**数列的递推关系及新定义问题**

(总分:78分 建议用时:45分钟)



1.(5分)(2024·广东汕头高三二模)设数列{an}满足a1+2a2+3a3+…+nan=2n+1(n∈N\*),则数列的前10项和为(　　).

A. B.

C. D.

2.(5分)(2024·广东深圳高三一模)已知数列{an}满足a1=a2=1,an+2=(k∈N\*),若Sn为数列{an}的前n项和,则S50=(　　).

A.624 B.625

C.626 D.650

3.(5分) 已知数列{an}的前n项和为Sn,满足an+Sn+1=(-1)n·+Sn,n∈N\*,且a1=,则S2 025=(　　).

A.1- B.-1

C.2- D.-2

4.(5分)(2024·陕西西安高三三模)已知数列{an}的首项a1=2,an+1=an+6+9,n∈N\*,则a27=(　　).

A.7 268 B.5 068

C.6 398 D.4 028

5.(5分)分形几何学是数学家伯努瓦·曼德尔布罗特在20世纪70年代创立的一门新学科,它的创立为解决传统科学领域的众多难题提供了全新的思路.下图展示了如何按照图①的分形规律生长成图②的一个树形图,则在图②中第2 023行的黑心圈的个数是(　　).



A. B.

C.32 022-1 D.32 023-3

6.(6分)(2024·山西太原高三模拟)已知数列{an}中,a1=1,an+1=2an+1(n∈N\*),数列{an}的前n项和为Sn,则下列结论正确的是(　　).

A.{an}是等比数列 B.a4=15

C.a10<1 000 D.Sn=2an-n

7.(6分)(2024·福建漳州高三二模)已知数列{an}的前n项和为Sn,若a1=a2=4,且∀n≥2,n∈N\*都有4(Sn-Sn-1)=Sn+1,则(　　).

A.{Sn-2Sn-1}(n≥2,n∈N\*)是等比数列

B.S6=128

C.an=

D.an=

8.(6分)(2024·深圳高三模拟)任取一个正整数,若是奇数,就将该数乘3再加上1;若是偶数,就将该数除以2.反复进行上述两种运算,经过有限次运算后,必进入循环圈1→4→2→1.这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”).比如取正整数m=8,根据上述的运算法则得出8→4→2→1→4→2→1.该猜想的递推关系如下:已知数列{an}满足a1=5,an+1=其中n∈N\*.设数列{an}的前n 项和为Sn ,则下列结论正确的是(　　).

A.a3=8 B.a5=2

C.S10=49 D.S300=722

9.(5分)(2024·黑龙江高三模拟)洛卡斯是十九世纪的法国数学家,他以研究斐波那契数列而著名.洛卡斯数列就是以他的名字命名的,洛卡斯数列{Ln}为:1,3,4,7,11,18,29,47,76,…,即L1=1,L2=3,且Ln+2=Ln+1+Ln(n∈N\*).设数列{Ln}各项依次除以4所得的余数形成的数列为{an},则a100=　　　　.

10.(5分)(2024·云南高三模拟)记数列{an}的前n项和为Sn,若a1=2,2an+1-3an=2n,n∈N\*,则=　　　　.

11.(5分)(2024·湖北高三模拟)已知数列{an}中,a1=,an+1=,n∈N\*,则{anan+1}的前n项和Sn=　　　　.

12.(5分)(2024·广东梅州高三二模)已知数列{an}的通项公式an=(-1)n·(n∈N\*),则ak=a1a2…an的最小值为　　　　.

13.(5分)(2024·内蒙古呼和浩特高三一模)已知f(x)=若直线y=knx与f(x)有2n个交点,其中n∈N\*,则++…+=　　　　.

14.(5分)(2024·陕西西安高三一模)若一个数列的后一项与其相邻的前一项的差值构成的数列为等差数列,则称此数列为二阶等差数列.现有二阶等差数列为2,3,5,8,12,17,23,…,设此数列为{an},若数列{bn}满足bn=,n∈N\*,则数列{bn}的前n项和Sn=　　　　.

