# 2025届厦门市高三上学期期末质检数学评分标准

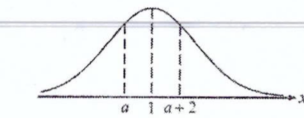
**一、单项选择题**：1~4 $BACD$　5~8 $CCBB$

1．答案：B 解析：易知 $i(1+i)=i-1$，所以 $i(1+i)$ 对应的点为 $(-1,1)$ 位于第二象限，故选 B.

2．答案：A 解析：易知集合 $A=\{0,5,8,9\}$，所以 $A\cap B=\{0,5\}$，故选 A.

3．答案：C 解析：设等轴双曲线的焦距为 $2c$，因为焦点到其渐近线的距离为 $b=1$，所以 $c=\sqrt{2}$，双曲线的焦距为 $2\sqrt{2}$，故选 C.

4．答案：D 解析：若 $m\,/\!/\,\alpha$，则 $m$，$n$ 平行或异面，A 选项错误；
若 $m\,/\!/\,n$，则 $m\,/\!/\,\alpha$ 或 $m\subset\alpha$，B 选项错误；
若 $m\perp n$，则 $m$，$\beta$ 不一定垂直，也可能平行或相交，C 选项错误；
若 $m\perp\beta$，则 $m\perp n$，D 选项正确；故选 D.




5．答案：C 解析：如图，$P(X\geq a+2)=0.3$，所以 $a+a+2=2\times1$，解得 $a=0$，故选 C.

6．答案：C 解析：$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=2(\sin\alpha+\cos\alpha)$，又 $\sin\alpha+\cos\alpha\neq0$，

则 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin2\alpha=\frac{1}{4}$，得 $\sin2\alpha=\frac{3}{4}$，故选 C.

7．答案：B 解析：易知 $x=-1$ 为 $C$ 的准线，过 $A$，$B$ 分别作 $x=-1$ 的垂线，垂足分别为 $M$，$N$，因为 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，所以 $2|AM|=|BN|$，即 $2|AF|=|BF|$，所以 $\triangle OAF$ 与 $\triangle OBF$ 的面积之比为 $\frac{1}{2}$，故选 B.

8．答案：B 解析：$f(x)=\ln(e^{ax-6}+1)-x=\ln(e^{(a-1)x-6}+e^{-x})$，依题意，$f(0)=f(6)$，
所以 $\ln(e^{-6}+e^{0})=\ln(e^{6a-6}+e^{-6})$，所以 $e^{-6}+e^{0}=e^{6a-12}+e^{-6}$，解得 $a=2$，
所以 $f(x)=\ln(e^{x-6}+e^{-x})$，因为 $e^{x-6}+e^{-x}\geq2\sqrt{e^{x-6}\times e^{-x}}=\frac{2}{e^3}$，所以 $f(x)\geq2-\ln3$，故选 B.

**二、多项选择题**：9. $ACD$　10. $AC$　11. $BC$

9．答案：ACD 解析：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+\sin\theta\cos\theta\geq2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，A 选项正确；
若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则 $2\cos\theta-\sin\theta=0$，解得 $\tan\theta=2$，所以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 可能共线，B 选项错误；
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,\sin\theta+\cos\theta)$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{9+(\sin\theta+\cos\theta)^2}\leq\sqrt{11}<5$，C 选项正确；
若 $\theta=\frac{\pi}{2}$，则 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=2\boldsymbol{b}$，
D 选项正确；综上所述，应选 ACD.

10．答案：AC 解析：因为样本中心点 $(4,80)$ 在直线 $y=-10.5x+\hat{a}$ 上，所以
$\hat{a}=80+4\times10.5=122$，A 选项正确；
血液中药物浓度 $y(mg/L)$ 随代谢时间 $x(h)$ 的增大而减小，所以变量 $y$ 与 $x$ 的相关系数 $r>0$，B 选项错误；
当 $x=5$ 时，$\hat{y}=-10.5\times5+122=69.5$，残差为 $68-69.5=-1.5$，C 选项正确；
令 $-10.5\times x+122=120\times0.2$，解得 $x\approx9.33$，D 选项错误；综上所述，应选 AC.

