**江苏省仪征中学2024-2025学年度第二学期高二数学周练（11）**

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设随机变量$X$服从正态分布$N(4,σ^{2})$，若$P(X<2a−1)=P(X>a+3)$，则实数$a=$(    )

A.2 B. $1$ C. $\frac{2}{3}$ D. $4$

2.已知$\vec{a}=(2,−1,3),\vec{b}=(−1,4,−2),\vec{c}=(4,5,λ)$，如$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三个向量不能构成空间直角坐标系上的一组基底，则实数$λ$为(    )

A. $0$ B. $5$ C. $9$ D. $3$

3.甲、乙两名选手进行围棋比赛，已知每局比赛结果只有胜负两种，且甲每局获胜的概率为$\frac{2}{3}.$若比赛采用$3$局$2$胜制$($先胜$2$局者赢得比赛$)$，则甲赢得比赛的概率为(    )

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{20}{27}$

4.$\left(1+x+x^{2}\right)\left(1−x\right)^{6}$的展开式中$x^{3}$项的系数是(    )

A. $−6$ B. $−1$ C. $−11$ D. $41$

5.若函数$f(x)=\frac{x^{3}}{3}−ax^{2}+(2a^{2}−4)x−3$在$x=2$处取得极小值，则实数$a=$(    )

A. $−2$ B. $2$ C. $2$或$0$ D. $0$

6.我市某校共有$1500$名学生在学校用午餐，每次午餐只能选择在楼上或楼下的一个食堂用餐$.$经统计，当天在楼上食堂用午餐的学生中，有$10\%$的学生第二天会到楼下食堂用午餐$;$而当天在楼下食堂用午餐的学生中，有$15\%$的学生第二天会到楼上食堂用午餐，则一学期后，在楼上食堂用午餐的学生数大约为(    )

A. $700$ B. $800$ C. $900$ D. $1000$

7.若直线$y=ax+1$与曲线$y=lnx+b$相切，则$b−a$的最大值为(    )

A. $−1$ B. $−2$ C. $1$ D. $2$

8.甲箱中有$2$个红球和$2$个黑球，乙箱中有$1$个红球和$3$个黑球$.$先从甲箱中等可能地取出$2$个球放入乙箱，再从乙箱中等可能地取出$1$个球，记事件“从甲箱中取出的球恰有$i$个红球”为$A\_{i}(i=0,1,2)$，“从乙箱中取出的球是黑球”为$B$，则(    )

A. $P(A\_{0})=\frac{1}{3}$ B. $P(B|A\_{1})=\frac{5}{6}$ C. $P(B)=\frac{5}{9}$ D. $P(A\_{2}|B)=\frac{1}{8}$

二、多选题：本题共**3**小题，共**18**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9.已知$(\sqrt[3]{x}−\frac{2}{\sqrt[ ]{x}})^{n}$的展开式第$6$项和第$8$项的二项式系数相等，下列说法正确的有(    )

A. $n=12$ B. 第$3$项的系数为$66$
C. 展开式中有理项共有$3$项 D. 奇数项系数和为$3^{12}+1$

10.某人有$10000$元全部用于投资，现有甲，乙两种股票可供选择．已知每股收益的分布列分别如表$1$和表$2$所示，且两种股票的收益相互独立，假设两种股票的买入价都是每股$1$元．则下列说法正确的有：

表$1$甲每股收益的分布列

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 收益$X$元 | $$−1$$ | $$0$$ | $$2$$ |
| 概率 | $$0.1$$ | $$0.3$$ | $$0.6$$ |

表$2$乙每股收益的分布列

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 收益元$Y$ | $$0$$ | $$1$$ | $$2$$ |
| 概率 | $$0.3$$ | $$0.3$$ | $$0.4$$ |

A. 甲每股收益的数学期望大于乙每股收益的数学期望
B. 相对于投资甲种股票，投资乙种股票更稳妥$($方差小$)$
C. 此人投资甲，乙两种股票，收益的数学期望之和为$11000$元
D. 此人按照$1:1$的资金分配方式投资甲，乙两种股票时，收益的方差之和最小

11.已知函数$f(x)=x+a(1−e^{x})$，则下列说法正确的有(    )

A. 曲线$y=f(x)$恒过定点 B. 若$a=1$，则$f(x)$的极小值为$0$
C. 若$a<0$，则$f(x)<f(x^{2}+1)$ D. 若$a>2$，则$f(x)$的最大值大于$2−a$

三、填空题：本题共**3**小题，每小题**5**分，共**15**分。

12.随机变量$ξ$~*N*(0,1),$Φ$(*x*)=*P*($ξ\leq $*x*),若$Φ$(-1.53)=0.063,则*P*(|$ξ$|<1.53)=          .