15.(5分) 斐波那契数列,又称黄金分割数列,被数学家莱昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例子而引入,故又称为“兔子数列”,是这样一个数列:1,1,2,3,5,8,13,21,34,….在数学上,斐波那契数列按下面的递推方式给出了定义:a0=1,a1=1,an=an-1+an-2(n≥2,n∈N\*).定义集合A={a1,a2,…,a2 024},集合B⊆A且B≠∅,则集合B中所有元素之和为奇数的概率为　　　　.

**参考答案**



1. C　解析　因为a1+2a2+3a3+…+nan=2n+1,

所以a1+2a2+3a3+…+nan+(n+1)an+1=2(n+1)+1,

两式相减得(n+1)an+1=2,所以an+1=.

又a1=2×1+1=3≠,所以an=

所以=

所以数列的前10项和为

+2-+-+…+-=+2-=.

故选C.

2. C　解析　数列{an}中,a1=a2=1,an+2=(k∈N\*).

当n=2k-1,k∈N\*时,an+2-an=2,即数列{an}的奇数项构成等差数列,其首项为1,公差为2,

则a1+a3+a5+…+a49=25×1+×2=625;

当n=2k,k∈N\*时,=-1,即数列{an}的偶数项构成等比数列,其首项为1,公比为-1.

则a2+a4+a6+…+a50==1.

所以S50=(a1+a3+a5+…+a49)+(a2+a4+a6+…+a50)=626.

故选C.

3.C　解析　由an+Sn+1=(-1)n·+Sn,得an+Sn+1-Sn=(-1)n·,

即an+an+1=(-1)n·,

所以S2 025=a1+(a2+a3)+(a4+a5)+…+(a2 024+a2 025)

=+2++…+

=+

=2-.故选C.

4.C　解析　由题意易知an>0,因为an+1=an+6+9,所以an+1+2=,即-=3,所以{}是以2为首项,3为公差的等差数列.

所以=3n-1,则an+2=(3n-1)2,即a27=802-2=6 398.故选C.

5.A　解析　设题图②中第n行白心圈的个数为an,黑心圈的个数为bn,n∈N\*,

依题意可得an+bn=3n-1,an+1=2an+bn,bn+1=2bn+an,且a1=1,b1=0,

故n∈N\*,

所以{an+bn}是以a1+b1=1为首项,3为公比的等比数列,{an-bn}为常数列,且a1-b1=1,

故故n∈N\*,

所以b2 023=.故选A.

6.BD　解析　由an+1=2an+1得an+1+1=2(an+1).

又a1+1=2,所以{an+1}是以2为首项,2为公比的等比数列,

则an+1=2×2n-1=2n,即an=2n-1.

因为a1=1,a2=22-1=3,a3=23-1=7,显然≠a1a3,

所以{an}不是等比数列,故A错误;

a4=24-1=15,故B正确;

a10=210-1=1 024-1=1 023>1 000,故C错误;

Sn=2-1+22-1+23-1+…+2n-1=(2+22+…+2n)-n=-n=2(2n-1)-n=2an-n,故D正确.故选BD.

7.BD　解析　因为S2-2S1=(a1+a2)-2a1=4×2-2×4=0,所以{Sn-2Sn-1}(n≥2,n∈N\*)不是等比数列,所以A错误.

由4(Sn-Sn-1)=Sn+1,得Sn+1-2Sn=2Sn-4Sn-1=2(Sn-2Sn-1),n≥2,n∈N\*,

以及S2-2S1=0,可得S3-2S2=0,S4-2S3=0,…,

以此类推可知,Sn-2Sn-1=0(n≥2,n∈N\*),则Sn=2Sn-1(n≥2,n∈N\*).

