## §11.2　正弦定理

### 第1课时　正弦定理

学习目标　1.能借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系.2.掌握正弦定理，并能利用正弦定理解三角形、判断三角形解的个数问题．

知识点一　正弦定理

|  |  |
| --- | --- |
| 条件 | 在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c* |
| 结论 | ＝＝ |
| 文字叙述 | 三角形的各边与它所对角的正弦的比相等 |

知识点二　正弦定理可以解决两类有关三角形的问题

(1)已知两角和任意一边，求其他两边和一角．

(2)已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角(从而进一步求出其他的边和角)．

知识点三　正弦定理的变形

*R*为△*ABC*外接圆的半径

1．sin *A*∶sin *B*∶sin *C*＝*a*∶*b*∶*c*.

2.＝＝＝＝2*R*.

3．*a*＝2*R*sin *A*，*b*＝2*R*sin *B*，*c*＝2*R*sin *C*.

4．sin *A*＝，sin *B*＝，sin *C*＝.

1．正弦定理对任意的三角形都成立．(　√　)

2．在△*ABC*中，等式*b*sin *C*＝*c*sin *B*总能成立．(　√　)

3．在△*ABC*中，若*a*＞*b*，则必有sin *A*>sin *B*．(　√　)

4．任意给出三角形的三个元素，都能求出其余元素．(　×　)

一、已知两角及任意一边解三角形

例1　在△*ABC*中，已知*B*＝30°，*C*＝105°，*b*＝4，解三角形．

解　因为*B*＝30°，*C*＝105°，

所以*A*＝180°－(*B*＋*C*)＝180°－(30°＋105°)＝45°.

由正弦定理，得＝＝，

解得*a*＝＝4，*c*＝＝2(＋)．

反思感悟　(1)正弦定理实际上是三个等式：＝，＝，＝，每个等式涉及四个元素，所以只要知道其中的三个就可以求另外一个．

(2)因为三角形的内角和为180°，所以已知两角一定可以求出第三个角．

跟踪训练1　在△*ABC*中，已知*a*＝8，*B*＝60°，*C*＝75°，求*A*，*c*的值．

解　*A*＝180°－(*B*＋*C*)＝180°－(60°＋75°)＝45°.

由＝得，*c*＝＝＝＝4(＋1)．

所以*A*＝45°，*c*＝4(＋1)．

二、已知两边及其中一边的对角解三角形

例2　在△*ABC*中，已知*c*＝，*A*＝45°，*a*＝2，解三角形．

解　∵＝，∴sin *C*＝＝＝，

∵0°<*C*<180°，∴*C*＝60°或*C*＝120°.

当*C*＝60°时，*B*＝75°，*b*＝＝＝＋1；

当*C*＝120°时，*B*＝15°，*b*＝＝＝－1.

∴*b*＝＋1，*B*＝75°，*C*＝60°或*b*＝－1，*B*＝15°，*C*＝120°.

延伸探究　若把本例中的条件“*A*＝45°”改为“*C*＝45°”，则角*A*有几个值？

解　∵＝，∴sin *A*＝＝＝.

∵*c*＝>2＝*a*，∴*C*>*A*.

∴*A*为小于45°的锐角，且正弦值为，这样的角*A*只有一个．

反思感悟　已知两边及其中一边的对角，利用正弦定理解三角形的步骤

(1)用正弦定理求出另一边所对角的正弦值，进而求出这个角．

(2)用三角形内角和定理求出第三个角．

(3)根据正弦定理求出第三条边．

其中进行(1)时要注意讨论该角是否可能有两个值．

跟踪训练2　在△*ABC*中，*AB*＝2，*AC*＝3，*B*＝60°，则cos *C*等于(　　)

A. B. C. D.

答案　B

解析　由正弦定理，得＝，

即＝，解得sin *C*＝，

∵*AB*<*AC*，∴*C*<*B*，∴cos *C*＝＝.