11．答案：BC 解析：$f(2)=2f(1)+1=1$，故 A 选项错误；
当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(n+1)=2f(n)+n$，等式两边同时加 $n+2$，得
$f(n+1)+(n+1)+1=2(f(n)+n+1)$，故 $f(n)+n+1=2^{n-1}(f(1)+2)=2^n$，
$f(n)=2^n-n-1$，故 B 选项正确；
当 $n-1<x<n$ 时，设 $f(x)=F(x)$，则 $F(x)$ 极小值点为 $x_n$，
所以当 $n<x<n+1$ 时，$f(x)=2F(x-1)+n-1$，此时，$f(x)$ 的极小值点为 $x_n+1$，即 $x_{n+1}=x_n+1$，所以 $x_{n+1}-x_n=1$，数列 $\{x_n\}$ 是等差数列，故 C 选项正确；



所以设 $f(x_n)=a_n$，则 $a_1=-\frac{1}{e}$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$，$a_{n+1}+n+1=2(a_n+n)$，

所以 $a_n=(1-\frac{1}{e})2^{n-1}-n$，当 $n\to+\infty$ 时，$f(x_n)\to+\infty$，故 D 选项错误. 综上所述，应选 BC.

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12．答案：$9\sqrt{3}\pi$ 解析：设圆锥的底面半径为 $r$，则 $2r=6$，解得 $r=3$，所以圆锥的高为 $3\sqrt{3}$，所以圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\pi$，应填 $9\sqrt{3}\pi$；

13．答案：$\frac{1}{2}$；$\frac{\pi}{2}$ 解析：依题意，$f(\pi)=0$，所以 $\begin{cases}\sin(\omega\pi+\varphi)=0\\ \sin(\omega\frac{2\pi}{3}+\varphi)=\frac{1}{2}\end{cases}$，即

$\begin{cases}\omega\pi+\varphi=(2k+1)\pi\\ \omega\frac{2\pi}{3}+\varphi=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$，

解得 $\omega=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2}+\varphi=(2k+1)\pi$，因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $|\varphi|=\frac{\pi}{2}$，应填 $\frac{1}{2}$，$\frac{\pi}{2}$；

14．答案：$\frac{5}{21}$ 解析：设 $A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且 $A\cap B=\varnothing$，
易知集合 $U$ 的非空子集个数为 $2^4-1=15$，任取两个集合 $A,B$ 共有 $C_{15}^2=105$ 种选法.
（方法一）①若 $\mathrm{card}(A\cup B)=2$，则共有 $C_4^2=6$ 种选法.；
②若 $\mathrm{card}(A\cup B)=3$，从 4 个元素里选 3 个，再分成两组（不平均），有 $C_4^3C_3^1=12$ 种选法；
③若 $\mathrm{card}(A\cup B)=4$，4 个元素平均分为两组共有 $\frac{C_4^2}{A_2^2}=3$ 种；不平均分组共有 $C_3^1=3$ 种，
小计共有 7 种选法；
所以选中的两个子集的交集为空集的概率为 $P=\frac{6+12+7}{105}=\frac{5}{21}$.
（方法二）①当 $\mathrm{card}(A)=1$ 时，4 个元素里任选一个放入集合 $A$ 中，集合 $B$ 共有 $2^3-1=7$ 种情况，故有 $C_4^1\times7=28$ 种情况；
②当 $\mathrm{card}(A)=2$ 时，4 个元素里任选两个放入集合 $A$ 中，集合 $B$ 共有 $2^2-1=3$ 种情况，故有 $C_4^2\times3=18$ 种情况；
③当 $\mathrm{card}(A)=3$ 时，4 个元素里任选三个放入集合 $A$ 中，集合 $B$ 共有 $2^1-1=1$ 种情况，故有 $C_4^3\times1=4$ 种情况；
总共有 $\frac{1}{2}(28+18+4)=25$ 种情况，
所以选中的两个子集的交集为空集的概率为 $P=\frac{25}{105}=\frac{5}{21}$.
（方法三）对于集合 $U$ 中的任意元素 $x$ 均有 $x\in A$，且 $x\notin B$；$x\in B$，且 $x\notin A$；$x\notin(A\cup B)$ 这三种选法，再减去集合 $A$，$B$ 其中一个为空集的情况，故共有
$\frac{1}{2}(3^4-2^4-2^4+1)=25$ 种，
所以选中的两个子集的交集为空集的概率为 $P=\frac{25}{105}=\frac{5}{21}$. 应填 $\frac{5}{21}$；

