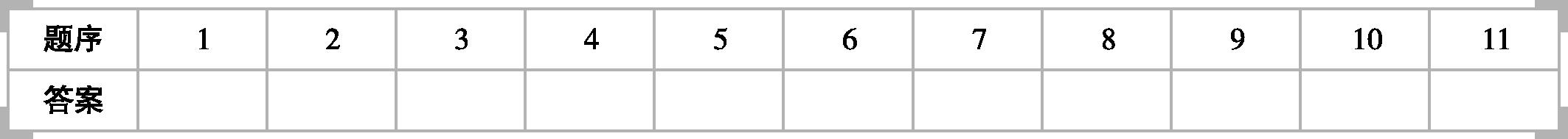
**数列**

(总分:150分 建议用时:120分钟)



一、单项选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分*.*在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1*.*在公差不为0的等差数列{*an*}中,*a*3,*a*7,*am*是公比为2的等比数列,则*m=*()*.*

A.11 B.13 C.15 D.17

2*.*(2024·陕西西安高三模拟)已知等比数列{*an*}中,公比*q=*2,其前5项和*S*5*=*93,则*a*3*=*()*.*

A.6 B.8 C.12 D.24

3*.* 已知数列{*an*}为有限项等差数列,*a*1*=*10,该数列所有项的中位数为20,则数列{*an*}的末项为()*.*

A.24 B.28 C.30 D.40

4*.*id:2147489648;FounderCES 已知*Sn*是数列{*an*}的前*n*项和,函数*f*(*x*)*=*2*x-*1的图象过点(*an*,*Sn*),*n*∈N*\**,则*S*6*=*()*.*

A.64 B.63 C.32 D.31

5*.*已知数列{*an*}满足*a*1*=*2,*an+*1*=*(*n*∈N*\**),则*a*2 024*=*()*.*

A.*-*3 B.*-*  C. D.2

6*.*已知等差数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,*a*5*+a*8*=-*2*a*10,*a*3*+a*7*=-*26,则满足*SnSn+*1*<*0的*n*的值为()*.*

A.14 B.15 C.16 D.17

7*.*已知在数列{*an*}中,*an+an+*2*=*(*-*1)*n-*1*+*3,则{*an*}的前2 024项的和是()*.*

A*.*3 020 B*.*3 028 C*.*3 030 D*.*3 036

8*.*已知数列{*an*}满足*an=*3*n-*1,在*an*,*an+*1(*n*∈N*\**)之间插入*n*个2,构成数列{*bn*}:*a*1,2,*a*2,2,2,*a*3,2,2,2,*a*4,…*.*数列{*bn*}的前100项的和为()*.*

A*.*426 B*.*430 C*.*434 D*.*450

二、多项选择题(本题共3小题,每小题6分,共18分*.*在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求*.*全部选对的得6分,选对但不全的得部分分,有选错的得0分)

9*.*已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,若*a*1*=-*10,*an+*1*=an+*3,则下列说法正确的是()*.*

A*.*{*an*}是递增数列

B*.*10是数列{*an*}中的项

C*.*数列{*Sn*}中的最小项为*S*4

D*.*数列是等差数列

10*.*若数列{*an*}是等差数列,*S*8*=*10,则下列说法正确的是()*.*

A*.a*3*+a*6为定值

B*.*若*a*1*=*,则当*n=*5时,*Sn*取得最大值

C*.*若*d=*,则使*Sn*为负值的*n*的值有3个

D*.*若*S*4*=*6,则*S*12*=*12

11*.*(2024·山西高三联考)甲、乙、丙三人相互做传球训练,第1次由甲将球传出,每次传球时,传球者可将球传给另外两个人中的任何一人*.*设第*n*次传球后球在甲手中的方法数为*an*,在乙手中的方法数为*bn*,则下列说法正确的是()*.*

A*.an+an-*1*=*2*n-*1(*n*≥2,*n*∈N*\**)

B*.an=*(*n*∈N*\**)

