高三复习要保持一定的思维张力*

——从一道立体几何测试题的讲评谈起

张　俊

（江苏省兴化市教师发展中心教研室，225700）

摘　要：高三二轮复习期间，一道立体几何测试题的考查结果不理想，讲评过程存在问题。为了提高教学效益，高三复习必须保持一定的思维张力，以不断培养学生的思维能力。为此，要在精心选择题目的基础上，精心设计教学过程，发挥题目应有的教育价值，尤其要激励学生正视困难，引导学生突破化解；鼓励学生多向思考，促进学生联系比较。

关键词：高中数学；高三复习；立体几何；解题教学；思维能力

一、一道立体几何测试题的讲评

高三二轮复习期间，我市举行了一次中档题专项测试，其中一道立体几何题如下：

如图1，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=ADC=60^\circ$，E 为 BC 的中点。

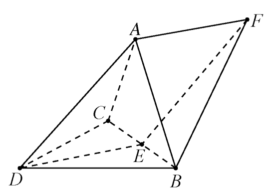

图1

（1）证明：$BC\perp DA$；

（2）空间一点 F 使得四边形 $ADEF$ 是平行四边形，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值。

这道题改编自2023年高考数学新课标Ⅱ卷第20题，满分12分。某校A班学生的均分仅为6.28分，远低于该校的均分。

按理说，经过一轮复习，一道中档的立体几何题不应该成为学生的障碍。是什么原因导致测试结果不理想呢？我调阅了A班学生的答题卡，发现所有学生解第一问用的都是

* 本文系江苏省教育科学“十三五”规划课题“指向高中生数学关键能力的解题教学实践研究”（编号：D/2020/02/220）的阶段性研究成果。

综合几何法，解第二问用的都是空间向量坐标法。解第二问时，以 D 为原点建系的学生很多，却无一人沿着这条路走到底；其他学生都以 E 为原点建系，但是其中不少人因为种种原因未能走到底，只有少数人完全做对。

班级整体测试结果不理想，通常都不只是学生的问题，还与教师（之前）的教学有关。为了了解教师的教学情况，我又到该校听了 A 班数学老师的试卷讲评课。该题的讲评过程大致如下：

教师读题后，先请一位学生板演第一问的解答过程：

(1)因为 E 为 BC 中点，$DB=DC$，所以 $DE\perp BC$（记为①）。

因为 $DA=DB=DC$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 均为等边三角形，所以 $AC=AB$，从而连接 AE 可得 $AE\perp BC$（记为②）。

由①②，且 $AE\cap DE=E$，AE、$DE\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp$ 平面 ADE。

而 $AD\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp DA$。

教师打对号评价后总结：对于立体几何解答题，一般地，第一问用综合几何法，第二问用空间坐标法。

然后问学生：第二小题应该怎么建系？学生作出图 2 后回答：以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系。教师点评：这样建系没有充分利用题目中隐含的三条直线两两垂直的信息，最好以 E 为原点建系。

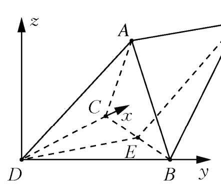

图 2

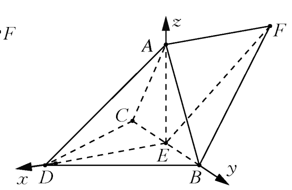

图 3

带领学生证明 $DE\perp AE$ 后，教师投影标准答案的解答过程：

(2) 不妨设 $DA=DB=DC=2$，则 $AB=AC=2$，故 $\triangle DBC\cong\triangle ABC$。

因为 $BD\perp CD$，所以 $AB\perp AC$，并且 $BC=2\sqrt{2}$，$DE=AE=\sqrt{2}$。

所以 $DE^2+AE^2=AD^2$，所以 $DE\perp AE$。

又因为 $DE\perp BC$、$AE\perp BC$，于是以 E 为原点，ED、EB、EA 所在直线分别为 x、y、z 轴，建立如图 3 所示的空间直角坐标系，则 $E(0,0,0)$、$D(\sqrt{2},0,0)$、$B(0,\sqrt{2},0)$、$A(0,0,\sqrt{2})$。又因为四边形 $ADEF$ 是平行四边形，所以 $F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$。