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15．解：（1）方法 1：由正弦定理可得 $\sin A\cos C-\sqrt{2}\sin B\cdot\cos A+\sin C\cdot\cos A=0$，
即 $\sin\left(A+C\right)-2\sin B\cdot\cos A=0$，即 $\sin B-\sqrt{2}\sin B\cdot\cos A=0$.

因为$B\in(0,\pi)$，可得$\sin B\neq 0$，所以$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$， 因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{4}$.

方法2：由余弦定理可得，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

所以$a\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=(\sqrt{2}b-c)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，整理得，$b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}bc$，

所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， 因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{4}$.

（2）$\angle CDB+\angle CDA=\pi$，所以$\sin\angle CDA=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以$\cos\angle CDA=\frac{\sqrt{10}}{10}$，或$\cos\angle CDA=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

（i）当$\cos\angle CDA=\frac{\sqrt{10}}{10}$时，因为$\angle ACD=\pi-\angle CDA-\angle BAC$，

所以$\sin\angle ACD=\sin(\angle CDA+\angle BAC)=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

在$\triangle ACD$中，由正弦定理得，$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AC}{\sin\angle CDA}$，即$AC=\frac{AD\cdot\sin\angle CDA}{\sin\angle ACD}$，

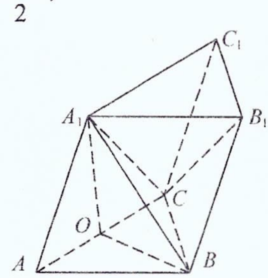
所以$AC=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

解得，$a=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{4})^2+2^2-2\times2\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{34}}{4}$，

（ii）当$\cos\angle CDA=-\frac{\sqrt{10}}{10}$时，同理得$\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$a=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

所以$a=\frac{\sqrt{34}}{4}$，或$a=\frac{\sqrt{10}}{2}$.




16. 解：（1）方法1：取$AC$的中点$O$，连接$A_1O$，$BO$，

因为$A_1A=A_1C$，所以$A_1O\perp AC$，且$A_1O^2+OA^2=AA_1{}^2=4$，

因为$AB\perp BC$，$BA=BC$，$O$为$AC$的中点，所以$OA=OB=OC$，

所以$A_1O^2+OA^2=A_1O^2+OB^2=4=A_1B^2$，所以$A_1O\perp BO$，

因为$OA\cap OB=O$，$OA\subset$平面$ABC$，$OB\subset$平面$ABC$，

所以$A_1O\perp$平面$ABC$， 因为$A_1O\subset$平面$ACC_1A_1$，所以平面$ABC\perp$平面$ACC_1A_1$.

方法2：设$O$为$A_1$在底面$ABC$的射影，则$A_1O$与$OA$，$OB$，$OC$均垂直，

因为$A_1B=A_1C=A_1A$，所以$OA=OB=OC$

射影$O$为底面$\triangle ABC$的外心，又$\triangle ABC$为直角三角形，

所以$O$恰为斜边$AC$的中点，因为$A_1O\subset$平面$ACC_1A_1$，所以平面$ABC\perp$平面$ACC_1A_1$.

