left(−\infty ,\frac{2}{e}−\frac{e}{2}\right)$ D. $\left(1−\frac{e}{2},1+\frac{e}{2}\right)$

二、多选题：本题共**3**小题，共**18**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9.下列命题正确的是(    )

A. 若随机变量$ξ$，$η$满足$η=2ξ−1$，$D(ξ)=3$，则$D(η)=6$
B. 若$P(A)>0$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B)$，则$P(A|\overline{B})=P(A)$
C. 若$X～H(5,10,30)$，则$E(X)=\frac{5}{3}$
D. 若$X～0−1$分布，$E(X)=\frac{1}{4}$，则$D(X)=\frac{1}{4}$

10.对于$a,d\in N^{∗}$，若$∃k\in N^{∗}$使$a=kd$，则称$d$是$a$的正因数，易知$k$也是$a$的正因数．正因数只有$1$与自身的数叫做素数，如：$2$、$3$、$5$、$7$、$11…….$若对于正整数$a$与$b$，它们之间最大公因数为$1$，则称$a$与$b$互素．已知一个正整数可以被唯一分解为一组素数的乘积：$n=p\_{1}^{a\_{1}}p\_{2}^{a\_{2}}⋅⋅⋅p\_{k}^{a\_{k}}$，其中$α\_{i}\in N^{∗}$，$p\_{i}$是两两不同的素数，则下列说法正确的是(    )

A. 从$A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$中随机取出两数，则它们互素的概率是$\frac{17}{21}$
B. $360$的正因数个数为$25$
C. $360$的所有正因数之和为$(2+1)^{3}(3+1)^{2}(5+1)$
D. $360$的所有正因数之积为$360^{12}$

11.布达佩斯的伊帕姆维泽蒂博物馆收藏的达$·$芬奇方砖是在正六边形上画了具有视觉效果的正方体图案$($如图$1)$把三片这样的达$·$芬奇方砖拼成图$2$的组合，这个组合再转换成图$3$所示的几何体．若图$3$中每个正方体的棱长为$1$，则(    )
A. $\vec{QC}=\vec{AD}+2\vec{AB}+2\vec{AA\_{1}}$
B. 异面直线$CQ$与$AD\_{1}$所成角正弦值为$\frac{\sqrt[ ]{34}}{6}$
C. 点$P$到直线$CQ$的距离是$\frac{\sqrt[ ]{19}}{3}$
D. $M$为线段$CQ$上的一个动点，则$\vec{ME}⋅\vec{MC}$的最大值为$3$

三、填空题：本题共**3**小题，每小题**5**分，共**15**分。

12.某小吃店的日盈利$y($单位：百元$)$与当天平均气温$($单位：$℃)$之间有如下数据：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x/℃$$ | $$−2$$ | $$−1$$ | $$0$$ | $$1$$ | $$2$$ |
| $y/$百元 | $$5$$ | $$4$$ | $$2$$ | $$2$$ | $$1$$ |

由表中数据可得回归方程$\hat{y}=ax+b$中$a=−1.$试预测当天平均气温为$−3.2℃$时，小吃店的日盈利约为          百元．

13.“指数找基友”是高中导数的重要思想，如$\left[e^{x}f\left(x\right)\right]^{′}=e^{x}\left(f\left(x\right)+f′\left(x\right)\right)$和$\left[\frac{f\left(x\right)}{e^{x}}\right]^{′}=\frac{f′\left(x\right)−f\left(x\right)}{e^{x}}$，这揭示了它们导数之间的奇妙关系．已知定义在$R$上的可导函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$满足以下关系：$f′\left(x\right)=g\left(x\right)$，$g′\left(x\right)=f\left(x\right)$，$f\left(x\right)+f\left(−x\right)=0$，$g\left(0\right)=1$，则$f\left(x\right)=$           ，$g\left(x\right)=$           ．

14.已知$\sum\_{k=1}^{n}k(1+x)^{n+k}=\sum\_{k=0}^{2n}a\_{k}x^{k}$，$a\_{n}=(n+1)C\_{2n+1}^{x}$，则$x=$          $.($用含有$n$的式子表示$)$

四、解答题：本题共**5**小题，共**77**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.为调查喜欢山地自行车项目是否和性别有关，某自行车店随机发放了$30$份问卷，并全部收回，经统计，得到如下$2×2$列联表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 男性 | 女性 |
| 喜欢 | $$12$$ | $$4$$ |
| 不喜欢 | $$6$$ | $$8$$ |