设平面 DAB 与平面 ABF 的一个法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$、$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}z_1=0,\\ \sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$ 得 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$。由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$

得 $\begin{cases}\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}z_2=0,\\ -\sqrt{2}x_2=0,\end{cases}$ 取 $y_2=1$ 得 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$。

设二面角 $D-AB-F$ 的平面角为 θ，则

$|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

停顿片刻后，教师总结：有了空间坐标法之后，立体几何题相当于计算题，只需要按部就班地运算，确保无误即可。

二、对高三复习教学的启示

这道题的讲评，引发了我对高三复习教学的思考。数学是思维的体操，数学教学要培养学生的思维能力，这是数学教育工作者的共识。然而，笔者看到的现状是：不少教师认为，培养思维能力是新授教学的事，高三复习时间紧、任务重，只需要多练题、多讲题。

实际上，如果不从根本上提升学生的思维水平，则无法应对常变常新的高考发展要求——尤其是在从知识立意转向能力和素养立意的高考改革背景下，反套路、反机械刷题已成为共识，新颖别致的试题层出不穷。因此，为了提高教学效益，高三复习必须始终保持一定的思维张力，即让学生多做有思维含量的事，把学生的思维调动起来，使其处于一种适度紧张的状态。

显然，保持思维张力，要精心选择例题和习题，将选题的落脚点放在是否有助于学生思维的展开，能否发展学生思维的深刻性、灵活性、批判性和创造性上。在此基础上，还要精心设计教学过程，发挥题目应有的教育价值。尤其要做好以下两点：

（一）激励正视困难，引导突破化解

保持思维张力，不能片面追求抓牢基础，让学生反复做简单题——不少地方存在这样的“应试”做法。对于较难的题目，要激励学生正视困难，不轻易放弃，进而引导学生积极探索，深入思考，或者迎难而上正面突破，或者另寻他途迂回化解，从而克服困难解决问题，从中增强意志品质（解题信心与毅力），磨炼思维品质（解题思想与智慧）。为此，首先要尊重学生的想法，理解学生的思路，从而准确把握学生在解题过程中遇到的困难。

上述测试题 A 班学生的均分不高，说明这道题对他们而言是普遍存在困难的。分析学生的答题情况和课堂表现可以发现，学生的困难具有一定的共性，主要在于怎样合理地建系，建系后如何写出相关点的坐标。

很多学生抓住 $BD \perp CD$ 这一特征，以图 2 所示的方式建系。这种建系方式有一定的合理性，我们要尊重学生的这一想法。这时，学生的困难在于无法求出点 A 和点 F 的坐标。课堂观察发现，教师是清楚学生在此处存在困难的，可惜他轻易地滑过了这一学情，强行拉到图 3 所示的建系方式下。事实上，即便以图 3 所示的方式建系，仍然有不少学生无法求出点 F 的坐标。课堂中，教师呈现了标准答案供学生记录，却忽略了隐藏在答案背后的学生困惑。

面对这一困难，我们既可以引导学生正面突破，也可以引导学生迂回化解。当然，即便是迂回化解，也应是在尝试正面突破后作出的理性选择。

首先是正面突破。以图 2 所示的方式建系，怎样求出点 A 的坐标呢？它不像 B、C 等点的坐标可以简单地观察或向坐标轴投影直接得到。我们可以引导学生分析点 A 的几何特征，借助于方程思想间接地求出它的坐标。不妨令 $DA=DB=DC=2$，设 $A(x,y,z)$，可以由长度条件 $AB=AC=AD=2$ 得 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\(x-2)^2+y^2+z^2=4,\\x^2+(y-2)^2+z^2=4,\end{cases}$ 据此得 $A(1,1,\sqrt{2})$；也可由角度条件 $\angle ADB=60^\circ$ 得 $\cos\angle ADB=\dfrac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{2x}{2\times2}=\dfrac{1}{2}$，据此得 $x=1$，同理得 $y=1$，再由长度条件 $DA=2$ 得 $x^2+y^2+z^2=4$，据此得 $z=\sqrt{2}$。经历了求点 A 坐标的过程，学生迁移相关的方法与经验，求点 F 的坐标自然不在话下：可以由 $ADEF$ 是平行四边形得 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$，进而得 $\overrightarrow{DF}$（即点 F）的坐标——这里其实融入了向量基底法的思想。

