2024 — 2025 学年度上学期期末考试高三试题参考答案

数　学

命题人：旅顺中学　王 莹　　审校：命题工作专家组

一、选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. A　2. C　3. A　4. C　5. B　6. C　7. D　8. B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. AC　10. ABC　11. ABD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $\frac{45}{4}$　13. $2\sqrt{2}+1$　14. $(-\infty，0)\cup(0,1)$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15 解：（1）证明∵ADC 和 BDC 为两个完全相同的三角板

∴拼接前有 $CD\perp AD$ 和 $CD\perp BD$

折后不变，即 $CD\perp PD$ 和 $CD\perp BD$

又 $PD\cap BD=D$，$PD\subset$面 PBD，$BD\subset$面 PBD

∴$CD\perp$面 PBD……………………………………………………………………..4 分

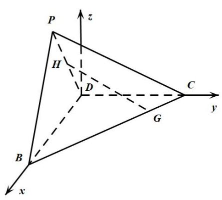
（2）由①可知 $CD\perp PD$ 和 $CD\perp BD$

∴二面角 P-CD-B 的平面角为$\angle PDB$，即$\angle PDB=60°$

又∵$PD=BD$∴ ΔPDB 为等边三角形，$CD\perp$面 PBD

$CD\subset$面 BCD, 面 $BCD\perp$面 PBD,面 $BCD\cap$面 $PBD=BD$,

在平面PBD中, 过 D 作 $DQ\perp BD$, 以 D 为坐标原点，以$\overrightarrow{DB}$为 x 轴正方向，以$\overrightarrow{DC}$为 y 轴正方向，以$\overrightarrow{DQ}$为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系. ……………………………5 分



令 $PD=DB=DC=2$，则 $C(0，2，0)$，$B(2，0，0)$，$P(1，0，\sqrt{3})$，$H\left(\frac{1}{2}，0，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

则$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BH}=(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$

因为点G是线段BC上的四等分点且靠近点C，

所以$\overrightarrow{BG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$，所以$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BG}=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ………………7 分

设平面PBC的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=\sqrt{3}$，$z=1$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3}，1)$. ………………………………9 分

设直线 GH 与平面 PBC 所成角为θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}，\overrightarrow{HG}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{HG}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{HG}|}=\left|\frac{0\times\sqrt{3}+\left(-\frac{3}{2}\right)\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times1}{\sqrt{(0)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1^2}}\right|=\frac{\sqrt{7}}{7}$

……………………………11 分

因为且$sin^2\theta+cos^2\theta=1$，$\theta$为锐角，所以$cos\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$，又因为$tan\theta=\frac{sin\theta}{cos\theta}$，所以$tan\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以，直线 GH 与平面 PBC 所成角的正切值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$. …………………………………13 分

16. 解:（1）$\because a>b\quad\therefore A>B$，$A-B>0$

$\therefore cos(A-B)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$sin(A-B)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$………………………2 分

$sinA=sin(A-B+B)=sin(A-B)\cdot cosB+cos(A-B)\cdot sinB$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}cosB+\frac{\sqrt{5}}{5}sinB$…………………………………4 分

又$\frac{a}{b}=\frac{sinA}{sinB}=\frac{3}{\sqrt{5}}$，$\therefore sinA=\frac{3\sqrt{5}}{5}sinB$

$\therefore\frac{3\sqrt{5}}{5}sinB=\frac{2\sqrt{5}}{5}cosB+\frac{\sqrt{5}}{5}sinB$，$\therefore sinB=cosB$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$. …………………………7 分

（2）方法一：

在$\triangle ABC$中，$cosA=cos(A-B+B)=cos(A-B)\cdot cosB-sin(A-B)\cdot sinB$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$sinA=\frac{3\sqrt{5}}{5}sinB=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………………………………10 分

$\therefore sinC=sin(A+B)=sinAcosB+cosAsinB=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$………12 分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times absinC=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3}{2}$.

又因为M为$\triangle ABC$的重心，M到边 AC 的距离为B到 AC 的距离的$\frac{1}{3}$倍，

$\therefore S_{\triangle AMC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$. ………………………………………………15 分

方法二（酌情赋分）：$cosA=cos(A-B+B)=cos(A-B)\cdot cosB-sin(A-B)\cdot sinB$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得：$3^2=c^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-2c\times\sqrt{5}\times cosA$

即：$c^2+\sqrt{2}c-4=0$，解得：$c=\sqrt{2}$.