（2）由（1）可知，$A_1O\perp$平面$ABC$，

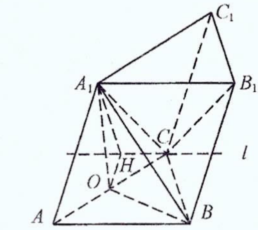
所以$A_1B$与平面$ABC$所成角即为$\angle A_1BO$，所以$\angle A_1BO=60°$，

因为$\triangle A_1AO\cong\triangle A_1BO$，所以$\angle A_1BO=\angle A_1AO=60°$，所以$A_1O=\sqrt{3}$，$AO=1$，

$\angle A_1BO=60°$. 求出$A_1O=\sqrt{3}$，$AO=1$

方法1：如图所示，以$O$为原点，分别以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA_1}$所在方向为$x$轴、$y$轴、$z$轴正方向，建立空间直角坐标系，则$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$C(-1,0,0)$，$B_1(-1,1,\sqrt{3})$，






所以$\overrightarrow{A_1B_1}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,\sqrt{3})$，

设平面$A_1B_1C$的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

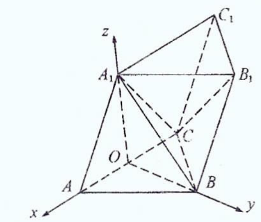
则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0,\\ y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令$z=1$，则$y=-\sqrt{3}$，$x=-\sqrt{3}$，

所以$\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$，

易知平面$ABC$的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，

设平面$A_1B_1C$与平面$ABC$的夹角为$\theta$，

所以$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{7}\times1}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，




所以平面$A_1B_1C$与平面$ABC$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$.

方法2：如图，过$C$作$AB$的平行线$l$，因为$AB// A_1B_1$，所以$l// A_1B_1$，

过$O$作$OH\perp l$，垂足为$H$，

因为$A_1O\perp CH$，$OH\perp CH$，$A_1O\cap OH=O$，

所以$CH\perp$平面$A_1OH$，因为$A_1H\subset$平面$A_1OH$，所以$A_1H\perp CH$，

所以平面$A_1B_1C$与平面$ABC$的夹角即为$\angle A_1HO$，

易知$OH=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\tan\angle A_1HO=\frac{A_1O}{OH}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$，

所以$\cos\angle A_1HO=\frac{\sqrt{7}}{7}$，平面$A_1B_1C$与平面$ABC$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$.

17. 解：（1）设圆$M$的半径为$r$，则由题意可知$|MC_1|=3-r$，且$|MC_2|=1+r$，

所以$|MC_1|+|MC_2|=4>2=|C_1C_2|$， 所以圆心$M$的轨迹为椭圆，

易知椭圆$C$的长轴长为$2a=4$，焦距为$2c=2$，所以$a=2$，$c=1$，

所以$b^2=a^2-c^2=3$， 所以$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）方法1：设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$可知，$x_1x_2+y_1y_2=0$，

当直线$PQ$的斜率不存在时，设直线$PQ:x=t$，则$P(t,y)$，$Q(t,-y)$，

由$\begin{cases}x=t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$可得，$y^2=3-\frac{3t^2}{4}$，所以$x_1x_2+y_1y_2=t^2-(3-\frac{3t^2}{4})=0$，解得$t^2=\frac{12}{7}$，

此时，圆$E$的面积为$\frac{\pi}{4}\times\frac{48}{7}=\frac{12\pi}{7}$.