C*.*存在唯一实数*t*,使得{*an+tan-*1}(*n*≥2,*n*∈N*\**)为等比数列

D*.*当*n*为偶数时,*an>bn*

三、填空题(本题共3小题,每小题5分,共15分)

12*.*id:2147489655;FounderCES 已知正项等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,*S*2*=*12,*S*3*=*14,则*a*1*a*2*a*3…*an*的最大值为*.*

13*.*(2024·四川广安高三模拟)已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,且*a*1*=*1,*an+*1*-an=*2*n*(*n*∈N*\**),则*Sn=　　　　.*

14*.*若过点*Pn*(*n*,0)(*n*∈N*\**)作函数*f*(*x*)*=x*e*x*的图象的两条切线,记两切点的横坐标分别为*xn*,1,*xn*,2,则*x*1,1*+x*1,2*+x*2,1*+x*2,2*+x*3,1*+x*3,2*+*…*+xn*,1*+xn*,2*=　　　　.*

四、解答题(本题共5小题,共77分*.*解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

15*.*(13分)记*Sn*为数列{*an*}的前*n*项和,且*a*1*=*4,*Sn=*(2*n+*3)*an+*(*n*≥2,*n*∈N*\**)*.*

(1)求数列{*an*}的通项公式;

(2)若数列{*bn*}满足*bn=*,求{*bn*}的前*n*项和*Tn.*

16*.*(15分)(2024·河北石家庄高三一模)已知等差数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*(*n*∈N*\**),且3*a*2*+*2*a*3*=S*5*+*6*.*

(1)若数列{*Sn*}为递减数列,求*a*1的取值范围;

(2)若*a*1*=*1,在数列{*an*}的第*n*项与第(*n+*1)项之间插入首项为1,公比为2的等比数列的前*n*项,形成一个新数列{*bn*},记数列{*bn*}的前*n*项和为*Tn*,求*T*95*.*

17*.*(15分)已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,且*a*1*=-*3,*Sn+*1*+*2*Sn+*3*n+*3*=*0,*n*∈N*\*.*

(1)证明:数列{*an+*1}是等比数列*.*

(2)记min{*a*,*b*}*=*设*bn=*min{*an*,*n-*1},求数列{*bn*}的前2*n*项和*T*2*n.*

18*.*(17分)(2024·山东青岛高三模拟)已知数列{*an*}是等差数列,数列{*bn*}是等比数列,且*a*1*+b*1*=*8,*a*2*+b*2*=*18,*b*1*+b*3*=*30,6*bn+*1*=bn+*2*+*9*bn*,*n*∈N*\*.*

(1)求数列{*an*}和{*bn*}的通项公式;

(2)数列{*an*}和{*bn*}的公共项组成的数列记为{*cn*},求{*cn*}的通项公式;

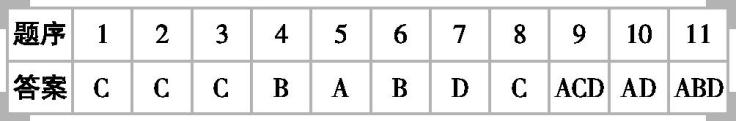
(3)记数列的前*n*项和为*Sn*,证明:*Sn<.*

19*.*(17分)(2024·辽宁鞍山高三模拟)设数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,已知2*Sn=an+*1*-*2*n+*1*+*1(*n*∈N*\**),且*a*2*=*5*.*

(1)证明*+*1为等比数列,并求数列{*an*}的通项公式*.*

(2)高斯是德国著名数学家,近代数学的奠基者之一,享有“数学王子”的称号,用他名字定义的函数称为高斯函数,即*f*(*x*)*=*[*x*],其中[*x*]表示不超过*x*的最大整数*.*如[2*.*3]*=*2,[*-*1*.*9]*=-*2*.*设*cn=*,数列{*cn*}的前*n*项和为*Tn*,求*T*2 024除以16的余数*.*

**参考答案**



1.C　解析　设等差数列的公差为d,则d≠0.

