郑州市2025年高中毕业年级第一次质量预测

数学试题卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-2>0\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cap B$ 的子集的个数为

A. 8　　B. 7　　C. 4　　D. 3

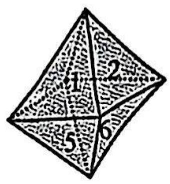
2. 若复数 z 满足 $(1+i)(z+i)=2$，其中 i 为虚数单位，则 z 的虚部为

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，下列结论正确的是

A. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　　B. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$　　C. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

4. 将一枚质地均匀的正八面体骰子连续抛掷 2 次，其八个面上分别标有 1～8八个数字，记录骰子与地面接触的面上的点数，用 X,Y 表示第一次和第二次抛掷的点数，则 $P(\max(X,Y)=8\mid\min(X,Y)=4)=$



A. $\frac{2}{15}$　　B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{9}{25}$

5. 若 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点，则 $\omega=$

A. 2　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

6. 关于函数 $f(x)=2^{\cos x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$，下列结论错误的是

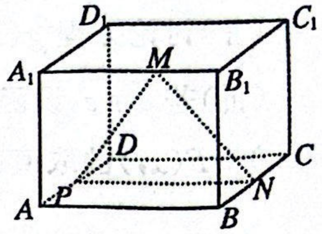
A. 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

B. 函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称

C. 函数 $f(x)$的最小正周期为 2π

D. 函数 $f(x)$的最小值为 2

7. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 M,N,P 分别为 A_1B_1，BC 和 AD 的中点，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle DAB=60°$且 $AB=\sqrt{2}AA_1$. 记 MN 与 AA_1 所成的角为 α，MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 β，二面角 $M-PN-B$ 的平面角为 γ，则



A. $\alpha>\beta>\gamma$　　　　B. $\beta>\gamma>\alpha$

C. $\gamma>\alpha>\beta$　　　　D. $\alpha>\gamma>\beta$

8. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$，$g(x)=\ln x-ax$，对 $\forall x_1\in(-1,+\infty)$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立. 下列结论正确的是

A. $\exists x_0\in(0,2)$，使得 $f'(x_0)=0$

B. 函数 $y=f(x)$的最大值为 0

C. a 的取值范围为$[\frac{1}{e},+\infty)$

D. 过$(0,0)$作 $y=f(x)$的切线，有且只有一条

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 下列结论正确的是

A. 若随机变量 $X\sim B(9,\frac{2}{3})$，则 $D(3X+1)=18$

B. 将总体划分为 2 层，通过分层随机抽样，得到两层的样本平均数和样本方差分别为 $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$ 和 s_1^2，s_2^2，若 $\overline{x}_1=\overline{x}_2$，则总体方差 $s^2=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2)$

C. 某物理量的测量结果服从正态分布 $N(10,\sigma^2)$，σ 越大，该物理量在一次测量中在$(9.8,10.2)$的概率越大

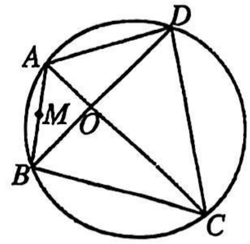
D. 已知某 4 个数据的平均数为 5，方差为 3，现又加入一个数据 5，此时这 5 个数据的方差为 2.4

10. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=2\log_2(1+a_n)-1$. 若在数列$\{b_n\}$中去掉$\{a_n\}$的项，余下的项组成数列$\{c_n\}$，则

A. $a_1+a_2+a_3+a_4=26$　　　　　　B. $b_5=10$

C. $a_4<b_{15}<a_5$　　　　　　D. $c_1+c_2+\cdots+c_{10}=170$

11. 如图，经过坐标原点 O 且互相垂直的两条直线 AC 和 BD 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 相交于 A,C,B,D 四点，M 为弦 AB 的中点，下列结论正确的是



A. AO 长度的最大值为 $2\sqrt{2}$

B. 线段 BD 长度的最小值为 $2\sqrt{2}$

C. 点 M 的轨迹是一个圆

D. 四边形 $ABCD$ 面积的取值范围为 $\left[4\sqrt{2},\ 6\right]$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$，双曲线 C 上一点 P 到一个焦点的距离为 4，则 P 到另一个焦点的距离为________.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E，F 分别为 AD，AB 上的点，当 $\triangle AEF$ 的周长为 4 时，$\triangle AEF$ 面积的最大值为________.

14. 甲、乙两人各有 4 张卡片，每张卡片上分别标有 1，2，3，4 四个数字之一. 两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，甲、乙各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较卡片上数字的大小，数字大者胜，然后各自舍弃此轮所选卡片（舍弃的卡片在此后的轮次中不能使用）. 则四轮比赛中，甲、乙每轮所出数字大小均不相同的情况共有________种.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题 13 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边为 a，b，c，已知 $b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}\,bc$，$2\sin(C-A)=\sin B$.

（Ⅰ）求 $\sin C$；

（Ⅱ）设 $BC=10$，求 BC 边上的高.

16.(本小题 15 分)

已知两定点 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,动点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{2}|F_1F_2|$.

(Ⅰ)求点 P 的轨迹方程;

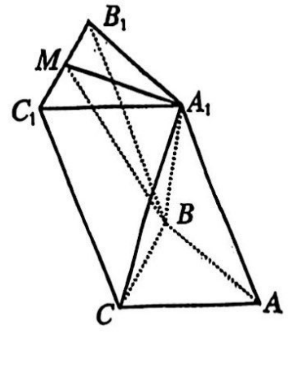
(Ⅱ)过 $F_2(1,0)$ 的直线 l 与动点 P 的轨迹交于两点 A,B,与直线 $x=2$ 交于点 C,设 O 为坐标原点,若 $S_{\triangle OAC}:S_{\triangle OBC}=3:1$,求直线 l 的方程.

17.(本小题 15 分)

如图,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,M 为 B_1C_1 的中点,底面 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,且 $AB=AC=\frac{1}{2}AA_1=2$.

(Ⅰ)若 A_1 在底面 ABC 内的射影为点 B,求点 A 到平面 A_1BC 的距离;

(Ⅱ)若 A_1 在底面 ABC 内的射影为 BC 的中点,求平面 A_1MB 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.



18.（本小题 17 分）

已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，$y=f(x)$ 关于 $y=x$ 对称的函数记为 $y=g(x)$.

（Ⅰ）若 $a>1$，方程 $f(x)-g(x)=0$ 有且只有一个实数解，求 a 的值；

（Ⅱ）讨论方程 $g(x)-x^a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上实数解的个数；

（Ⅲ）若 $a=e$，设函数 $F(x)=2\sqrt{x}-f(x)$，若 $F'(x_1)=F'(x_2)(x_1\neq x_2)$，求 $F(x_1)+F(x_2)$ 的取值范围.

19.(本小题 17 分)

如果数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$,$|a_n-a_{n-1}|=p$(p为常数,$n\geqslant 2$, $n\in \mathbf{N}$),则称数列$\{a_n\}$为α数列,已知项数为n的数列$\{a_n\}$的所有项的和为T_n,且$\{a_n\}$为α数列.

(Ⅰ)若$n=4$,$p=1$,$a_4=1$,写出所有可能的T_n的值;

(Ⅱ)若$n=101$,$p=5$,证明:“$a_{101}=500$”是“数列$\{a_n\}$为递增数列”的充要条件;

(Ⅲ)若$n\geqslant 2$,$p=5$,证明:若$T_n=0$,则$n=4k$或$n=4k+1$,($k\in \mathbf{N}^*$).