其次是迂回化解。在学生感受到以图 2 所示的方式建系求点 A 和点 F 坐标时陷入复杂的数式运算后，我们可以追问：为什么这样建系？还有没有其他建系方式？如何选择更合理的建系方式？事实上，学生以图 2 所示的方式建系，说明他们潜意识里已经发觉利用 $BD \perp CD$ 这一条件能够使一些点落在轴

上或轴面内，这是降维思想的萌芽。上述追问可以引发学生的关注，引导学生将无意识的行为转化为有意识的思考，将直觉的判断转化为理性的选择，将模糊的认识升华为清晰的策略。学生最终选择以图 3 所示的方式建系解决问题后，教师可以通过更多的例题帮助学生充分认识到：选择坐标系时，要充分利用已有的垂直关系，尽量让更多的点落在轴上或轴面内，从而优化解题的运算过程。可选取的例题如：

1.（2016 年高考数学全国乙理科卷）如图 4，在以 A、B、C、D、E、F 为顶点的五面体中，面 $ABEF$ 为正方形，$AF=2FD$，$\angle AFD=90^{\circ}$，且二面角 $D\text{-}AF\text{-}E$ 与二面角 $C\text{-}BE\text{-}F$ 都是 60°。

(1) 求证：平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$；

(2) 求二面角 $E\text{-}BC\text{-}A$ 的余弦值。

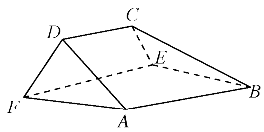

图 4

对于本题的第二问，注意到平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$，因此，最好让 z 轴落在平面 $EFDC$（x、y 轴落在平面 $ABEF$）中，进一步考虑让点 C 或 D 落在 z 轴上。这样，可以过点 C 或 D 作 EF 的垂线（垂足为 G），过点 G 在平面 $ABEF$ 内作 EF 的垂线 GH，以 G 为原点，$\overrightarrow{GE}$、$\overrightarrow{GH}$、$\overrightarrow{GC}$（或 $\overrightarrow{GD}$）所在直线为 x、y、z 轴，建立空间直角坐标系。由此，题中各点的坐标都容易表示，后续的计算便不成为困难。

2.（2017 年高考数学浙江卷）如图 5，已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$，$\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，$BC /\!/ AD$，$CD\perp AD$，$PC=AD=2DC=2CB$，点 E 为 PD 的中点。

(1)证明：$CE /\!/$ 平面 PAB；

(2)求 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值。

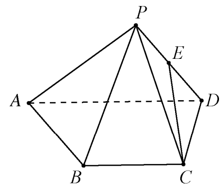

图 5

本题中蕴含着很多垂直关系，但是，到底怎样建系更容易计算大有讲究。过点 B 作 $BO\perp AD$ 于 O，以 O 为原点建立空间直角坐标系，这时点 P 恰好在轴面内。设 $BC=1$，不难表示出图中所有点的坐标，下面就一马平川了。

（二）鼓励多向思考，促进联系比较

保持思维张力，不能片面追求熟练度，让学生大量做题。对于精选的例题，要舍得花时间，让学生从不同的角度，运用不同的思维方法去解决。在多向思考中，学生势必要广泛地运用到有关的概念、公式、定理等，从而汇聚不同部分的知识，密切各个板块的联系，这对于发展思维、培养综合运用知识与方法的能力无疑大有裨益。在多向思考中，还可以引导学生反思解题过程、比较解题方法，归纳发现问题本质、感悟解题通法，进而优化解题思维，提升思维品质。

立体几何是发展学生直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的绝佳载体，历来是高考重点考查的内容。对于立体几何解答题，一般有综合几何和空间坐标两种基本的解题方法。综合几何法对于直观想象、逻辑推理能力有较高的要求，而空间坐标法操作流程固定清晰，思维含量相对较低，因此，在实际应用中更受到师生的青睐。那么，是不是有了空间坐标法，综合几何法就可以退出数学的舞台了呢？我们要辩证地看待这个问题。

