## §12.2　复数的运算

### 第1课时　复数的加法、减法、乘法运算

学习目标　1.掌握复数代数形式的加减运算.2.理解复数乘法的运算法则，能进行复数的乘法运算.3.掌握共轭复数的概念及应用．

知识点一　复数的加减运算

1．复数加减的运算法则

设*z*1＝*a*＋*b*i，*z*2＝*c*＋*d*i(*a*，*b*，*c*，*d*∈**R**)是任意两个复数，那么(1)*z*1＋*z*2＝(*a*＋*c*)＋(*b*＋*d*)i；(2)*z*1－*z*2＝(*a*－*c*)＋(*b*－*d*)i.

提示：复数的加、减运算法则是一种新的规定，可以类比多项式合并同类项来理解和记忆．

2．加法运算律

对任意*z*1，*z*2，*z*3∈**C**，有(1)*z*1＋*z*2＝*z*2＋*z*1；

(2)(*z*1＋*z*2)＋*z*3＝*z*1＋(*z*2＋*z*3)．

知识点二　复数的乘法运算

1．复数的乘法法则

设*z*1＝*a*＋*b*i，*z*2＝*c*＋*d*i(*a*，*b*，*c*，*d*∈**R**)，

*z*1*z*2＝(*a*＋*b*i)(*c*＋*d*i)＝(*ac*－*bd*)＋(*ad*＋*bc*)i.

2．乘法运算律

对于任意*z*1，*z*2，*z*3∈**C**，有

|  |  |
| --- | --- |
| 交换律 | *z*1*z*2＝*z*2*z*1 |
| 结合律 | (*z*1*z*2)*z*3＝*z*1(*z*2*z*3) |
| 乘法对加法的分配律 | *z*1(*z*2＋*z*3)＝*z*1*z*2＋*z*1*z*3 |

知识点三　共轭复数

1．把实部相等、虚部互为相反数的两个复数叫作互为共轭复数．

2．复数*z*＝*a*＋*b*i(*a*，*b*∈**R**)的共轭复数记作，＝*a*－*b*i.

3．当复数*z*＝*a*＋*b*i(*a*，*b*∈**R**)的虚部*b*＝0时，*z*＝，也就是说，实数的共轭复数仍是它本身．

提示：复数*z*＝*a*＋*b*i(*a*，*b*∈**R**)与＝*a*－*b*i互为共轭复数，(1)若*z*＝，则*z*为实数；

(2)*z*＝*a*2＋*b*2.

1．(1＋3i)＋(－2＋i)＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－1＋4i

2．若*z*＋3－2i＝4＋i.则*z*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　1＋3i

3．(1＋i)(1－i)＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　2

4．若*z*＝1－3i，则＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　1＋3i

一、复数的加减运算

例1　计算：

(1)(3＋5i)＋(3－4i)；

(2)(－3＋2i)－(4－5i)；

(3)(5－5i)＋(－2－2i)－(3＋3i)．

解　(1)(3＋5i)＋(3－4i)＝(3＋3)＋(5－4)i＝6＋i.

(2)(－3＋2i)－(4－5i)

＝(－3－4)＋[2－(－5)]i＝－7＋7i.

(3)(5－5i)＋(－2－2i)－(3＋3i)

＝(5－2－3)＋[－5＋(－2)－3]i＝－10i.

反思感悟　复数加减运算法则的记忆方法

(1)复数的实部与实部相加减，虚部与虚部相加减．

(2)把i看作一个字母，类比多项式加减中的合并同类项．

跟踪训练1　(1)计算：(5－6i)＋(－2－i)－(3＋4i)；

(2)已知复数*z*满足*z*＋1－3i＝5－2i，求*z*.

解　(1)(5－6i)＋(－2－i)－(3＋4i)

＝[(5－2)＋(－6－1)i]－(3＋4i)

＝(3－7i)－(3＋4i)

＝(3－3)＋(－7－4)i＝－11i.