当直线$PQ$的斜率存在时，设直线$PQ:y=kx+m$，

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$可得，$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

所以$x_1+x_2=\frac{-8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$，

所以$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$$=(k^2+1)\frac{4m^2-12}{3+4k^2}+km\frac{-8km}{3+4k^2}+m^2=\frac{-12k^2+7m^2-12}{3+4k^2}=0，$$

所以$-12k^2+7m^2-12=0$，即$7m^2=12+12k^2$，

代入$\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=16(12k^2+9-3m^2)>0$，

所以$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{16(12k^2+9-3m^2)}}{3+4k^2}=\sqrt{\frac{48}{7}}\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{16k^2+9}}{3+4k^2}$，

$=\sqrt{\frac{48}{7}}\sqrt{1+\frac{k^2}{(3+4k^2)^2}}\ge\sqrt{\frac{48}{7}}$，

当且仅当$k^2=0$时，$|PQ|$取得最小值$\sqrt{\frac{48}{7}}$，所以圆$E$面积的最小值为$\frac{\pi}{4}\times\frac{48}{7}=\frac{12\pi}{7}$.

方法2：因为以$PQ$为直径的圆$E$经过坐标原点$O$，所以$OP\perp OQ$，

① 当直线$OP$，$OQ$中有一条斜率不存在时，则另一条斜率为0，

易知$|PQ|^2=a^2+b^2=7$，所以圆$E$的半径为$\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以圆$E$的面积为$\frac{7\pi}{4}$.

②若$OP$，$OQ$的斜率均存在，设直线$OP:y=kx$，$OQ:y=-\frac{1}{k}x$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

所以由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx\end{cases}$可得$x_1^2=\frac{12}{4k^2+3}$，同理可得$x_2^2=\frac{12k^2}{4+3k^2}$，

所以$|PQ|^2=|OP|^2+|OQ|^2=(1+k^2)x_1^2+(1+\frac{1}{k^2})x_2^2$

$=\frac{12(1+k^2)}{4k^2+3}+(1+\frac{1}{k^2})\frac{12k^2}{4+3k^2}=7-\frac{7k^2}{(4k^2+3)(4+3k^2)}$，

所以$|PQ|^2=7-\frac{7}{12k^2+\frac{12}{k^2}+25}\ge7-\frac{7}{2\sqrt{12k^2\times\frac{12}{k^2}}+25}=\frac{48}{7}$，

当且仅当$k^2=1$时，$|PQ|^2$取得最小值$\frac{48}{7}$，此时圆$E$面积的最小值为$\frac{\pi}{4}\times\frac{48}{7}=\frac{12\pi}{7}$，

因为$\frac{7\pi}{4}>\frac{12\pi}{7}$，所以圆$E$面积的最小值为$\frac{12\pi}{7}$.

方法3：设$P(2\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$，$Q(2\cos\beta,\sqrt{3}\sin\beta)$，　因为$OP\perp OQ$，所以

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=4\cos\alpha\cos\beta+3\sin\alpha\sin\beta=0$，

所以$|PQ|^2=(2\cos\alpha-2\cos\beta)^2+(\sqrt{3}\sin\alpha-\sqrt{3}\sin\beta)^2$

$=6+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-(8\cos\alpha\cos\beta+6\sin\alpha\sin\beta)=6+\cos^2\alpha+\cos^2\beta$，

因为$4\cos\alpha\cos\beta=-3\sin\alpha\sin\beta$，所以

$16\cos^2\alpha\cos^2\beta=9\sin^2\alpha\sin^2\beta=9(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$，

整理得，$7\cos^2\alpha\cos^2\beta=9[1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)]$，

由基本不等式，得$\cos^2\alpha\cos^2\beta\le\frac{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)^2}{4}$，

所以$9[1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)]\le\frac{7(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)^2}{4}$，

设$t=\cos^2\alpha+\cos^2\beta>0$，则$9(1-t)\le\frac{7t^2}{4}$，即$(7t-6)(t+6)\ge0$，解得$t\ge\frac{6}{7}$，

所以$|PQ|^2=6+\cos^2\alpha+\cos^2\beta=6+t\ge\frac{48}{7}$，所以圆$E$面积的最小值为$\frac{\pi}{4}\times\frac{48}{7}=\frac{12\pi}{7}$.

