**专题2：双变量问题**

**【复习目标】**

**1.** 学会利用导数为工具研究双变量的恒成立问题、双参数不等式问题以及双变量的不等式证明等问题；

**2.** 感悟数形结合、函数方程、转化与化归的数学思想.

**【基础训练】**

**1.** (单选)已知若对于任意两个不等的正实数、，都有恒成立，则的取值范围是( ).

A． B． C． D．

**变式：**已知函数，若为区间上的任意实数，且对任意，总有成立，则实数的最小值为 ．

**2.** 若函数存在两个极值点，，（），则的取值范围是( ).

A． B． C． D．

**变式：**已知是函数的两个极值点，若不等式恒成立，则实数的取值范围是( ).

A． B． C． D．

**3.** 求证：.

**变式：**求证：().

**【例题精讲】**

**例1** 已知函数，，若成立，则的最小值为( ).

A． B． C． D．

【变式】若，令，则的最小值属于( ).

A． B． C． D．

**例2** (2021·全国·高考真题)已知函数.

(1) 讨论的单调性；

(2) 设，为两个不相等的正数，且，证明：.

**例3**  已知函数.

(1) 讨论的单调性；

(2) 设函数，*P*，*Q*是曲线上的不同两点，直线的斜率为，曲线在点处*P*，*Q*切线的斜率分别为，，证明：.

**【课后作业】**

**1.** (单选)若对任意的，且，都有成立，则实数*m*的最大值是( ).

A． B． C． D．

**2.** (单选)已知函数，若且满足，则的取值范围是( ).

A． B． C． D．

**3.** (单选)已知函数，且有两个极值点，其中，则的最小值为( ).

A． B． C． D．

**4.** (多选)设函数，则( ).

A．

B．函数有最大值

C．若，则

D．若，且，则

**5.** (多选)（2024·广东广州·一模）已知直线与曲线相交于不同两点，，曲线在点处的切线与在点处的切线相交于点，则( ).

A． B． C． D．

**6.** 已知函数，若，则的最小值为 .

**7.** 已知有两极值点，若，则 .

**8.** 已知函数，其中．

(1) 若在上单调递增，求的取值范围；

(2) 当时，若且，比较与的大小，并说明理由

**9.** 已知函数．

(1) 讨论的单调性；

(2) 若，为函数的两个零点，求证：．

**10.** 已知函数有3个极值点，其中是自然对数的底数．

(1) 求实数的取值范围；

(2) 求证：．