$(1)$能否有$99\%$的把握认为喜欢山地自行车项目和性别有关$?$

$(2)$在上述喜欢山地自行车项目的受访者中随机抽取$3$人，记其中男性的人数为$X$，求$X$的分布列．

附：$K^{2}=\frac{n(ad−bc)^{2}}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$P(K^{2}\geq k)$$ | $$0.050$$ | $$0.010$$ | $$0.001$$ |
| $$k$$ | $$3.841$$ | $$6.635$$ | $$10.828$$ |

16.已知$f\left(x\right)=e^{x}−x^{k}$，$k\in \left(0,+\infty \right)$

$(1)$若$k=e$，试证明：$∀x>0$，$f\left(x\right)\geq 0$恒成立$; (2)$若$k\in N^{∗}$，讨论$f\left(x\right)$的零点个数．

17.在空间几何体$ABC−DEF$中，四边形$ABED$，$ADFC$均为直角梯形，$∠FCA=∠CAD=∠DAB=∠ABE=\frac{π}{2}$，$AB=AC=CF=4$，$AD=5$，$BE=6$．

$(1)$如图$1$，若$∠CAB=\frac{π}{2}$，求直线$FD$与平面$BEF$所成角的正弦值；

$(2)$如图$2$，设$∠CAB=θ(0<θ<\frac{π}{2})$．

(ⅰ)求证：平面$BEF⊥$平面$DEF$；

(ⅱ)若二面角$E−BF−D$的余弦值为$\frac{\sqrt[ ]{33}}{11}$，求$cos θ$的值．

18.$2024$年世界羽毛球男、女团体锦标赛$($汤姆斯杯、尤伯杯$)5$日在四川成都落下帷幕，中国男女队在决赛中分别以$3$比$1$和$3$比$0$的比分战胜印度尼西亚男女队，捧起汤姆斯杯和尤伯杯，其中，中国女队是第$16$次捧起尤伯杯，中国男队则是第$11$次获得汤姆斯杯．羽毛球汤姆斯杯决赛实行五场三胜制，每场比赛采取三局两胜制，每一局比赛一方先得$21$分且领先至少$2$分则该局获胜；否则继续比赛，先领先$2$分的选手获胜，若双方打成$29$平，则先取得$30$分的一方直接赢得该局比赛，在整个比赛过程中，赢得一球得$1$分，并继续发球；否则对方得$1$分，并交换发球，已知在一场汤姆斯杯决赛中，若选手甲发球且甲获胜的概率为$\frac{2}{3}$，选手乙发球且甲获胜的概率为$\frac{1}{2}$，每一球比赛的结果相互独立，现甲、乙两名选手比赛至$27$平，且由甲发球．

$(1)$求甲共发两次球赢得比赛的概率；

$(2)$求甲以$30:29$的比分赢得比赛的概率；

$(3)$记比赛结束时乙发球的次数为$X$，求$X$的分布列及期望．

19.已知集合$A=\left\{1,2,3,...,n−1,n\right\}$．

$(1)$“算两次”思想在组合数学中有着重要应用．例如：对于一个$n$元集合$U$的所有子集个数，一方面有$N=C\_{n}^{0}+C\_{n}^{1}+...+C\_{n}^{n}$，另一方面：对于所有子集，每个$U$中的元素有“出现”和“不出现”两种选择，由分布计数原理可得$N=2⋅2⋅2⋅...⋅2=2^{n}$，因此有$C\_{n}^{0}+C\_{n}^{1}+...+C\_{n}^{n}=2^{n}.$令$S\left(B\right)=\sum\_{x\in B}^{ }x$，试用算两次思想化简$\sum\_{B⊆A}^{ }S\left(B\right)$；

$(2)$对于$U$的子集个数还可以这样理解：$2^{n}=\left(1+1\right)^{n}=1^{0}1^{n}C\_{n}^{0}+1^{1}1^{n−1}C\_{n}^{1}+...+1^{n}1^{0}C\_{n}^{n}$，展开式中每一项都唯一对应着$U$的一个子集．令$P\left(B\right)=\prod\_{x\in B}^{ }x$，试化简$\sum\_{B⊆A,B\ne ⌀}^{ }P\left(B\right)$；

$(3)$对偶原理也是组合数学的重要方法，例如数学王子高斯小时候在计算$1+2+...+100$的值时，他把$1$与$100$配对，$2$与$99$配对，从而化变量为常量，大大简化了计算．这其实就是对偶原理的一种体现．令$Q\left(B\right)=a\_{n}−a\_{n−1}+a\_{n−2}−...+\left(−1\right)^{n−1}a\_{1}$，其中$\left\{a\_{n}\right\}$是$B$中元素从小到大的一个排列，试用对偶原理化简$\sum\_{B⊆A}^{ }Q\left(B\right)$．