已知两边及一边对角判断三角形解的个数

典例　不解三角形，判断下列三角形解的个数．

(1)*a*＝5，*b*＝4，*A*＝120°；

(2)*a*＝9，*b*＝10，*A*＝60°；

(3)*b*＝72，*c*＝50，*C*＝135°.

解　(1)sin *B*＝sin 120°＝×<，所以三角形有一解．

(2)sin *B*＝sin 60°＝×＝，而<<1.

所以当*B*为锐角时，满足sin *B*＝的角*B*的取值范围是60°<*B*<90°.满足*A*＋*B*<180°；

当*B*为钝角时，满足sin *B*＝的角*B*的取值范围是90°<*B*<120°，也满足*A*＋*B*<180°.故三角形有两解．

(3)sin *B*＝＝sin *C*>sin *C*＝.

所以*B*>45°，所以*B*＋*C*>180°，故三角形无解．

[素养提升]　(1)已知两边及其中一边的对角判断三角形解的个数的方法

①应用三角形中大边对大角的性质以及正弦函数的值域判断解的个数；

②在△*ABC*中，已知*a*，*b*和*A*，以点*C*为圆心，以边长*a*为半径画弧，此弧与除去顶点*A*的射线*AB*的公共点的个数即为三角形解的个数，解的个数见下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *A*为钝角 | *A*为直角 | *A*为锐角 |
| *a*>*b* | 一解 | 一解 | 一解 |
| *a*＝*b* | 无解 | 无解 | 一解 |
| *a*<*b* | 无解 | 无解 | *a*>*b*sin *A* | 两解 |
| *a*＝*b*sin *A* | 一解 |
| *a*<*b*sin *A* | 无解 |

(2)通过正弦定理和三角形中大边对大角的原理，判断三角形的解的个数，提升了逻辑推理和直观想象素养．

1．在△*ABC*中，*a*＝5，*b*＝3，则sin *A*∶sin *B*的值是(　　)

A. B. C. D.

答案　A

解析　根据正弦定理，得＝＝.

2．在△*ABC*中，一定成立的等式是(　　)

A．*a*sin *A*＝*b*sin *B* B．*a*cos *A*＝*b*cos *B*

C．*a*sin *B*＝*b*sin *A* D．*a*cos *B*＝*b*cos *A*

答案　C

解析　由正弦定理＝，

得*a*sin *B*＝*b*sin *A*.

3．在△*ABC*中，若*A*＝60°，*B*＝45°，*BC*＝3，则*AC*等于(　　)

A．4 B．2

C. D.

答案　B

解析　由正弦定理＝，得＝，

所以*AC*＝×＝2.

4．已知在△*ABC*中，*b*＝4，*c*＝2，*C*＝30°，那么此三角形(　　)

A．有一解 B．有两解

C．无解 D．解的个数不确定

答案　C

解析　由正弦定理和已知条件，得＝，

∴sin *B*＝>1，∴此三角形无解．故选C.

5．在△*ABC*中， *a*＝5，*b*＝5，*A*＝30°，则*B*＝ .

答案　60°或120°

解析　由正弦定理，得sin *B*＝＝＝.

∵*b*>*a*，∴*B*>*A*，且0°<*B*<180°，

∴*B*＝60°或120°.

1．知识清单：

(1)正弦定理．

(2)正弦定理的变形．

(3)利用正弦定理解三角形．

2．方法归纳：化归转化、数形结合．

3．常见误区：已知两边及一边所对的角解三角形时易忽略分类讨论．

1．在△*ABC*中，若*A*＝105°，*B*＝45°，*b*＝2，则*c*等于(　　)

A．1 B．2 C. D.

答案　B

解析　∵*A*＝105°，*B*＝45°，∴*C*＝30°.

由正弦定理，得*c*＝＝＝2.

