

连云港市 2025 届高三第二次调研测试

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置，在其他位置作答一律无效。
3. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $z = \frac{1-i}{1+i}$ ，则 $|\bar{z}| =$
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
2. 设集合 $U = \mathbf{R}$ ， $M = \{x | x > 1\}$ ， $N = \{x | -1 < x < 2\}$ ，则 $\{x | x \leq -1\} =$
A. $\complement_U(M \cap N)$ B. $\complement_U(M \cup N)$ C. $M \cup \complement_U N$ D. $N \cup \complement_U M$
3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 的右顶点与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点重合，则 C 的离心率为
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 已知 4 个不全相等的正整数的平均数与中位数都是 2，则这组数据的极差为
A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
5. 已知圆锥的轴截面为正三角形，外接球的半径为 1，则圆锥的体积为
A. $\frac{3\pi}{8}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{9\pi}{8}$ D. $\frac{9\pi}{4}$
6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x \geq 2, \\ kx, & x < 2 \end{cases}$ 有最大值，则 k 的最大值为
A. $\frac{\ln 2}{4}$ B. $\frac{\ln 2}{2}$ C. $\frac{1}{2e}$ D. $\frac{1}{e^2}$



7. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 的极值点与 $g(x) = \tan(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 的零点完全相同, 则 $\omega =$

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 2^n$, 则

A. $9a_7 > 8a_8$

B. $9a_7 < 8a_8$

C. $9S_7 > 7a_8$

D. $9S_7 < 7a_8$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 设 α, β, γ 表示三个不同的平面, m 表示直线, 则下列选项中, 使得 $\alpha // \beta$ 的是

A. $m // \alpha, m // \beta$

B. $m \perp \alpha, m \perp \beta$

C. $\gamma // \alpha, \gamma // \beta$

D. $\gamma \perp \alpha, \gamma \perp \beta$

10. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, $f(x) \geq g(x)$ (当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立), 则下列结论可能正确的是

A. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(0)$, 且 $g(x) \leq g(0)$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(0)$, 且 $g(x) \geq g(0)$

C. $\forall x_1 \in \mathbf{R}, f(x_1) \leq f(0)$, 且 $\exists x_2 \in \mathbf{R}, g(x_2) > g(0)$

D. $\exists x_1 \in \mathbf{R}, f(x_1) < f(0)$, 且 $\exists x_2 \in \mathbf{R}, g(x_2) > g(0)$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 定义: $\|AB\|_n = (|x_1 - x_2|^n + |y_1 - y_2|^n)^{\frac{1}{n}}$.

若 $s, t \in \mathbf{N}^*$, 且 $s < t$, 则下列结论正确的是

A. 若 A, B 关于 x 轴对称, 则 $\|AB\|_s = \|AB\|_t$

B. 若 A, B 关于直线 $y=x$ 对称, 则 $\|AB\|_s \geq \|AB\|_t$

C. 若 $\|OA\|_s = 2\|OB\|_s$, 则 $\|OA\|_t = 2\|OB\|_t$

D. 若 $P = \{M \mid \|AM\|_s \leq 1\}$, $Q = \{M \mid \|AM\|_t \leq 1\}$, 则 $P \subseteq Q$



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知点 A 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上， $\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ ，则原点 O 与 B 的最短距离为_____。

13. 已知 $\sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$ ， $\cos 2\alpha = 4\sin^2 \beta$ ，则 $\cos(2\alpha + \beta) =$ _____。

14. 设函数 $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ ，其中 $a < b < c$ 。若 $f(1 + x)f(2 - x) \leq 0$ ，则 $a + b + c =$ _____。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c ，面积为 S ，且 $S = a^2 \sin 2B$ 。

(1) 证明： $\tan B = 3 \tan A$ ；

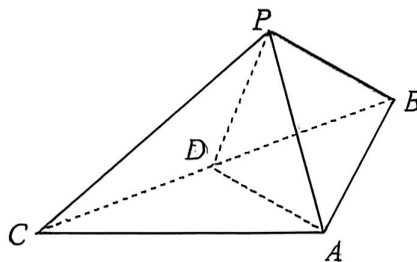
(2) 若 $A = 45^\circ$ ， BC 边上的高为 6，求 b 。

16. (15 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PB = PC$ ， D 为 BC 的中点，平面 $PAD \perp$ 平面 PBC 。

(1) 证明： $AB = AC$ ；

(2) 若 $AB \perp AC$ ， $AB = 2$ ， $PA = PD = 1$ ，求平面 PAB 与平面 PAC 的夹角的正弦值。



17. (15 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 4, 一条渐近线的方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

过点 $(6, 0)$ 的直线 l 与 C 的右支交于 A, B 两点.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) P 是 x 轴上的定点, 且 $\angle APB = 90^\circ$.

(i) 求 P 的坐标;

(ii) 若 $\triangle APB$ 的外接圆被 x 轴截得的弦长为 16, 求外接圆的面积.

18. (17 分)

某公司邀请棋手与该公司研制的一款机器人进行象棋比赛, 规则如下: 棋手的初始分为 200, 每局比赛, 棋手胜加 100 分; 平局不得分; 棋手负减 100 分. 当棋手总分为 0 时, 挑战失败, 比赛终止; 当棋手总分为 300 时, 挑战成功, 比赛终止; 否则比赛继续. 已知每局比赛棋手胜、平、负的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 且各局比赛相互独立.

(1) 求两局后比赛终止的概率;

(2) 在 3 局后比赛终止的条件下, 求棋手挑战成功的概率;

(3) 在挑战过程中, 棋手每胜 1 局, 获奖 5 千元. 记 $n (n \geq 10)$ 局后比赛终止且棋手获奖 1 万元的概率为 $P(n)$, 求 $P(n)$ 的最大值.

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = e^{x-1} - \frac{n}{x}, n \in \mathbb{N}^*.$

(1) 证明: $f(x)$ 有唯一零点;

(2) 记 $f(x)$ 的零点为 a_n .

(i) 数列 $\{a_n\}$ 中是否存在连续三项按某顺序构成等比数列, 并说明理由;

(ii) 证明: $2(\sqrt{n+1}-1) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq \frac{n+1+\ln n}{2}.$

