南通市2025届高三第二次调研测试

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置，在其他位置作答一律无效。

3. 本卷满分150分，考试时间120分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则$|\overline{z}|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

2. 设集合$U=\mathbf{R}$，$M=\{x\,|\,x>1\}$，$N=\{x\,|\,-1<x<2\}$，则$\{x\,|\,x\leqslant -1\}=$

A. $\complement_U(M\cap N)$　　B. $\complement_U(M\cup N)$　　C. $M\cup\complement_U N$　　D. $N\cup\complement_U M$

3. 已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$的右顶点与抛物线$y^2=8x$的焦点重合，则C的离心率为

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知4个不全相等的正整数的平均数与中位数都是2，则这组数据的极差为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5. 已知圆锥的轴截面为正三角形，外接球的半径为1，则圆锥的体积为

A. $\dfrac{3\pi}{8}$　　B. $\dfrac{3\pi}{4}$　　C. $\dfrac{9\pi}{8}$　　D. $\dfrac{9\pi}{4}$

6. 若函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}, & x\geqslant 2,\\ kx, & x<2\end{cases}$有最大值，则$k$的最大值为

A. $\dfrac{\ln 2}{4}$　　B. $\dfrac{\ln 2}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$　　D. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

7. 已知函数$f(x)=\sin x+\cos x$的极值点与$g(x)=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$的零点完全相同，则$\omega=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

8. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-2^n$，则

A. $9a_7>8a_8$　　B. $9a_7<8a_8$

C. $9S_7>7a_8$　　D. $9S_7<7a_8$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 设α,β,γ表示三个不同的平面，m表示直线，则下列选项中，使得$\alpha/\!/\beta$的是

A. $m/\!/\alpha, m/\!/\beta$　　B. $m\perp\alpha, m\perp\beta$

C. $\gamma/\!/\alpha,\gamma/\!/\beta$　　D. $\gamma\perp\alpha,\gamma\perp\beta$

10. 已知函数$f(x)$与$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant g(x)$（当且仅当$x=0$时，等号成立），则下列结论可能正确的是

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(0)$，且$g(x)\leqslant g(0)$

B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(0)$，且$g(x)\geqslant g(0)$

C. $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$f(x_1)\leqslant f(0)$，且$\exists x_2\in\mathbf{R}$，$g(x_2)>g(0)$

D. $\exists x_1\in\mathbf{R}$，$f(x_1)<f(0)$，且$\exists x_2\in\mathbf{R}$，$g(x_2)>g(0)$

11. 在平面直角坐标系xOy中，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，定义：$\|AB\|_n=\left(|x_1-x_2|^n+|y_1-y_2|^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

若$s,t\in\mathbf{N}^*$，且$s<t$，则下列结论正确的是

A. 若A，B关于x轴对称，则$\|AB\|_s=\|AB\|_t$

B. 若A，B关于直线$y=x$对称，则$\|AB\|_s\geqslant\|AB\|_t$

C. 若$\|OA\|_s=2\|OB\|_s$，则$\|OA\|_t=2\|OB\|_t$

D. 若$P=\{M\,|\,\|AM\|_s\leqslant1\}$，$Q=\{M\,|\,\|AM\|_t\leqslant1\}$，则$P\subseteq Q$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知点 A 在直线 $x-y+1=0$ 上，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 0)$，则原点 O 与 B 的最短距离为________.

13. 已知 $\sin 2\alpha=2\sin 2\beta$，$\cos 2\alpha=4\sin^2\beta$，则 $\cos(2\alpha+\beta)=$________.

14. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，其中 $a<b<c$．若 $f(1+x)f(2-x)\leqslant 0$，则 $a+b+c=$________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13 分）

记$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，面积为 S，且 $S=a^2\sin 2B$．

（1）证明：$\tan B=3\tan A$；

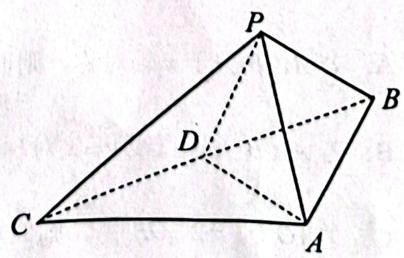
（2）若 $A=45°$，BC 边上的高为 6，求 b.

16. （15 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PB=PC$，D 为 BC 的中点，平面 $PAD\perp$ 平面 PBC.

（1）证明：$AB=AC$；

（2）若 $AB\perp AC$，$AB=2$，$PA=PD=1$，求平面 PAB 与平面 PAC 的夹角的正弦值.



17. （15分）

已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$的实轴长为4，一条渐近线的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，过点$(6, 0)$的直线$l$与$C$的右支交于$A$，$B$两点.

（1）求C的标准方程；

（2）P是x轴上的定点，且$\angle APB=90°$.

（i）求P的坐标；

（ii）若$\triangle APB$的外接圆被x轴截得的弦长为16，求外接圆的面积.

18. （17分）

某公司邀请棋手与该公司研制的一款机器人进行象棋比赛，规则如下：棋手的初始分为200，每局比赛，棋手胜加100分；平局不得分；棋手负减100分．当棋手总分为0时，挑战失败，比赛终止；当棋手总分为300时，挑战成功，比赛终止；否则比赛继续．已知每局比赛棋手胜、平、负的概率分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，且各局比赛相互独立.

（1）求两局后比赛终止的概率；

（2）在3局后比赛终止的条件下，求棋手挑战成功的概率；

（3）在挑战过程中，棋手每胜1局，获奖5千元．记$n(n\geqslant 10)$局后比赛终止且棋手获奖1万元的概率为$P(n)$，求$P(n)$的最大值.

19. （17分）

已知函数$f(x)=e^{x-1}-\frac{n}{x}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）证明：$f(x)$有唯一零点；

（2）记$f(x)$的零点为a_n.

（i）数列$\{a_n\}$中是否存在连续三项按某顺序构成等比数列，并说明理由；

（ii）证明：$2(\sqrt{n+1}-1)<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant\frac{n+1+\ln n}{2}$.