因为a3,a7,am是公比为2的等比数列,

所以

由①可得a1=2d,代入②可得=2,

解得m=15.

故选C.

2.C　解析　因为等比数列的前5项和S5=93,

所以a1+a2+a3+a4+a5=93,

所以a3q-2+a3q-1+a3+a3q+a3q2=93.

因为q=2,所以a3=93,

所以a3=12.

故选C.

3.C　解析　若该数列的项数n为奇数,则=20,解得an=30;

若该数列的项数n为偶数,设中间两项分别为x,y,则a1+an=x+y,

可得==20,解得an=30.

故选C.

4.B　解析　根据题意得Sn=2an-1.

当n=1时,S1=2a1-1,可得a1=1;

当n≥2时,Sn-1=2an-1-1,

所以an=Sn-Sn-1=2an-2an-1,可得=2.

所以{an}是以1为首项,2为公比的等比数列,所以S6==63.

故选B.

5.A　解析　因为a1=2,an+1=,

所以a2==,a3==-,

a4==-3,a5==2,…,

所以数列{an}中的项以4为一个周期.

又2 024=4×506,所以a2 024=a4=-3.

故选A.

6.B　解析　设等差数列{an}的公差为d,

因为所以

解得

所以Sn=-29n+×4=n(2n-31),且n∈N\*.

当n≤15时,Sn<0;当n≥16时,Sn>0.

故当n≤14或n≥16时,SnSn+1>0;当n=15时,SnSn+1<0.

因为SnSn+1<0,所以n=15.

故选B.

7.D　解析　由an+an+2=(-1)n-1+3知,当n为奇数时,an+an+2=4,

则a1+a3+a5+a7+…+a2 023=(a1+a3)+(a5+a7)+…+(a2 021+a2 023)=×4=2 024;

当n为偶数时,an+an+2=2,

则a2+a4+a6+a8+…+a2 024=(a2+a4)+(a6+a8)+…+(a2 022+a2 024)=×2=1 012.

所以{an}的前2 024项的和是2 024+1 012=3 036.故选D.

8.C　解析　依题意,数列{bn}从a1到an共有n+[1+2+…+(n-1)]=n+=个数,所以当n=13时,有=91个数;当n=14时,有=105个数.因为an=3n-1,所以S100=(a1+a2+…+a13)+(100-13)×2=+174=434.故选C.

9.ACD　解析　由a1=-10,an+1-an=3,

可得an=-10+3(n-1)=3n-13(n∈N\*).

对于A,因为an+1-an=3>0,所以{an}是递增数列,故A正确;

对于B,令an=3n-13=10,解得n=∉N\*,故B错误;

对于C,令an=3n-13≤0,可得n≤,所以数列{Sn}中的最小项为S4,故C正确;

对于D,Sn===,则=,所以-=-=,所以数列为等差数列,故D正确.

故选ACD.

10.AD　解析　由数列{an}是等差数列,S8=10,得=10,即a1+a8=.

由等差数列的性质得a3+a6=a1+a8=,则a3+a6为定值,故A正确.

设{an}的公差为d,当a1=时,a8=-11,则公差d=-,则数列{an}是递减数列,且a4=3,a5=-,故当n=4时,Sn取得最大值,故B错误.

当d=时,由a1+a8=,得a1=-,则Sn=-n+·=.令Sn<0,得0<n<3.又n∈N\*,所以使Sn的为负值的n的值有2个,故C错误.

当S4=6时,4a1+6d=6,结合a1+a8=,即2a1+7d=,解得a1=,d=-,故S12=12a1+·d=12,故D正确.

故选AD.

11.ABD　解析　每次传球,传球者可将球传给另外两个人中的任何一人,所以n次传球共2n种方法.若第n次传球后球在甲手中,则第(n-1)次传球后球必不在甲手中,从而an=2n-1-an-1,所以an+an-1=2n-1(n≥2,n∈N\*),故A正确.