方法4：设$|OP|=m$，$P(m\cos\alpha,m\sin\alpha)$，



因为$OP\perp OQ$，所以可设$|OQ|=n$，且$Q(n\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}),m\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}))$，

因为点$P(m\cos\alpha,m\sin\alpha)$在$C$上，

所以$\frac{m^2\cos^2\alpha}{4}+\frac{m^2\sin^2\alpha}{3}=1$，所以$\frac{1}{m^2}=\frac{\cos^2\alpha}{4}+\frac{\sin^2\alpha}{3}$，

同理可得，$\frac{n^2\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{2})}{4}+\frac{n^2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{2})}{3}=1$，所以$\frac{1}{n^2}=\frac{\sin^2\alpha}{4}+\frac{\cos^2\alpha}{3}$，

所以$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{\cos^2\alpha}{4}+\frac{\sin^2\alpha}{3}+\frac{\sin^2\alpha}{4}+\frac{\cos^2\alpha}{3}=\frac{7}{12}$，

所以$|PQ|^2=|OP|^2+|OQ|^2=m^2+n^2=\frac{12}{7}(m^2+n^2)(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2})$

$=\frac{12}{7}(2+\frac{n^2}{m^2}+\frac{m^2}{n^2})\ge\frac{12}{7}(2+2\sqrt{\frac{n^2}{m^2}\times\frac{m^2}{n^2}})=\frac{48}{7}$，

当且仅当$m=n$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$，或$\alpha=\frac{3\pi}{4}$，$\alpha=\frac{5\pi}{4}$，$\alpha=\frac{7\pi}{4}$时等号成立，

所以圆$E$面积的最小值为$\frac{\pi}{4}\times\frac{48}{7}=\frac{12\pi}{7}$.

18．解：（1）当$a=0$时，$f(x)=xe^{2x}$，$f'(x)=(2x+1)e^{2x}$，

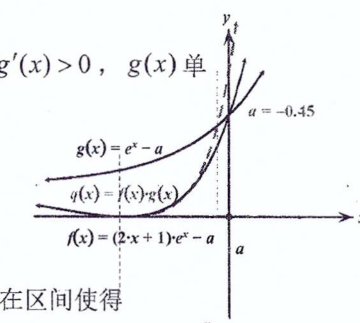
当$x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减，$x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$递增，

所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\frac{1}{2},+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,-\frac{1}{2})$.

（2）$f'(x)=(e^x-a)(2xe^x+e^x-a)$，

设$g(x)=2xe^x+e^x-a$，$g'(x)=2xe^x+e^x=(2x+3)e^x$，

当$x\in(-\infty,-\frac{3}{2})$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x\in(-\frac{3}{2},+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当$x=-\frac{3}{2}$时，$g(x)$取得极小值$g(-\frac{3}{2})=-2e^{-\frac{3}{2}}-a$，



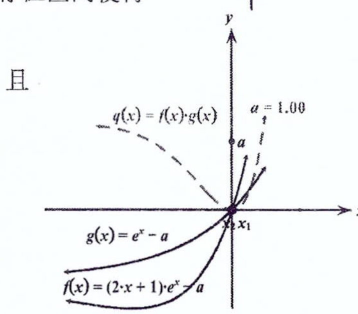

（i）所以当$a\le-2e^{-\frac{3}{2}}$时，$g(x)\ge0$，$e^x-a>0$，

所以$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，符合题意；

（ii）当$-2e^{-\frac{3}{2}}<a\le0$时，$y=e^x-a>0$，又$g(x)$存在两个零点，即存在区间使得$g(x)<0$，所以$f'(x)\ge0$不恒成立，不合题意；