又S1=a1=4,所以数列{Sn}是以4为首项,2为公比的等比数列,所以Sn=4×2n-1=2n+1,

所以S6=26+1=27=128,所以B正确.

当n≥2时,an=Sn-Sn-1=2n+1-2n=2n;

当n=1时,a1=S1=4.

由于a1=4不满足an=2n,

故an=

所以C错误,D正确.故选BD.

8.ABD　解析　因为数列{an}满足a1=5,an+1=

所以a2=3×5+1=16,a3==8,a4==4,a5==2,a6==1,a7=3×1+1=4,a8==2,a9==1,a10=3×1+1=4,

所以S10=5+16+8+4+2+1+4+2+1+4=47,

所以A,B正确,C错误;

因为数列{an}中从第4项起以4,2,1为一组循环,而(300-3)÷3=99,所以S300=(5+16+8)+99×(4+2+1)=722,所以D正确.故选ABD.

9.3　解析　由题意知{Ln}的各项除以4所得的余数分别为1,3,0,3,3,2,1,3,0,…,

故可得{an}的周期为6,且前6项分别为1,3,0,3,3,2,

所以a100=a6×16+4=a4=3.

10.　解析　因为数列{an}满足2an+1-3an=2n,

所以2(an+1-2n+1)=3(an-2n),n∈N\*.

令bn=an-2n,n∈N\*,则bn+1=bn.因为b1=a1-21=0,所以数列{bn}是常数列,bn=0,所以an=2n,

则S8==2×(28-1),a8=28,

所以==.

11.　解析　因为a1=,an+1=,n∈N\*,所以-=2,即数列是以=为首项,2为公差的等差数列,

所以=+(n-1)·2=,可得an=,

所以anan+1==-,

所以{anan+1}的前n项和Sn=-+-+…+-=-=.

12.-　解析　当n为奇数时,an=-;当n为偶数时,an=.

要求ak=a1a2…an的最小值,只需要出现奇数个奇数项时即可.

又==<1,

所以|an+1|<|an|.

当n=2时,ak=a1a2=-2×=-,

当n=5时,ak=a1a2a3a4a5=-2××-××-=->-,

当n=4时,a4=<1,因此当n≥4时,ak=a1a2…an的绝对值随n的增大而减小,所以ak=-是绝对值最大的负数项,

故所求的最小值为-.

13.　解析　当-1≤x≤1时,y=f(x)=,即x2+y2=1,y≥0;

当x>1时,f(x)=f(x-2),可得函数的周期为2.

画出函数f(x)的图象,如图所示:



若直线y=knx与f(x)有2n个交点,

则直线y=knx与第n+1个半圆相切,且该半圆的圆心为On+1(2n,0).

不妨设切点为P,连接POn+1,

所以在Rt△OPOn+1中,tan∠POOn+1=====kn,

故===-,

所以++…+=1-+-+…+-=.

14.　解析　由题意可知,数列{an+1-an}(n∈N\*)是以a2-a1=1为首项,1为公差的等差数列,

所以an+1-an=1+(n-1)×1=n(n∈N\*),

所以(a2-a1)+(a3-a2)+…+(an+1-an)=an+1-a1=1+2+…+n=,可得an+1=+2(n∈N\*).

故bn====2-(n∈N\*),

所以数列{bn}的前n项和Sn=21-+-+…+-=21-=(n∈N\*).

15.　解析　由斐波那契数列的规律可知,集合A={a1,a2,…,a2 024}的元素中有675个偶数,1 349个奇数,

记A中所有偶数组成的集合为C,所有奇数组成的集合为D,集合C的子集为E,集合D中含有奇数个元素的子集为F,

则所有元素之和为奇数的集合B可看成E∪F,

显然集合E共有2675个,集合F共有+++…+=21 348(个),

所以所有元素之和为奇数的集合B共有2675×21 348=22 023(个).

又集合A的非空子集共有(22 024-1)个,所以集合B中所有元素之和为奇数的概率为.