**专题2：双变量问题**

**【复习目标】**

**1.** 学会利用导数为工具研究双变量的恒成立问题、双参数不等式问题以及双变量的不等式证明等问题；

**2.** 感悟数形结合、函数方程、转化与化归的数学思想.

**【基础训练】**

**1.** (单选)已知$f\left(x\right)=alnx+\frac{1}{2}x^{2}\left(a>0\right)$若对于任意两个不等的正实数$x\_{1}$、$x\_{2}$，都有$\frac{f\left(x\_{1}\right)-f\left(x\_{2}\right)}{x\_{1}-x\_{2}}>2$恒成立，则$a$的取值范围是( ).

A．$\left(0，1\right]$ B．$\left[1，+\infty \right)$ C．$\left(0，3\right]$ D．$\left[1，2e\right)$

**变式：**已知函数$f(x)=mlnx-\frac{1}{2}x^{2}+1(m\in R)$，若$m$为区间$[1，4]$上的任意实数，且对任意$x\_{1}，x\_{2}\in (0，1]$，总有$\left|f\left(x\_{1}\right)-f\left(x\_{2}\right)\right|\leq t\left|\frac{1}{x\_{1}}-\frac{1}{x\_{2}}\right|$成立，则实数$t$的最小值为 ．

**2.** 若函数存在两个极值点，，（），则的取值范围是( ).

A． B． C． D．

**变式：**已知是函数的两个极值点，若不等式恒成立，则实数的取值范围是( ).

A． B． C． D．

**3.** 求证：.

**变式：**求证：().

**【例题精讲】**

**例1** 已知函数，，若成立，则的最小值为( ).

A． B． C． D．

【变式】若，令，则的最小值属于( ).

A． B． C． D．

**例2** (2021·全国·高考真题)已知函数$f\left(x\right)=x\left(1-lnx\right)$.

(1) 讨论$f\left(x\right)$的单调性；

(2) 设$a$，$b$为两个不相等的正数，且$blna-alnb=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

**例3**  已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}+\frac{1}{x}+2lnx-\frac{1}{3}$.

(1) 讨论$f\left(x\right)$的单调性；

(2) 设函数$g\left(x\right)=x^{3}-3lnx\left(x\geq 1\right)$，*P*，*Q*是曲线$y=g\left(x\right)$上的不同两点，直线$PQ$的斜率为$k$，曲线$y=g\left(x\right)$在点处*P*，*Q*切线的斜率分别为$k\_{1}$，$k\_{2}$，证明：$k\_{1}+k\_{2}>2k$.

**【课后作业】**

**1.** (单选)若对任意的$x\_{1}，x\_{2}\in \left(0，m\right)$，且$x\_{1}<x\_{2}$，都有$\frac{x\_{1}lnx\_{2}-x\_{2}lnx\_{1}}{x\_{1}-x\_{2}}<1$成立，则实数*m*的最大值是( ).

A．$e^{-2}$ B．$e$ C．$e^{2}$ D．$e^{-1}$

**2.** (单选)已知函数，若且满足，则的取值范围是( ).

A． B． C． D．

**3.** (单选)已知函数，且有两个极值点，其中，则的最小值为( ).

A． B． C． D．

**4.** (多选)设函数$f\left(x\right)=xlnx+\left(1-x\right)ln\left(1-x\right)$，则( ).

A．$f\left(x\right)=f\left(1-x\right)$

B．函数$f\left(x\right)$有最大值$-ln2$

C．若$x\_{1}+x\_{2}=1$，则$x\_{1}f\left(x\_{2}\right)+x\_{2}f\left(x\_{1}\right)\geq -ln2$

D．若$x\_{1}+x\_{2}<1$，且$\frac{1}{2}<x\_{2}<1$，则$f\left(x\_{2}\right)<f\left(x\_{1}\right)$

**5.** (多选)（2024·广东广州·一模）已知直线$y=kx$与曲线$y=lnx$相交于不同两点$M(x\_{1},y\_{1})$，$N(x\_{2},y\_{2})$，曲线$y=lnx$在点$M$处的切线与在点$N$处的切线相交于点$P(x\_{0},y\_{0})$，则( ).

A．$0<k<\frac{1}{e}$ B．$x\_{1}x\_{2}=ex\_{0}$ C．$y\_{1}+y\_{2}=1+y\_{0}$ D．$y\_{1}y\_{2}<1$

**6.** 已知函数，若，则的最小值为 .

**7.** 已知有两极值点，若，则 .

**8.** 已知函数$f\left(x\right)=\frac{x^{2}}{e^{ax}}$，其中$a>0$．

(1) 若$f\left(x\right)$在$\left(0,2\right]$上单调递增，求$a$的取值范围；

(2) 当$a=1$时，若$x\_{1}+x\_{2}=4$且$0<x\_{1}<2$，比较$f\left(x\_{1}\right)$与$f\left(x\_{2}\right)$的大小，并说明理由

**9.** 已知函数$f(x)=a(1-2lnx)+4x^{6}(a\in R)$．

(1) 讨论$f(x)$的单调性；

(2) 若$x\_{1}$，$x\_{2}\left(x\_{1}\ne x\_{2}\right)$为函数$g(x)=kx^{2}+\frac{1}{x^{2}}-lnx$的两个零点，求证：$\left(x\_{1}x\_{2}\right)^{4}>12e^{4}$．

**10.** 已知函数$f(x)=\frac{e^{x}-ax^{2}}{1+x}$有3个极值点$x\_{1},x\_{2},x\_{3}$，其中$e$是自然对数的底数．

(1) 求实数$a$的取值范围；

(2) 求证：$x\_{1}+x\_{2}+x\_{3}>-2$．