（iii）当$a>0$时，若$f'(x)\ge0$，因为$y=e^x-a$的零点为$x=\ln a$，且

$g(-\frac{3}{2})=-2e^{-\frac{3}{2}}-a<0$




则$g(x)$与$y=e^x-a$有唯一相同零点且零点两侧函数值符号相同，

所以$g(\ln a)=2a\ln a=0$，解得$a=1$，

此时，当$x>0$时$2xe^x+e^x-1>e^x-1>0$；

当$x<0$时$2xe^x+e^x-1<e^x-1<0$，则$f'(x)\ge0$

所以综上$a$的取值范围为$(-\infty,-2e^{-\frac{3}{2}}]\cup\{1\}$（3）当$0<a<1$时，$g(-\frac{1}{2})=-a<0$，

$g(0)>0$，设$x_1$为$g(x)$的零点，则$-\frac{1}{2}<x_1<0$，因为$g(\ln a)=2a\ln a<0$，所以

$x_1 > \ln a$，

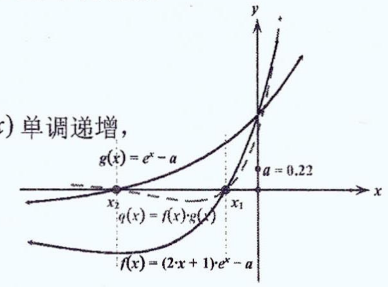
所以当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时，$y = e^x - a < 0$，$g(x) < 0$，所以 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x \in (\ln a, x_1)$ 时，$y = e^x - a > 0$，$g(x) < 0$，所以 $f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时，$y = e^x - a > 0$，$g(x) > 0$，所以 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $x_1 = x_0$，且 $2x_0 e^{x_0} + e^{x_0} - a = 0$，即 $e^{x_0} - a = -2x_0 e^{x_0}$，

所以 $f(x_0) = (e^{x_0} - a)^2 x_0 = (-2x_0 e^{x_0})^2 x_0 = 4{x_0}^3 e^{2x_0}$，




设 $h(x) = 4x^3 e^{2x} (-\dfrac{1}{2} < x < 0)$，则 $h'(x) = 4(2x+3)x^2 e^{2x} > 0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x) < h(0) = 0$，$h(x) > h(-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{2e}$，

所以 $-\dfrac{1}{2e} < f(x_0) < 0$.

19. 解：(1) 方法一：设 $|a_2 - a_1| = x \geq 0$，则 $|a_3 - a_2| = x + 2$，

因为 $a_3 - a_1 = (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = 4$，

若 $a_2 - a_1$ 与 $a_3 - a_2$ 均为负数，则 $-x - x - 2 = 4$，解得 $x = -3$，不合题意；

若 $a_2 - a_1$ 与 $a_3 - a_2$ 一正一负，则 $a_3 - a_1 = 2$ 或 $-2$，不合题意；

所以 $a_2 - a_1 = x$，$a_3 - a_2 = x + 2$，

所以 $2x + 2 = 4$，解得 $x = 1$，故 $a_2 - a_1 = 1$.

方法二：依题意可得 $|a_3 - a_2| = |a_2 - a_1| + 2$，又 $a_3 = a_1 + 4$

所以 $|a_2 - a_1 - 4| = |a_2 - a_1| + 2$

若 $a_2 - a_1 > 4$，则 $a_2 - a_1 - 4 = a_2 - a_1 + 2$，无解；

若 $0 < a_2 - a_1 \leqslant 4$，则 $4 - (a_2 - a_1) = a_2 - a_1 + 2$，得 $a_2 - a_1 = 1$

若 $a_2 - a_1 \leqslant 0$，则 $4 - (a_2 - a_1) = -(a_2 - a_1) + 2$，无解

综上，$a_2 - a_1 = 1$；

（也可：$|a_2 - a_1 - 4| = |a_2 - a_1| + 2$，平方化简得：$|a_2 - a_1| + 2(a_2 - a_1) = 3$，得 $a_2 - a_1 = 1$）

(2) (i) $d_{2n} = d_1 + (d_2 - d_1) + \cdots + (d_{2n} - d_{2n-1}) = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (2n-1) = n$，

因为 $d_{2n-1} = d_{2n} - (2n-1) = 1 - n$．所以 $S_{2n} = (d_1 + d_2) + (d_3 + d_4) + \cdots + (d_{2n-1} + d_{2n}) = n$.