(2)∵*z*＋1－3i＝5－2i，

∴*z*＝(5－2i)－(1－3i)＝4＋i.

二、复数的乘法运算

例2　计算：

(1)(1－i)(1＋i)＋(－1＋i)；

(2)(2－i)(－1＋5i)(3－4i)＋2i.

解　(1)(1－i)(1＋i)＋(－1＋i)＝1－i2－1＋i＝1＋i.

(2)(2－i)(－1＋5i)(3－4i)＋2i

＝(－2＋10i＋i－5i2)(3－4i)＋2i

＝(－2＋11i＋5)(3－4i)＋2i

＝(3＋11i)(3－4i)＋2i

＝(9－12i＋33i－44i2)＋2i

＝53＋21i＋2i＝53＋23i.

反思感悟　(1)三个或三个以上的复数相乘，可按从左向右的顺序运算，或利用结合律运算．混合运算的顺序与实数的运算顺序一样．

(2)平方差公式、完全平方公式等在复数范围内仍然成立．一些常见的结论要熟悉：i2＝－1，(1±i)2＝±2i.

跟踪训练2　若复数(*m*2＋i)(1＋*m*i)是实数，则实数*m*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－1

解析　∵(*m*2＋i)(1＋*m*i)＝*m*2－*m*＋(*m*3＋1)i是实数，

∴*m*3＋1＝0，则*m*＝－1.

三、共轭复数的概念

例3　复数*z*满足*z*·＋2i*z*＝4＋2i，求复数*z*的共轭复数．

解　设*z*＝*x*＋*y*i(*x*，*y*∈**R**)，则＝*x*－*y*i.

∵*z*·＋2i*z*＝4＋2i，∴*x*2＋*y*2＋2i(*x*＋*y*i)＝4＋2i，

∴(*x*2＋*y*2－2*y*)＋2*x*i＝4＋2i.

∴解得或

∴*z*＝1＋3i或*z*＝1－i.

∴*z*的共轭复数为＝1－3i或＝1＋i.

反思感悟　(1)有关复数*z*及其共轭复数的题目，注意共轭复数的性质：①设*z*＝*a*＋*b*i(*a*，*b*∈**R**)，则*z*·＝*a*2＋*b*2.②*z*∈**R**⇔*z*＝.

(2)紧紧抓住复数相等的充要条件，把复数问题转化成实数问题是解决本题的关键，正确熟练地进行复数运算是解题的基础．

跟踪训练3　已知*z*∈**C**，为*z*的共轭复数，若*z*·－3i＝1＋3i，求*z*.

解　设*z*＝*a*＋*b*i(*a*，*b*∈**R**)，

则＝*a*－*b*i(*a*，*b*∈**R**)．

由题意得(*a*＋*b*i)(*a*－*b*i)－3i(*a*－*b*i)＝1＋3i，

即*a*2＋*b*2－3*b*－3*a*i＝1＋3i，

则有解得或

所以*z*＝－1或*z*＝－1＋3i.

1．若复数*z*满足*z*＋(3－4i)＝1，则*z*的虚部是(　　)

A．－2 B．4 C．3 D．－4

答案　B

解析　∵*z*＋(3－4i)＝1，∴*z*＝－2＋4i，故*z*的虚部是4.

2．实数*x*，*y*满足*z*1＝*y*＋*x*i，*z*2＝*y*i－*x*，且*z*1－*z*2＝4，则的值是(　　)

A．1 B．2 C．－2 D．－1

答案　A

解析　*z*1－*z*2＝(*y*＋*x*)＋(*x*－*y*)i＝4，

即∴*x*＝*y*＝2，则＝1.

3．若复数*z*满足*z*＋(2－3i)＝－1＋2i，则*z*＋2－5i＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－1

解析　∵*z*＝－1＋2i－2＋3i＝－3＋5i，

∴*z*＋2－5i＝－3＋5i＋2－5i＝－1.

