## 10.1.3　两角和与差的正切

学习目标　 1.能利用两角和与差的正弦、余弦公式推导出两角和与差的正切公式.2.能利用两角和与差的正切公式进行化简、求值、证明.3.熟悉两角和与差的正切公式的常见变形，并能灵活应用．

知识点　两角和与差的正切公式

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 名称 | 公式 | 简记符号 | 条件 |
| 两角和的正切公式 | tan(*α*＋*β*)＝ | T(*α*＋*β*) | *α*，*β*，*α*＋*β*≠*k*π＋(*k*∈**Z**) |
| 两角差的正切公式 | tan(*α*－*β*)＝ | T(*α*－*β*) | *α*，*β*，*α*－*β*≠*k*π＋(*k*∈**Z**) |

1．tan 105°的值为 ．

答案　－2－

2．若tan *α*＝3，tan *β*＝，则tan(*α*－*β*)＝ .

答案

3．若tan *α*＝2，则tan＝ .

答案　－3

4.＝ .

答案

一、给角求值

例1　化简求值：

(1)；

(2)；

(3)tan 23°＋tan 37°＋tan 23°tan 37°.

解　(1)原式＝tan(74°＋76°)＝tan 150°＝－.

(2)原式＝

＝tan(45°＋15°)

＝tan 60°＝1.

(3)∵tan 60°＝＝，

∴tan 23°＋tan 37°＝－tan 23°tan 37°，

∴tan 23°＋tan 37°＋tan 23°tan 37°＝.

反思感悟　利用公式T(*α*±*β*)化简求值的两点说明

(1)分析式子结构，正确选用公式形式：

T(*α*±*β*)是三角函数公式中应用灵活程度较高的公式之一，因此在应用时先从所化简(求值)式子的结构出发，确定是正用、逆用还是变形用，并注意整体代换．

(2)化简求值中要注意“特殊值”的代换和应用：

当所要化简(求值)的式子中出现特殊的数值“1”，“”时，要考虑用这些特殊值所对应的特殊角的正切值去代换，如“1＝tan ”，“＝tan ”，这样可以构造出利用公式的条件，从而可以进行化简和求值．

跟踪训练1　化简求值：

(1)；

(2)tan 10°·tan 20°＋(tan 10°＋tan 20°)．

解　(1)＝＝tan(45°＋75°)＝tan 120°＝－.

(2)∵tan(10°＋20°)＝＝，

∴tan 10°＋tan 20°＝(1－tan 10°·tan 20°)．

∴原式＝tan 10°·tan 20°＋×(1－tan 10°·tan 20°)

＝tan 10°·tan 20°＋1－tan 10°tan 20°

＝1.

二、给值求值(角)

例2　(1)已知tan＝，则tan *α*＝ .

答案

解析　tan＝tan＝.

方法一　＝，解得tan *α*＝.

方法二　tan *α*＝tan＝＝＝.

(2)已知tan(*α*－*β*)＝，tan *β*＝－，*α*，*β*∈(0，π)，求2*α*－*β*的值．

解　∵tan *β*＝－，tan(*α*－*β*)＝，

∴tan *α*＝tan[(*α*－*β*)＋*β*]

＝

＝＝，

tan(2*α*－*β*)＝tan[(*α*－*β*)＋*α*]

＝

＝＝1.

∵tan *α*＝>0，tan *β*＝－<0，

∴*α*∈，*β*∈，

∴*α*－*β*∈(－π，0)．

又∵tan(*α*－*β*)＝>0，

∴*α*－*β*∈，2*α*－*β*＝*α*＋(*α*－*β*)∈(－π，0)．

而tan(2*α*－*β*)＝1，∴2*α*－*β*＝－.