2．在△*ABC*中，三个内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，已知*a*＝，*b*＝，*B*＝60°，那么*A*等于(　　)

A．135° B．90° C．45° D．30°

答案　C

解析　由正弦定理＝，得sin *A*＝＝＝，

∴*A*＝45°或135°.又∵*a*<*b*，∴*A*<*B*，∴*A*＝45°.

3．在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，且*A*∶*B*∶*C*＝1∶2∶3，则*a*∶*b*∶*c*等于(　　)

A．1∶2∶3 B．3∶2∶1

C．2∶∶1 D．1∶∶2

答案　D

解析　在△*ABC*中，因为*A*∶*B*∶*C*＝1∶2∶3，所以*B*＝2*A*，*C*＝3*A*，又*A*＋*B*＋*C*＝180°，所以*A*＝30°，*B*＝60°，*C*＝90°，所以*a*∶*b*∶*c*＝sin *A*∶sin *B*∶sin *C*＝sin 30°∶sin 60°∶sin 90°＝1∶∶2.

4．(多选)在△*ABC*中，若*a*＝2*b*sin *A*，则*B*等于(　　)

A. B.

C. D.

答案　AC

解析　由正弦定理，得sin *A*＝2sin *B*sin *A*，所以sin *A*·(2sin *B*－)＝0.因为0<*A*<π，0<*B*<π，所以sin *A*≠0，sin *B*＝，所以*B*＝或.

5．(多选)下列说法正确的是(　　)

A．在△*ABC*中，*a*∶*b*∶*c*＝sin *A*∶sin *B*∶sin *C*

B．在△*ABC*中，若sin 2*A*＝sin 2*B*，则*A*＝*B*

C．在△*ABC*中，若sin *A*>sin *B*，则*A*>*B*；若*A*>*B*，则sin *A*>sin *B*

D．在△*ABC*中，＝

答案　ACD

解析　对于A，由正弦定理＝＝＝2*R*，可得*a*∶*b*∶*c*＝2*R*sin *A*∶2*R*sin *B*∶2*R*sin *C*＝sin *A*∶sin *B*∶sin *C*，故A正确；

对于B，由sin 2*A*＝sin 2*B*，可得*A*＝*B*或2*A*＋2*B*＝π，

即*A*＝*B*或*A*＋*B*＝，故B错误；

对于C，在△*ABC*中，由正弦定理可得，sin *A*>sin *B*⇔*a*>*b*⇔*A*>*B*，因此*A*>*B*是sin *A*>sin *B*的充要条件，故C正确；

对于D，由正弦定理＝＝＝2*R*，

可得右边＝＝＝2*R*＝左边，故D正确．

6．在△*ABC*中，已知*a*＝2，*A*＝60°，则△*ABC*的外接圆的直径为 ．

答案

解析　△*ABC*的外接圆的直径为2*R*＝＝＝.

7．在△*ABC*中，若*c*＝，*C*＝135°，则＝ .

答案　2

解析　利用正弦定理的推论，得＝＝＝2.

8．△*ABC*的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，若cos *A*＝，cos *C*＝，*a*＝1，则sin *B*＝ ，*b*＝ .

答案

解析　在△*ABC*中，由cos *A*＝，cos *C*＝，

可得sin *A*＝，sin *C*＝，

所以sin *B*＝sin(*A*＋*C*)＝sin *A*cos *C*＋cos *A*sin *C*＝，

又*a*＝1，故由正弦定理得，*b*＝＝.

9．已知在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，*c*＝10，*A*＝45°，*C*＝30°，求*a*，*b*和*B*的值．

解　∵＝，

∴*a*＝＝＝10.

*B*＝180°－(*A*＋*C*)＝180°－(45°＋30°)＝105°.

又∵＝，

∴*b*＝＝＝20sin 75°

＝20×＝5(＋)．

10.如图，在△*ABC*中，*CA*＝2，*CB*＝1，*CD*是*AB*边上的中线．

求证：sin∠*BCD*＝2sin∠*ACD*.

