

# 华附、省实、广雅、深中 2025 届高三四校联考

## 数 学

命题学校：深圳中学

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的校名、姓名、考号、座位号等相关信息填写在答题卡指定区域内，并用 2B 铅笔填涂相关信息。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。

### 第 I 卷（选择题）

一.单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 已知集合  $A = \{x | \log_2 x < 1\}$ ， $B = \{x | 3x - 1 > 0\}$ ，则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $\left(\frac{1}{3}, 2\right]$       B.  $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$       C.  $(0, +\infty)$       D.  $\mathbf{R}$

2. 已知复数  $z$  满足  $z(1-i) = |1+i|^2$ ，则  $z =$  ( )

- A.  $1-i$       B.  $1+i$       C.  $-1-i$       D.  $-1+i$

3. 已知根据如下表所示的样本数据，用最小二乘法求得线性回归方程为  $\hat{y} = \hat{b}x + 10.3$ ，则  $\hat{b}$

的值为 ( )

- A.  $-0.6$       B.  $-0.7$   
C.  $-0.8$       D.  $-0.9$

|     |   |   |   |    |    |
|-----|---|---|---|----|----|
| $x$ | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| $y$ | 6 | 5 | 4 | 3  | 2  |

4. 已知向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  满足  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ， $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{c}| = 1$ ， $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ ，则  $|\vec{b}| =$  ( )

- A. 2      B. 7      C.  $\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{7}$

5. 对任意的  $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$ ， $8^x \leq \frac{3}{2} + \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 恒成立，则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(0, \frac{1}{9}\right]$       B.  $\left(0, \frac{1}{3}\right]$       C.  $\left[\frac{1}{9}, 1\right)$       D.  $\left[\frac{1}{9}, 1\right) \cup (1, 3]$

6. 已知  $S_n$  是等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，则“ $a_2, a_3, a_5$  依次成等差数列”是“ $S_3, S_9, S_6$  依次成等差数列”的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分又不必要条件

7. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x \cos \omega x - \sqrt{3} \sin^2 \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}$  ( $\omega > 0$ ) 在  $(0, \frac{\pi}{12})$  内单调递增, 则  $f(x)$  在  $(0, 2\pi)$  内的零点个数最多为 ( )

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

8. 三棱锥  $P-ABC$  的所有棱长均为  $2\sqrt{3}$ ,  $O$  是  $\triangle ABC$  的中心, 在三棱锥  $P-ABC$  内放置一个以直线  $PO$  为轴的圆柱, 则圆柱的体积不能超过 ( )

- A.  $\frac{8\sqrt{2}}{27}\pi$               B.  $\frac{4\sqrt{2}}{27}\pi$               C.  $\frac{8\sqrt{2}}{81}\pi$               D.  $\frac{4\sqrt{2}}{81}\pi$

二、多项选择题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。)

9. 一个袋子中有 5 个大小相同的球, 其中红球 3 个, 白球 2 个, 现从中不放回地随机摸出 3 个球作为样本, 用随机变量  $X$  表示样本中红球的个数, 用随机变量  $Y_i$  ( $i=1,2,3$ ) 表示第  $i$  次抽到红球的个数, 则下列结论中正确地是 ( )

A.  $X$  的分布列为  $P(X=k) = C_3^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{3-k}, k=1,2,3$

B.  $X$  的方差  $D(X) = \frac{9}{25}$

C.  $P(Y_2=1) = \frac{3}{5}$

D.  $P(Y_1=1 | Y_2=1) = \frac{1}{2}$

10. 已知函数  $f(x) = \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$ , 则下列结论中正确地是 ( )

A. 当  $x < 0$  时,  $f(x) < 0$

B.  $f(x)$  的图象关于  $(0,1)$  中心对称

C. 若  $m+n=0$ , 则  $|f(m)-f(n)| > 1$

D.  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减

11. 已知直线  $l: y=kx+2$  (其中  $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$ ) 与双曲线  $C: \frac{y^2}{3} - x^2 = 1$  的上支相交于  $A, B$  两点,  $M(x_0, y_0)$  为线段  $AB$  的中点. 过点  $M$  斜率为  $\pm\sqrt{3}$  的两条直线分别与双曲线  $C$  相交于  $P, Q$  两点. 则下列结论中正确地是 ( )

A. 点  $M$  的坐标满足  $y_0^2 - 2y_0 - 3x_0^2 = 0$

B. 方程  $(y-y_0)^2 - 3(x-x_0)^2 = 0$  表示的图形是直线  $MP$  和直线  $MQ$

C. 直线  $PQ$  与直线  $l$  始终保持平行

D. 直线  $PQ$  恒过某个定点

## 第 II 卷（非选择题）

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。）

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \cos x - ax, & x > 0, \\ b \cos x + x, & x < 0 \end{cases}$  为奇函数，其中  $a, b \in \mathbf{R}$ ，则  $a + b =$  \_\_\_\_\_.

13. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = 3 \times 2^n - a_n$ ，其前 2025 项的和为  $2^{2026}$ ，则  $a_{2n-1} =$  \_\_\_\_\_.

14. 绝大多数比赛都采用 “ $(2n-1)$ 局 $n$ 胜制”的规则，但也有一些项目，比如冰壶运动，其整个比赛通常是进行偶数局. 现有甲、乙两名同学进行一项趣味项目的比赛，两人约定比赛规则为：共进行  $2n (n \in \mathbf{N}_+)$  局，谁赢的局数大于  $n$  局，谁就获得最终胜利. 已知每局比赛中，甲获胜的概率均为  $p (0 < p < \frac{1}{2})$ ，乙获胜的概率均为  $(1-p)$ . 记甲赢得整个比赛的概率为  $P_{2n}$ . 若  $p = \frac{2}{5}$ ，则  $P_4 - P_2 =$  \_\_\_\_\_；若  $p = \frac{5}{12}$ ，则当  $2n =$  \_\_\_\_\_ 时， $P_{2n}$  最大.

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

15. (13 分) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $\cos C = \frac{2b+c}{2a}$ .

(1) 求  $A$ ;

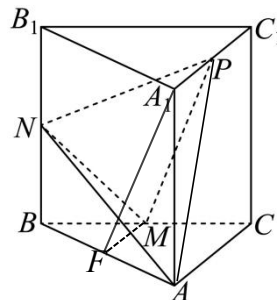
(2) 已知  $O$  为  $BC$  的中点， $OM \perp AB$  于  $M$ ， $ON \perp AC$  于  $N$ ，若  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2$ ，求  $\triangle ABC$  的面积.

16. (15 分) 已知直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AB = AC = AA_1$ ， $M, N$  分别为  $BC$  和  $BB_1$  的中点， $P$  为棱  $A_1C_1$  上的动点， $F$  为棱  $AB$  上一点，且  $A_1, P, M, F$  四点共面. 若  $AN \perp A_1C_1$ .

(1) 证明：平面  $ANP \perp$  平面  $A_1PMF$ ;

(2) 设  $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1C_1}$ ，是否存在实数  $\lambda$ ，使得平面  $AA_1B_1B$  与平面  $PMN$  所成的角的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ?

若存在，求出实数  $\lambda$ ，若不存在，请说明理由.



17. (15 分) 已知抛物线  $\Gamma: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 过点  $F$  的动直线  $l$  与  $\Gamma$  相交于  $A, B$  两点, 其中点  $A$  位于第一象限. 当  $|AF| = 2$  时, 以  $AF$  为直径的圆与  $x$  轴相切于点  $P(1, 0)$ .

(1) 求抛物线  $\Gamma$  的方程;

(2) 若点  $Q$  在抛物线  $\Gamma$  上, 且  $\Gamma$  在点  $Q$  处的切线与直线  $l$  平行, 求  $\triangle QFA$  面积的最小值以及此时直线  $l$  的方程.

18. (17 分) 已知函数  $f(x) = \ln x - a(x - \frac{1}{x})$ ,  $g(x) = \frac{2 \ln x}{x+1} - x - m$ .

(1) 若函数  $f(x)$  在其定义域上单调递减, 求实数  $a$  的最小值.

(2) 若函数  $g(x)$  存在两个零点  $x_1, x_2$ , 设  $x_1 < x_2$ .

(i) 求实数  $m$  的取值范围;

(ii) 证明:  $2 < x_1 + x_2 < 1 - m$ .

19. (17 分) “外观数列”是一类很有趣的数列, 该数列由正整数构成, 后一项是对它前一项的“外观描述”. 例如: 取数列第一项为 1, 将其外观描述为“1 个 1”, 则第二项即为 11; 将第二项 11 描述为“2 个 1”, 则第三项即为 21; 将第三项 21 描述为“1 个 2, 1 个 1”, 则第四项即为 1211; 将第四项 1211 描述为“1 个 1, 1 个 2, 2 个 1”, 则第五项即为 111221, 将第五项 111221 描述为“3 个 1, 2 个 2, 1 个 1”, 则第六项即为 312211, …… , 这样每次从左往右将连续相同的数字合并起来描述, 给定首项即可依次推出数列后面的每一项. 若数列  $\{a_n\}$  是外观数列, 将第  $n$  项  $a_n$  的各位数字中相同数字连续出现的最大次数记为  $b_n$ . 例如: 外观数列  $\{a_n\}$  的首项为 1 时,  $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 1, b_4 = 2, b_5 = 3, b_6 = 2$ .

(1) 若数列  $\{a_n\}$  是首项为 12 的外观数列, 请直接写出  $a_2, a_3$  以及  $b_2, b_3$ .

(2) 设集合  $A = \{1, 2, 3, \dots, 999\}$ , 若外观数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 \in A$ .

(i) 探究  $b_n$  的最大值, 并证明你的结论;

(ii) 求所有的  $a_1 \in A$ , 使得存在  $n_0 \neq 1$ , 有  $a_{n_0} = a_1$ .