由an+an-1=2n-1得(-1)nan-(-1)n-1an-1=-(-2)n-1,从而(-1)nan-(-1)1a1=-(-2)1-(-2)2-…-(-2)n-1=(n≥2,n∈N\*).又a1=0,所以an=(n∈N\*),故B正确.

因为an-2an-1=2×(-1)n,所以{an-2an-1}为等比数列.又an+an-1=2n-1,所以{an+an-1}为等比数列,故C错误.

当n为偶数时,an=>,易知an+2bn=2n,则2(bn-an)=2n-3an<0,所以an>bn,故D正确.故选ABD.

12.64　解析　设等比数列{an}的公比为q(q>0),由题意得a1+a1q=12,a1+a1q+a1q2=14,解得a1=8,q=,所以a2=4,a3=2,a4=1,a5=,…,所以当n=3或n=4时,a1a2a3…an取得最大值,最大值为8×4×2=64.

13.2n+1-n-2　解析　数列{an}中,由an+1-an=2n,得当n≥2时,an-an-1=2n-1,

则an=a1+(a2-a1)+(a3-a2)+…+(an-an-1)=1+21+22+…+2n-1==2n-1,

显然a1=1满足上式,因此an=2n-1(n∈N\*),

所以Sn=-n=2n+1-n-2(n∈N\*).

14.　解析　设切点坐标为M(xn,i,xn,i)(i=1,2,n∈N\*),由f(x)=xex得f'(x)=(x+1)ex,则切线斜率kn,i=(xn,i+1).又kn,i=,所以(xn,i+1)·=,化简整理得-nxn,i-n=0.因为Δ=n2+4n>0,所以该方程有两个实数根xn,1,xn,2,且xn,1+xn,2=n,所以x1,1+x1,2+x2,1+x2,2+x3,1+x3,2+…+xn,1+xn,2=1+2+3+…+n=(n∈N\*).

15.解析　(1)由题意知,4Sn=(2n+3)an+1,当n=2时,4S2=7a2+1,解得a2=5;

当n≥2时,4Sn+1=[2(n+1)+3]an+1+1,

两式相减得4Sn+1-4Sn=[2(n+1)+3]an+1-(2n+3)an,

化简整理得(2n+1)an+1=(2n+3)an,

所以=,所以数列是常数列.

当n=2时,==1,所以an=2n+1(n≥2).

当n=1时,a1=4,不满足an=2n+1.

综上所述,数列{an}的通项公式为an=

(2)由(1)可得bn=

=

所以当n=1时,T1=b1=;

当n≥2时,Tn=b1+b2+b3+…+bn=+-+-+…+-=-.

因为T1=满足上式,

所以Tn=-(n∈N\*).

16.解析　(1)设等差数列{an}的公差为d,因为3a2+2a3=S5+6,

所以3(a1+d)+2(a1+2d)=5a1+10d+6,解得d=-2,

所以Sn=na1+d=-n2+(a1+1)n.

若数列{Sn}为递减数列,则Sn+1-Sn<0对于n∈N\*恒成立,

所以Sn+1-Sn=[-(n+1)2+(a1+1)(n+1)]-[-n2+(a1+1)n]=a1-2n<0在n∈N\*上恒成立,

则a1<(2n)min=2,

故a1的取值范围为(-∞,2).

(2)由(1)知d=-2,若a1=1,

则an=1+(n-1)·(-2)=-2n+3.

根据题意,数列{bn}为:

第一组为1,20;

第二组为-1,20,21;

第三组为-3,20,21,22;

……

第k组为-2k+3,20,21,22,…,2k-1.

则前k组一共有2+3+4+…+(k+1)=项,

当k=12时,项数为90.

故T95相当于是前12组的和再加上-23,20,21,22,23这5项,即T95=[1+(-1)+…+(-21)]+[20+(20+21)+…+(20+21+…+211)]+(-23+20+21+22+23).设数列{2n-1}的前n项和为cn,则cn=2n-1,则20+(20+21)+…+(20+21+…+211)可看成是数列{cn}的前12项和,所以T95=+-12-23+1+2+4+8=213-142=8 050.