反思感悟　(1)关于求值问题，利用角的代换，将所求角转化为已知角的和与差，再根据公式求解．

(2)关于求角问题，先确定该角的某个三角函数值，再根据角的取值范围确定该角的大小．

跟踪训练2　已知tan *α*＝，tan *β*＝－2，且0<*α*<<*β*<π，

求：(1)tan(*α*－*β*)的值；

(2)角*α*＋*β*的值．

解　(1)tan(*α*－*β*)＝＝＝7.

(2)∵tan(*α*＋*β*)＝＝＝－1，

又0<*α*<，<*β*<π，

∴<*α*＋*β*<，

∴*α*＋*β*＝.

三、两角和与差的正切公式的综合应用

例3　(1)已知tan *α*＝2，证明：sin2*α*＋sin *α*cos *α*＝－－.

证明　因为tan *α*＝2，

所以左边＝＝＝＝.

右边＝－－＝－－＝－－tan＝－－tan ＝，

所以左边＝右边，所以原等式成立．

(2)如图，在△*ABC*中，*AD*⊥*BC*，*D*为垂足，*AD*在△*ABC*的外部，且*BD*∶*CD*∶*AD*＝2∶3∶6，求tan∠*BAC*.

解　∵*AD*⊥*BC*且*BD*∶*CD*∶*AD*＝2∶3∶6，

∴tan∠*BAD*＝＝，

tan∠*CAD*＝＝.

tan∠*BAC*＝tan(∠*CAD*－∠*BAD*)＝＝＝.

反思感悟　当化简的式子中出现“tan *α*±tan *β*”与“tan *α*·tan *β*”形式时，要把它们看成两个整体，这两个整体一是与两角和与差的正切公式有关，通过公式能相互转换，二是这两个整体还与根与系数的关系相似，在应用时要注意隐含的条件，能缩小角的范围．

跟踪训练3　(1)如图，在矩形*ABCD*中，*AB*＝*a*，*BC*＝2*a*，在*BC*上取一点*P*，使得*AB*＋*BP*＝*PD*，求tan∠*APD*的值．

解　由*AB*＋*BP*＝*PD*，

得*a*＋*BP*＝，

解得*BP*＝*a*，

设∠*APB*＝*α*，∠*DPC*＝*β*，

则tan *α*＝＝，tan *β*＝＝，

∴tan(*α*＋*β*)＝＝－18，

∠*APD*＋*α*＋*β*＝π，

∴tan∠*APD*＝18.

(2)若*A*＋*B*＝，求证：tan *A*tan *B*＋tan *A*＋tan *B*＝1.

证明　∵*A*＋*B*＝，

左边＝tan *A*tan *B*＋tan *A*＋tan *B*

＝tan *A*tan *B*＋tan(*A*＋*B*)(1－tan *A*tan *B*)

＝tan *A*tan *B*＋tan (1－tan *A*tan *B*)

＝tan *A*tan *B*＋1－tan *A*tan *B*

＝1.

∴原等式成立．

1．tan 255°等于(　　)

A．－2－ B．－2＋

C．2－ D．2＋

答案　D

解析　tan 255°＝tan(180°＋75°)＝tan 75°

＝tan(45°＋30°)＝

＝＝2＋.

2．若tan *β*＝3，tan(*α*－*β*)＝－2，则tan *α*等于(　　)

A. B．－ C．1 D．－1

答案　A

解析　tan *α*＝tan[(*α*－*β*)＋*β*]＝＝＝.

3．已知*A*，*B*都是锐角，且tan *A*＝，sin *B*＝，则*A*＋*B*＝ .

答案

解析　∵*B*为锐角，sin *B*＝，

∴cos *B*＝，∴tan *B*＝，

∴tan(*A*＋*B*)＝＝＝1.

又∵0<*A*＋*B*<π，∴*A*＋*B*＝.

4．计算＝ .

答案　1

解析　＝＝tan 45°＝1.

5．若tan *α*，tan *β*是方程*x*2＋5*x*＋6＝0的两个根，且*α*，*β*∈，则*α*＋*β*＝ .