首先需要指出，即使不考虑空间坐标法本身是算法思想凝结的思维之花，也不考虑数学运算本质上属于逻辑推理这种思维活动，而只从顺利解题的功利视角出发，空间坐

标法也并非如某些师生认为的只需要“无脑”地运算，其中充满着思维的成分，尤其是需要思考如何建系：建系方式不同，解题（运算）繁简迥异。例如上述迂回化解过程。

此外，一方面，空间坐标法相较于综合几何法，往往运算量比较大，稍有不慎，就前功尽弃；另一方面，空间坐标法虽然套路固定清晰，但是也将很多数学内涵隐藏在运算中，不利于学生感悟蕴含于问题中的数学本质。

对于上述测试题，如果注意到 $DE\perp$ 平面 ABC，所以 $FA\perp$ 平面 ABC，不难发现平面 $FAB\perp$ 平面 ABC，即二面角 $F-AB-C$ 为直二面角；而二面角 $D-AB-F$ 可以分解为二面角 $D-AB-C$ 和二面角 $F-AB-C$，故要求二面角 $D-AB-F$ 的大小，关键是求二面角 $D-AB-C$。具体地，如图 6，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于 G，过点 G 作 $GH\parallel AF$，交 BF 于 H，连接 GE，易知$\angle DGH$ 为二面角 $D-AB-F$ 的平面角，$\angle DGE$ 为二面角 $D-AB-C$ 的平面角，$\angle HGE$ 为二面角 $F-AB-C$ 的平面角，等于 90°，所以 $\sin\angle DGH=\sin(\angle DGE+90^\circ)=\cos\angle DGE=\frac{GE}{DG}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

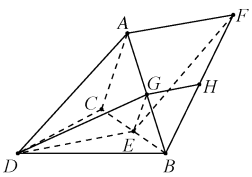

图 6

相对于空间坐标法，该解法简捷明快，不仅运算量小，更能让学生体验到思维的乐趣，而且能够揭示这道题的本质：在三棱锥 $A-BCD$ 中，求二面角 $D-AB-C$ 的大小。这是立体几何的基本问题，不难利用三垂线法作出其平面角来求解。这种感悟到问题本质的深层理趣是空间坐标法所无法给予的。

A 班所有学生第一问都用综合法，第二问都用坐标法。如此整齐划一，想来与教师过分强调、过度驯化不无关系。综合法和坐标法无所谓优劣，各擅胜场，因题而异，因人而异。让学生通过反思比较，迅速判断并作出选择，这也是需要培养的思维能力。

另外，需要说明的是，坐标法只是向量法的特殊状态。教学中，教师不应将向量法窄化为坐标法，而应让学生充分地感受到向量法的灵活性（可以任意选定基底）及其基本想法（将向量用选定的基底线性表示，即求各基底向量前的系数）与坐标法（求各维度的坐标）的一致性。

具体到上述测试题，提供的条件强烈地暗示可以 $\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DA}$ 作为基底来解决（这三个向量大小相等、两两的夹角已知）。过程如下：

（1）设 $\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{e}_3$，则 $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_3|=2$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=2$，则 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}=(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)\cdot\boldsymbol{e}_3=0$，所以 $BC\perp DA$。

（2）设平面 DAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_3$，则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\boldsymbol{e}_1\cdot(u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_3)=0,\\ \boldsymbol{e}_3\cdot(u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_3)=0,\end{cases}$ 取 $u=1$ 得 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$。类似地，由 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$，可得平面 ABF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$。据此，不难求得二面角 $D-AB-F$ 的平面角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$。

处理立体几何解答题，在强调学生掌握空间坐标法的同时，也不应关闭其他方法的大门。我们应该引导学生“既爱康庄的大道，也爱泥泞的小路”。事实上，那种罕有人至的小路更能培养学生的思维能力和数学素养，而只能按既定的路线行走的人注定是没有批判性与创造力的平庸者。