证明　在△*DBC*中，由正弦定理得＝，在△*ACD*中，由正弦定理得＝，

即*BC*sin∠*BCD*＝*DB*sin∠*CDB*，*AC*sin∠*ACD*＝*AD*sin∠*CDA*.

∵sin∠*ADC*＝sin∠*BDC*，

又∵*CD*是*AB*边上的中线且*AC*＝2*BC*，

∴sin∠*BCD*＝2sin∠*ACD*.

11．在△*ABC*中，若＝，则*C*的值为(　　)

A．30° B．45° C．60° D．90°

答案　B

解析　由正弦定理，知＝，∴＝，

∴cos *C*＝sin *C*，∴tan *C*＝1，

又∵0°<*C*<180°，∴*C*＝45°.

12．(多选)根据下列条件，判断三角形解的情况，其中正确的是(　　)

A．*a*＝8，*b*＝16，*A*＝30°，有一解

B．*b*＝18，*c*＝20，*B*＝60°，有两解

C．*a*＝5，*c*＝2，*A*＝90°，无解

D．*a*＝30，*b*＝25，*A*＝150°，有一解

答案　ABD

解析　A中，∵＝，∴sin *B*＝＝1，

∴*B*＝90°，即只有一解；B中，∵sin *C*＝＝，且*c*>*b*，∴*C*>*B*，故有两解；C中，∵*A*＝90°，*a*＝5，*c*＝2，∴*b*＝＝＝，有解；D中，∵＝，∴sin *B*＝＝，又*b*<*a*，∴角*B*只有一解．

13．在△*ABC*中，角*A*，*C*的对边分别为*a*，*c*，*C*＝2*A*，cos *A*＝，则的值为(　　)

A．2 B. C. D．1

答案　C

解析　因为*C*＝2*A*，cos *A*＝，

所以＝＝＝，

即*a*＝＝＝，

所以3*a*＝2*c*，

即＝.

14．在△*ABC*中，*a*，*b*，*c*分别是内角*A*，*B*，*C*所对的边，且cos 2*B*＋3cos(*A*＋*C*)＋2＝0，*b*＝，则*c*∶sin *C*＝ .

答案　2∶1

解析　因为cos 2*B*＋3cos(*A*＋*C*)＋2＝0，

所以2cos2*B*－3cos *B*＋1＝0，

解得cos *B*＝或cos *B*＝1(舍去)，

因为0<*B*<π，所以*B*＝，

由正弦定理得*c*∶sin *C*＝*b*∶sin *B*＝2∶1.

15．锐角三角形的内角分别是*A*，*B*，*C*，并且*A*>*B*.则下列三个不等式中成立的是 ．(填序号)

①sin *A*>sin *B*；

②cos *A*<cos *B*；

③sin *A*＋sin *B*>cos *A*＋cos *B*.

答案　①②③

解析　*A*>*B*⇔*a*>*b*⇔sin *A*>sin *B*，故①成立．

函数*y*＝cos *x*在区间[0，π]上单调递减，

∵*A*>*B*，∴cos *A*<cos *B*，故②成立．

在锐角三角形中，

∵*A*＋*B*>，

∴0<－*B*<*A*<，

又函数*y*＝sin *x*在区间上单调递增，

则sin *A*>sin，

即sin *A*>cos *B*，

同理sin *B*>cos *A*，故③成立．

16．在△*ABC*中，*a*＝，*A*＝，试求△*ABC*的周长的取值范围．

解　由正弦定理，得＝＝，

即＝＝＝2，

∴*b*＝2sin *B*，*c*＝2sin *C*，

∴△*ABC*的周长为*L*＝*a*＋*b*＋*c*＝＋2sin *B*＋2sin *C*

＝＋2sin *B*＋2sin

＝＋3sin *B*＋cos *B*

＝＋2sin，

又*B*∈，

∴*B*＋∈，

∴sin∈，

∴*L*∈(2，3]．

即△*ABC*的周长的取值范围为(2，3]．