答案　－

解析　*x*2＋5*x*＋6＝0，即(*x*＋3)(*x*＋2)＝0，

解得*x*＝－3或*x*＝－2，

令tan *α*＝－3，tan *β*＝－2，

∴*α*，*β*∈，∴*α*＋*β*∈(－π，0)，

tan(*α*＋*β*)＝＝＝1，

∴*α*＋*β*＝－.

1．知识清单：

(1)两角和与差的正切公式的推导．

(2)公式的正用、逆用、变形用．

2．方法归纳：转化法．

3．常见误区：公式中加减符号易记错．

1．与相等的是(　　)

A．tan 66° B．tan 24° C．tan 42° D．tan 21°

答案　B

解析　原式＝＝tan(45°－21°)＝tan 24°.

2．已知tan *α*，tan *β*是方程*x*2－2*x*－3＝0的两个根，则tan(*α*＋*β*)等于(　　)

A．－ B．－2 C．－3 D.

答案　D

解析　由题意知，tan *α*＋tan *β*＝2，tan *α*tan *β*＝－3，

∴tan(*α*＋*β*)＝＝＝.

3．(多选)已知cos *α*＝－，则tan等于(　　)

A．－ B．－7 C. D．7

答案　CD

解析　因为cos *α*＝－，

所以sin *α*＝±＝±，

所以tan *α*＝±.

当tan *α*＝时，tan＝＝；

当tan *α*＝－时，tan＝＝7.

4．若tan 28°·tan 32°＝*m*，则tan 28°＋tan 32°等于(　　)

A.*m* B.(1－*m*) C.(*m*－1) D.(*m*＋1)

答案　B

解析　∵28°＋32°＝60°，

∴tan 60°＝tan(28°＋32°)＝＝，

∴tan 28°＋tan 32°＝(1－*m*)．

5．若*α*＋*β*＝，则(1－tan *α*)·(1－tan *β*)等于(　　)

A. B．2 C．1＋ D．不确定

答案　B

解析　∵*α*＋*β*＝，

∴tan(*α*＋*β*)＝＝－1，

∴tan *α*＋tan *β*＝tan *α*·tan *β*－1，

∴(1－tan *α*)(1－tan *β*)＝1－(tan *α*＋tan *β*)＋tan *α*·tan *β*＝1－(tan *α*·tan *β*－1)＋tan *α*·tan *β*＝2.

6．已知tan *α*＝2，tan *β*＝－3，其中0°<*α*<90°，90°<*β*<180°，则＝ ，*α*－*β*＝ .

答案　－7　－45°

解析　＝＝－7.

因为tan(*α*－*β*)＝＝－1，

又0°<*α*<90°，90°<*β*<180°，

所以－180°<*α*－*β*<0°，

所以*α*－*β*＝－45°.

7.＝ .

答案　－

解析　＝

＝＝tan(15°－45°)

＝tan(－30°)＝－.

8．已知tan＝，tan＝－，则tan ＝ .

答案

解析　tan ＝tan

＝＝.

9．已知tan＝2，tan *β*＝.

(1)求tan *α*的值；

(2)求的值．

解　(1)∵tan＝2，

∴＝2，

∴＝2，

解得tan *α*＝.

(2)原式＝

＝＝

＝tan(*β*－*α*)＝

＝＝.

10．在△*ABC*中，tan *B*＋tan *C*＋tan *B*tan *C*＝，tan *A*＋tan *B*＋1＝tan *A*tan *B*，试判断△*ABC*的形状．

解　由tan *B*＋tan *C*＋tan *B*tan *C*＝得

tan(*B*＋*C*)＝＝＝，

又0<*B*＋*C*<π，

∴*B*＋*C*＝，①

又由tan *A*＋tan *B*＋1＝tan *A*tan *B*得

tan(*A*＋*B*)＝＝＝－.

又0<*A*＋*B*<π，

∴*A*＋*B*＝，②

由①②及*A*＋*B*＋*C*＝π，

解得*B*＝，*C*＝，*A*＝.