17.解析　(1)当n=1时,S2+2S1+6=-3+a2-6+6=0,解得a2=3.

当n≥2时,由Sn+1+2Sn+3n+3=0,得Sn+2Sn-1+3n=0,

两式作差得an+1+2an+3=0,即an+1+1=-2(an+1).

经检验,a2+1=4=-2(a1+1),满足an+1+1=-2(an+1),

所以数列{an+1}是以a1+1=-2为首项,-2为公比的等比数列.

(2)由(1)得an+1=-2·(-2)n-1=(-2)n,

所以an=(-2)n-1.

当n为奇数时,an<0,n-1≥0,所以bn=an=(-2)n-1;

当n为偶数时,an=2n-1.

令cn=2n-1-(n-1)=2n-n,则cn+2-cn=2n+2-(n+2)-2n+n=3·2n-2>0,

所以cn>cn-2>cn-4>…>c2=2>0,即2n-1>n-1,所以bn=n-1.

故T2n=(b1+b3+b5+…+b2n-1)+(b2+b4+b6+…+b2n)=[(-2)1+(-2)3+(-2)5+…+(-2)2n-1-n]+[1+3+5+…+(2n-1)]=-n+=-n+n2(n∈N\*).

18.解析　(1)设等差数列{an}的公差为d,等比数列{bn}的公比为q,

由6bn+1=bn+2+9bn可得6qbn=q2bn+9bn,易知bn≠0,所以q2-6q+9=0,解得q=3.

由b1+b3=30可得b1(1+q2)=30,解得b1=3.

由a1+b1=8,a2+b2=18可得a1+3=8,a1+d+b1q=18,解得a1=5,d=4.

因此an=a1+(n-1)d=4n+1,bn=b1qn-1=3n,

所以数列{an}和{bn}的通项公式分别为an=4n+1,bn=3n,n∈N\*.

(2)数列{an}和{bn}的公共项需满足4n1+1=,n1,n2∈N\*,

可得n1=,即-1是4的整数倍.

-1=-1=(8+1-1,由二项式定理可知(8+1-1若是4的倍数,则为整数,即n2=2n,n∈N\*,

所以可得cn=32n=9n,

即{cn}的通项公式为cn=9n,n∈N\*.

(3)易知=,显然9n-8>9n-1对于∀n≥2都成立,

所以=<对于∀n≥2都成立,

即Sn=++…+=1++…+<1++…+=1+=1+1-n-1=-×n-1<.又当n=1时,Sn=1<.

综上,Sn<.

19.解析　(1)当n=1时,2S1=a2-22+1.

因为a2=5,所以a1=S1=1.

2Sn=an+1-2n+1+1(n∈N\*),　①

故当n≥2时,2Sn-1=an-2n+1,　②

由①-②得,2an=an+1-an-2n+1+2n,即an+1=3an+2n.

又a2=3a1+2也满足上式,故当n∈N\*时,an+1=3an+2n,

故=·+,即+1=+1,

所以+1是首项为+1=,公比为的等比数列,

故+1=·=,故an=3n-2n(n∈N\*).

(2)由(1)知,cn==.

由二项式定理得3n=(4-1)n=4n+4n-1(-1)+…+×4×(-1)n-1+(-1)n=4×[4n-1+4n-2(-1)+…+(-1)n-1]+(-1)n.

当n为奇数时,=+,故=-;

当n为偶数时,=+,故=-.

所以T2 024=(c1+c3+…+c2 023)+(c2+c4+…+c2 024)

=-1 012×+-1 012×

=×-1 012×+

=-1 012.

由二项式定理得===81 011+81 010+…+8+,

当k≥2时,8k能被16整除,且8=8×506×1 011也能被16整除,

故T2 024除以16的余数为3-1 012除以16的余数.

由于3-1 012=3×1 012-1 012=2 024=16×126+8,

故T2 024除以16的余数为8.