13.已知$f(x)=(2x+1)^{n}$展开式中所有项的二项式系数之和为$1024$，且$(2x+1)^{n}=a\_{0}+a\_{1}(x+1)+a\_{2}(x+1)^{2}+\cdots +a\_{n}(x+1)^{n}$，则$f\left(9\right)$除以$6$的余数为          ；$a\_{1}+2a\_{2}+\cdots +na\_{n}=$           ．

14.三分损益法是古代中国发明制定音律时所用的生律法$.$三分损益包含“三分损一”“三分益一”两层含义$.$三分损一是指将原有长度作$3$等分而减去其$1$份，即原有长度$×\frac{3−1}{3}=$生得长度；而三分益一则是指将原有长度作$3$等分而增添其$1$份，即原有长度$×\frac{3+1}{3}=$生得长度$.$两种方法可以交替运用、连续运用，各音律就得以辗转相生$.$假设能发出第一个基准音的乐器的长度为$243$，每次损益的概率为$\frac{1}{2}$，则经过$5$次三分损益得到的乐器的长度为$128$的概率为           ．

四、解答题：本题共**5**小题，共**77**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.$($本小题$13$分$)$

已知在二项式$\left(x^{2}+\frac{2}{x}\right)^{n}$的展开式中，第$5$项为常数项．

$(1)$求$n$；

$(2)$求$\left(x^{2}+\frac{2}{x}\right)^{n}$的展开式中所有奇数项的二项式系数之和；

$(3)$在$\left(x^{3}−1\right)\left(x^{2}+\frac{2}{x}\right)^{n}$的展开式中，求含$x^{6}$的项．

16.$($本小题$15$分$)$
已知函数$f(x)=\frac{x}{2a}−alnx$．
$(1)$当$a=\sqrt[ ]{e}$时，求函数$f(x)$的单调区间；
$(2)$若$f(x)\geq \sqrt[ ]{x}$对$x\in (0,+\infty )$恒成立，求实数$a$的取值范围．$(e$是自然对数的底数$)$．

17.$($本小题$15$分$)$

学校师生参与创城志愿活动$.$高二$(1)$班某小组有男生$4$人，女生$2$人，现从中随机选取$2$人作为志愿者参加活动．

$(1)$求在有女生参加活动的条件下，恰有一名女生参加活动的概率；

$(2)$记参加活动的女生人数为$X$，求$X$的分布列及期望$E\left(X\right)$；

$(3)$若志愿活动共有卫生清洁员$､$交通文明监督员$､$科普宣传员三项可供选择$.$每名女生至多从中选择$2$项活动，且选择参加$1$项或$2$项的可能性均为$\frac{1}{2}$；每名男生至少从中选择参加$2$项活动，且选择参加$2$项或$3$项的可能性也均为$\frac{1}{2}.$每人每参加$1$项活动可获得$3$个工时，记随机选取的两人所得工时之和为$Y$，求$Y$的期望$E\left(Y\right)$．

18.$($本小题$17$分$)$
如图，在四棱锥$P−ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$PA⊥$平面$ABCD$，$PB=\sqrt[ ]{5}$，$PC=\sqrt[ ]{6}$，$PD=\sqrt[ ]{2}$．


$(1)$证明：平面$PAB⊥$平面$PBC;$

$(2)$求二面角$B−PC−D$的余弦值$;$

$(3)$求点$C$到平面$PBD$的距离．

19.$($本小题$17$分$)$

$2024$年高三数学适应性考试中选择题有单选和多选两种题型组成．单选题每题四个选项，有且仅有一个选项正确，选对得$5$分，选错得$0$分，多选题每题四个选项，有两个或三个选项正确，全部选对得$6$分，部分选对得$3$分，有错误选择或不选择得$0$分．

$(1)$已知某同学对其中$4$道单选题完全没有答题思路，只能随机选择一个选项作答，且每题的解答相互独立，记该同学在这$4$道单选题中答对的题数为随机变量$X$．

$(i)$求$P(X=3)$；

$(ii)$求使得$P(X=k)$取最大值时的整数$k$；

$(2)$若该同学在解答最后一道多选题时，除确定$B$，$D$选项不能同时选择之外没有答题思路，只能随机选择若干选项作答，已知此题正确答案是两选项与三选项的概率均为$\frac{1}{2}$，求该同学在答题过程中使得分期望最大的答题方式，并写出得分的最大期望．