$cosC=-cos(A+B)=-cosAcosB+sinAsinB=-\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

延长AM，交BC于D，在$\triangle ADC$中，

$\therefore AD^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-2\times\frac{3}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{5}{4}$，$\therefore AD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore MA=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

由正弦定理得：$\frac{\frac{3}{2}}{sin\angle MAC}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{sinC}$，$\therefore sin\angle MAC=\frac{3}{5}$

$\therefore S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$.

17.解：（1）$f(x)=f'(1)e^{x-1}-f'(-1)x+x^2$

$f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f'(-1)+2x$ ……………………1 分

令$x=1$，有$f'(1)=f'(1)e^0-f'(-1)+2$. 求得$f'(-1)=2$. ……………………2 分

令$x=-1$，有$f'(-1)=f'(1)e^{-2}-f'(-1)-2$，$f'(1)e^{-2}=6$.

求得$f'(1)=6e^2$…………………………………………………………………4 分

（2）$f'(-1)=2$，$f'(1)=6e^2$

有$f(x)=6e^{x+1}-2x+x^2$

$f'(x)=6e^{x+1}-2+2x$……………………………………………………………5 分

令$g(x)=f'(x)$，$g'(x)=6e^{x+1}+2>0$

所以$f'(x)$在R上单调递增.

$f'(-2)=\frac{6}{e}-6<0$，$f'(-1)=2>0$

故$\exists\delta\in(-2,-1)$使$f'(\delta)=0$

$x\in(-\infty,\delta)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

$x\in(\delta,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. …………………………………………7 分

所以$f(x)_{min}=f(\delta)=6e^{\delta+1}-2\delta+\delta^2$

又当$\delta\in(-2,-1)$时，

$6e^{\delta+1}>0$，$-2\delta+\delta^2>0$

所以，$f(\delta)>0$，

故$f(x)>0$ 恒成立. $f(x)$在R上无零点. ……………………………………………9 分

（3）令$h(x)=e^x-x-1(x>-1)$

$h'(x)=e^x-1>0$ 时，$x>0$

所以$h(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)\geq h(0)=0$

故有$e^x\geq x+1$……………………① ………………………………………11 分

令$m(x)=x+1-ln(x+2)$，$(x>-1)$

$m'(x)=1-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}$

$x>-1$ 时，$m'(x)>0$

$m(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增,$m(x)>m(-1)=0$

故有$x+1>ln(x+2)$…………………………②

由①，②可得$e^x > ln(x+2)$……………………………………………………13 分

$6e^{x+1} > 6e\,ln(x+2)$

又$x>-1$时，$-2x+x^2\geq -1$ 恒成立

所以 $6e^{x+1}-2x+x^2 > 6e\,ln(x+2)-1$

即$f(x) > 6e\,ln(x+2)-1$. ……………………………………………………15 分

18.（1）A同学参赛得分X所有取值为 0,4,8,12.

$P(X=0)=\frac{1}{4}$

$P(X=4)=\frac{3}{4}\times\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{3}{20}$

$P(X=8)=\frac{3}{4}\times\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$

$P(X=12)=\frac{3}{4}\times\frac{C_2^0C_4^3}{C_6^3}=\frac{3}{20}$

所以X的分布列为

X	0	4	8	12
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$

………………………………………………………………………………4 分

$E(X)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{6}\times4\times4=6$，　　$E(Y)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}\times3\times4=4$. ……………………………6 分

（2）①设乙选手在三次测试中得分为ξ，则ξ所有取值为 0,4,8,12.

$P(\xi=0)=C_3^0(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

$P(\xi=4)=C_3^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$

$P(\xi=8)=C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1=\frac{2}{9}$

$P(\xi=12)=C_3^3(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$

ξ的分布列为

ξ	0	4	8	12
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

…………………………………………………………………10 分

②设该队在“编程调试与仿真设计”实操测试比赛中总得分为η

则η所有取值为 0,4,8,12,14,18,22,24,28,32.

在甲选手已通过测试的条件下概率如下：

$P(\eta=0)=C_3^0(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

$P(\eta=4)=C_3^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2\times C_2^0(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$

$P(\eta=8)=C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1\times C_2^0(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{18}$

$P(\eta=12)=C_3^3(\frac{1}{3})^3\times C_2^0(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{108}$

$P(\eta=14)=C_3^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2\times C_2^1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^1=\frac{2}{9}$

$P(\eta=18)=C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1\times C_2^1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{9}$

$P(\eta=22)=C_3^3(\frac{1}{3})^3\times C_2^1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{54}$

$P(\eta=24)=C_3^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2\times C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$

$P(\eta=28)=C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1\times C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{18}$

$P(\eta=32)=C_3^3(\frac{1}{3})^3\times C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{108}$

η的分布列为

η	0	4	8	12	14	18	22	24	28	32
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{108}$