∴△*ABC*为等腰三角形．

11．(1＋tan 21°)(1＋tan 22°)(1＋tan 23°)(1＋tan 24°)的值为(　　)

A．16 B．8 C．4 D．2

答案　C

解析　由于21°＋24°＝45°，23°＋22°＝45°，

利用两角和的正切公式及其变形可得

(1＋tan 21°)(1＋tan 24°)＝2，

(1＋tan 22°)(1＋tan 23°)＝2，

故(1＋tan 21°)(1＋tan 22°)(1＋tan 23°)(1＋tan 24°)＝4.

12．在△*ABC*中，tan *A*＋tan *B*＋tan *C*＝3，tan2*B*＝tan *A*·tan *C*，则*B*等于(　　)

A．30° B．45° C．120° D．60°

答案　D

解析　由公式变形得

tan *A*＋tan *B*＝tan(*A*＋*B*)(1－tan *A*tan *B*)

＝tan(180°－*C*)(1－tan *A*tan *B*)

＝－tan *C*(1－tan *A*tan *B*)

＝－tan *C*＋tan *A*tan *B*tan *C*.

∴tan *A*＋tan *B*＋tan *C*

＝－tan *C*＋tan *A*tan *B*tan *C*＋tan *C*

＝tan *A*tan *B*tan *C*＝3.

又∵tan2*B*＝tan *A*tan *C*，∴tan3*B*＝3，

∴tan *B*＝，又0°＜*B*＜180°，∴*B*＝60°.

13．已知＝3，tan(*α*－*β*)＝2，则tan(*β*－2*α*)＝ .

答案

解析　由条件知＝＝3，

则tan *α*＝2，

因为tan(*α*－*β*)＝2，

所以tan(*β*－*α*)＝－2.

故tan(*β*－2*α*)＝tan[(*β*－*α*)－*α*]

＝＝＝.

14．已知*α*，*β*，*γ*都是锐角，且tan *α*＝，tan *β*＝，tan *γ*＝，则*α*＋*β*＋*γ*＝ .

答案

解析　∵tan(*α*＋*β*)＝

＝＝，

tan(*α*＋*β*＋*γ*)＝＝＝1，

∵*α*，*β*，*γ*∈，

∴*α*＋*β*∈(0，π)，

又tan(*α*＋*β*)＝>0，

∴*α*＋*β*∈，

∴*α*＋*β*＋*γ*∈(0，π)，

∴*α*＋*β*＋*γ*＝.

15．已知tan *α*＋tan *β*＝2，tan(*α*＋*β*)＝4，则tan2*α*＋tan2*β*的值为 ．

答案　3

解析　因为tan(*α*＋*β*)＝4，

所以＝4，

又tan *α*＋tan *β*＝2，

所以tan *α*tan *β*＝，

所以tan2*α*＋tan2*β*＝(tan *α*＋tan *β*)2－2tan *α*tan *β*

＝22－2×＝3.

16．是否存在锐角*α*，*β*，使得(1)*α*＋2*β*＝，(2)tan tan *β*＝2－同时成立？若存在，求出锐角*α*，*β*的值；若不存在，说明理由.

解　假设存在锐角*α*，*β*使得(1)*α*＋2*β*＝，

(2)tan tan *β*＝2－同时成立．

由(1)得＋*β*＝，

所以tan＝＝.

又tan tan *β*＝2－，

所以tan ＋tan *β*＝3－，

因此tan ，tan *β*可以看成方程*x*2－(3－)*x*＋2－＝0的两个根，设方程的两根为*x*1，*x*2，

解得*x*1＝1，*x*2＝2－.

若tan ＝1，

则*α*＝，这与*α*为锐角矛盾，

所以tan ＝2－，tan *β*＝1，

所以*α*＝，*β*＝，

所以满足条件的*α*，*β*存在，

且*α*＝，*β*＝.