4．定义一种运算：＝*ad*－*bc*.则复数的共轭复数是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　－1－3i

解析　∵＝3i(1＋i)＋2＝－1＋3i，

∴其共轭复数为－1－3i.

5．设*a*∈**R**，且(*a*＋i)2·i为正数，则*a*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－1

解析　(*a*＋i)2·i＝[(*a*2－1)＋2*a*i]i＝－2*a*＋(*a*2－1)i，

依题意，得－2*a*>0，且*a*2－1＝0，∴*a*＝－1.

1．知识清单：

(1)复数的加法、减法、乘法运算．

(2)共轭复数的性质．

2．方法归纳：类比合并同类项与多项式的乘法．

3．常见误区：对共轭复数的概念理解不准确．

1．若(－3*a*＋*b*i)－(2*b*＋*a*i)＝3－5i，*a*，*b*∈**R**，则*a*＋*b*等于(　　)

A. B．－ C．－ D．5

答案　B

解析　(－3*a*＋*b*i)－(2*b*＋*a*i)＝(－3*a*－2*b*)＋(*b*－*a*)i＝3－5i，所以

解得*a*＝，*b*＝－，故有*a*＋*b*＝－.

2．i(2＋3i)等于(　　)

A．3－2i B．3＋2i C．－3－2i D．－3＋2i

答案　D

解析　i(2＋3i)＝2i＋3i2＝－3＋2i.

3．已知复数*z*1＝(*a*2－2)－3*a*i，*z*2＝*a*＋(*a*2＋2)i，若*z*1＋*z*2是纯虚数，那么实数*a*的值为(　　)

A．1 B．2 C．－2 D．－2或1

答案　C

解析　由*z*1＋*z*2＝*a*2－2＋*a*＋(*a*2－3*a*＋2)i是纯虚数，得解得*a*＝－2.

4．下列各式的运算结果为纯虚数的是(　　)

A．i(1＋i)2 B．i2(1－i) C．(1＋i)2 D．i(1＋i)

答案　C

解析　(1＋i)2＝1＋2i＋i2＝1＋2i－1＝2i，故选C.

5．已知复数*z*＝(－i)i－(1＋i)(1－i)(i为虚数单位)，则复数*z*的共轭复数为(　　)

A．－1＋i B．－1－i

C.－i D．－－i

答案　B

解析　*z*＝(－i)i－(1＋i)(1－i)＝(1＋i)－2＝－1＋i，

所以＝－1－i.

6．复数*z*满足*z*－(1－i)＝2i，则*z*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　1＋i

解析　∵*z*－(1－i)＝2i，∴*z*＝1－i＋2i＝1＋i.

7．若复数*z*＝1－2i(i为虚数单位)，则*z*·＋*z*的实部是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　6

解析　∵*z*＝1－2i，∴＝1＋2i，

∴*z*·＝(1－2i)(1＋2i)＝5，

∴*z*·＋*z*＝5＋1－2i＝6－2i.∴*z*·＋*z*的实部是6.

8．复数*z*＝－*a*i，*a*∈**R**，且*z*2＝－i，则*a*＝\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案

解析　∵*z*2＝2＝－*a*i，

∴－*a*i＝－i(*a*∈**R**)，

则∴*a*＝.

9．已知*z*－1＋2*z*i＝－4＋4i，求复数*z*.

解　∵*z*－1＋2*z*i＝－4＋4i，

∴(1＋2i)*z*＝－3＋4i.

设*z*＝*a*＋*b*i，*a*，*b*∈**R**，

则(1＋2i)(*a*＋*b*i)＝－3＋4i，

∴*a*－2*b*＋(2*a*＋*b*)i＝－3＋4i，

∴∴

∴*z*＝1＋2i.