……………………………………………………………………………………15 分

$$E(\eta)=0\times\frac{8}{27}+4\times\frac{1}{9}+8\times\frac{1}{18}+12\times\frac{1}{108}+14\times\frac{2}{9}+18\times\frac{1}{9}+22\times\frac{1}{54}+24\times\frac{1}{9}$$

$$+28\times\frac{1}{18}+32\times\frac{1}{108}=\frac{298}{27}$$

因为甲选手通过测试的概率为$\frac{3}{4}$,所以总得分的期望为$\frac{3}{4}\times\frac{298}{27}=\frac{149}{18}$. ………………………17 分

②方法二（酌情赋分）：总得分设为Z，因为乙选手和丙选手得分分别服从二项分布，

则$E(Z)=\frac{3}{4}\times 3\times\frac{1}{3}\times 4+\frac{3}{4}\times(1-\frac{8}{27})\times 2\times\frac{1}{2}\times 10=\frac{149}{18}$.

19.（1）因为椭圆C_1：$\frac{x^2}{6}+y^2=1$，所以椭圆的左右两个焦点坐标为$F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$

所以双曲线C的焦点坐标也是$F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$，所以双曲线C中，$c^2=5$

设双曲线C的方程是：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5-a^2}=1$

将点$(\sqrt{2},2)$代入得：$\frac{2}{a^2}-\frac{4}{5-a^2}=1$，$a^4-11a^2+10=1$，

化简得：$(a^2-1)(a^2-10)=0$，

解得：$a^2=1$ 或$a^2=10$.

又因为$a^2<c^2$，所以$a^2=10$（舍）

所以双曲线C的标准方程是：$x^2-\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………..4 分

（2）(i)当直线l_1,l_2中有一条直线的斜率为 0，另一条直线的斜率不存在时，

直线MN与x轴重合，不符合题意；

当直线l_1,l_2中有一条直线的斜率为 2 或-2，另一条直线的斜率为$-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}$时，

直线l_1,l_2与渐近线无交点，不符合题意；

所以直线l_1,l_2均存在且不和渐近线平行. ……………………………………………6 分

设l_1的方程为：$x=my+x_n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

双曲线C的渐近线方程为：$y=2x$和$y=-2x$

由$\begin{cases}x=my+x_n\\ y=2x\end{cases}$，得$(1-2m)x=x_n$，所以$\begin{cases}x=\frac{x_n}{1-2m}\\ y=\frac{2x_n}{1-2m}\end{cases}$，所以$A\left(\frac{x_n}{1-2m},\frac{2x_n}{1-2m}\right)$.

同理：$B\left(\frac{x_n}{1+2m},\frac{-2x_n}{1+2m}\right)$. ……………………………………………8 分

所以$M\left(\frac{x_n}{1-4m^2},\frac{4mx_n}{1-4m^2}\right)$.同理：$N\left(\frac{m^2x_n}{m^2-4},\frac{-4mx_n}{m^2-4}\right)$ ……………………10 分

因为M、N、Q三点共线，所以$\overrightarrow{QM}=\left(\frac{x_n}{1-4m^2}-t_n,\frac{4mx_n}{1-4m^2}\right)$, $\overrightarrow{NM}=\left(\frac{4x_n(m^4-1)}{(1-4m^2)(m^2-4)},\frac{-12mx_n(m^2+1)}{(1-4m^2)(m^2-4)}\right)$,

所以$\left(\frac{x_n}{1-4m^2}-t_n\right)\left(\frac{-12mx_n(m^2+1)}{(1-4m^2)(m^2-4)}\right)=\left(\frac{4mx_n}{1-4m^2}\right)\left(\frac{4x_n(m^4-1)}{(1-4m^2)(m^2-4)}\right)$，化简得：$t_n=-\frac{x_n}{3}$;

因为$x_n=2^n$，所以$t_n=-\frac{2^n}{3}$; ……………………………………………………13 分

(ii) 因为 $a_n=|PQ|=\frac{4}{3}\cdot 2^n$

所以$b_n=\frac{n+2}{n(n+1)a_n}=\frac{n+2}{\frac{4}{3}n(n+1)2^n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{n+2}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)$……………………15 分

所以$T_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times2^2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\times2^2}-\frac{1}{3\times2^3}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3\times2^3}-\frac{1}{4\times2^4}\right)+\cdots+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times2^2}+\frac{1}{2\times2^2}-\frac{1}{3\times2^3}+\frac{1}{3\times2^3}-\frac{1}{4\times2^4}+\cdots+\frac{1}{n2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{(n+1)2^{n+2}}$$

所以$T_n=\frac{3}{4}-\frac{3}{(n+1)2^{n+2}}$……………………………………………………17 分