10．已知复数*z*＝(1－i)2＋1＋3i，若*z*2＋*az*＋*b*＝1－i(*a*，*b*∈**R**)，求*b*＋*a*i的共轭复数．

解　*z*＝(1－i)2＋1＋3i＝－2i＋1＋3i＝1＋i，

由*z*2＋*az*＋*b*＝1－i，得(1＋i)2＋*a*(1＋i)＋*b*＝1－i，

∴*a*＋*b*＋i(*a*＋2)＝1－i(*a*，*b*∈**R**)，∴

解得∴*b*＋*a*i＝4－3i，则*b*＋*a*i的共轭复数是4＋3i.

11．复数*z*1＝*a*＋4i，*z*2＝－3＋*b*i，若它们的和*z*1＋*z*2为实数，差*z*1－*z*2为纯虚数，则实数*a*，*b*的值分别为(　　)

A．*a*＝－3，*b*＝－4 B．*a*＝－3，*b*＝4

C．*a*＝3，*b*＝－4 D．*a*＝3，*b*＝4

答案　A

解析　因为*z*1＋*z*2＝(*a*－3)＋(4＋*b*)i为实数，

所以4＋*b*＝0，*b*＝－4.

因为*z*1－*z*2＝(*a*＋3)＋(4－*b*)i为纯虚数，所以*a*＝－3且*b*≠4.故*a*＝－3，*b*＝－4.

12．已知复数*z*＝(3*a*＋2i)(*b*－i)的实部为4，其中*a*，*b*为正实数，则2*a*＋*b*的最小值为(　　)

A．2 B．4 C. D.

答案　D

解析　∵*z*＝(3*a*＋2i)(*b*－i)＝3*ab*＋2＋(2*b*－3*a*)i，

∴3*ab*＋2＝4，∴*ab*＝，∵*a*，*b*为正实数，∴2*a*＋*b*≥2＝2＝，当且仅当*a*＝，*b*＝时取等号，故2*a*＋*b*的最小值为，故选D.

13．已知复数*z*1＝－2*m*i，*z*2＝－*m*＋*m*2i，若*z*1＋*z*2>0，则实数*m*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　2

解析　*z*1＋*z*2＝(－2*m*i)＋(－*m*＋*m*2i)＝(－*m*)＋(*m*2－2*m*)i.

因为*z*1＋*z*2>0，

所以*z*1＋*z*2为实数且大于0，

所以解得*m*＝2.

14．已知*z*1＝*a*＋(*a*＋1)i，*z*2＝－3*b*＋(*b*＋2)i(*a*，*b*∈**R**)，若*z*1－*z*2＝4，则*z*1·*z*2＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－18－6i

解析　*z*1－*z*2＝*a*＋(*a*＋1)i－[－3*b*＋(*b*＋2)i]

＝＋(*a*－*b*－1)i＝4.

∴解得

∴*z*1＝＋3i，*z*2＝－3＋3i.

*z*1·*z*2＝(＋3i)(－3＋3i)＝－18－6i.

15．已知＋i是实系数一元二次方程*ax*2＋*bx*＋1＝0的一个根，则*a*＝\_\_\_\_\_\_\_，*b*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　1　－

解析　把＋i代入方程，得*a*2＋*b*＋1＝0，即＋i＝0，所以即解得

16．已知复数*z*＝1＋i，实数*a*，*b*满足*az*＋2*bz*＝(*a*＋2*z*)2成立，求*a*，*b*的值．

解　*az*＋2*bz*＝(*a*＋2*b*)＋(*a*＋2*b*)i，

(*a*＋2*z*)2＝(*a*＋2)2－4＋4(*a*＋2)i＝(*a*2＋4*a*)＋4(*a*＋2)i，

∴(*a*＋2*b*)＋(*a*＋2*b*)i＝(*a*2＋4*a*)＋4(*a*＋2)i.

∴

解得或

∴所求实数*a*＝－2，*b*＝4－3或*a*＝2，*b*＝4＋3.