(ii) 依题意，$|d_{n+1} - d_n| = n$，记 $d_{n+1} - d_n = nb_n$，其中 $b_n \in \{-1, 1\}$，

①若 $m$ 为奇数，

令 $b_n = (-1)^{n-1}$，由 (i) 可知，$S_{m-1} = \dfrac{m-1}{2}$，

因为 $d_m = d_1 + (d_2 - d_1) + \cdots + (d_m - d_{m-1}) = 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + m - 2 - (m-1) = -\dfrac{m-1}{2}$，

所以 $S_m = S_{m-1} + d_m = \dfrac{m-1}{2} - \dfrac{m-1}{2} = 0 \leq 4$，符合题意；

所以对任意给定的奇数 $m$，存在满足 $a_{n+1} - a_n = (-1)^{n-1} n$ 的 $\{a_n\}$ 使得 $|S_m| \leq 4$.

②若 $m$ 为偶数，

因为 $d_m = d_1 + (d_2 - d_1) + \cdots + (d_m - d_{m-1}) = b_1 + 2b_2 + \cdots + (m-1)b_{m-1}$，

$d_{m-1} = d_1 + (d_2 - d_1) + \cdots + (d_{m-1} - d_{m-2}) = b_1 + 2b_2 + \cdots + (m-2)b_{m-2}$，

……

$d_2 = d_1 + (d_2 - d_1) = b_1$，

$d_1 = 0$，



累加得 $S_m = (m-1)b_1 + 2(m-2)b_2 + \ldots + k(m-k)b_k + \ldots + (m-1)b_{m-1} = \sum\limits_{k=1}^{m-1} k(m-k)b_k$

由 (i) 知，令 $b_n = (-1)^{n-1}$ 可得，$S_m = \dfrac{m}{2}$.

若 $m \leq 8$，则 $|S_m| = \dfrac{m}{2} \leq 4$，符合题意，故下面只讨论 $m \geq 10$ 的情况.

易知 $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m-1} k(m-k)b_k = \dfrac{m^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m-1} b_k - \sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2} - k)^2 b_k$，

当 $k$ 为大于 1 的奇数时，$b_{k-1} = -1$，$b_k = 1$，设此时的 $k = j = \dfrac{m}{2} - i$，即 $b_{j-1} = -1$，

$b_j = 1$，

构造新数列 $\{c_n\}$，其中 $c_{j-1} = -b_{j-1} = 1$，$c_j = -b_j = -1$，其余各项均不变即 $c_k = b_k$

$(k \neq j-1, j)$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{m-1} c_k = \sum\limits_{k=1}^{m-1} b_k$，记 $\{b_n\}$ 调整为 $\{c_n\}$ 后该数列的前 $m$ 项和为 $S_m{}'$，

$\sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2} - k)^2 c_k = \sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2} - k)^2 b_k - 2(\dfrac{m}{2} - j + 1)^2 b_{j-1} - 2(\dfrac{m}{2} - k)^2 b_j = \sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2} - k)^2 b_k + 2(i+1)^2 - 2(i)^2$

则 $S_m{}' = \dfrac{m^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m-1} c_k - \sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2} - k)^2 c_k$

$= [\dfrac{m^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m-1} b_k - \sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2} - k)^2 b_k] - 4i - 2 = \dfrac{m}{2} - 4i - 2$，

令 $-4 \leq \dfrac{m}{2} - 4i - 2 \leq 4$，解得 $\dfrac{m-12}{8} \leq i \leq \dfrac{m+4}{8}$，则对任意给定的偶数 $m$，当

$j = \dfrac{m}{2} - [\dfrac{m-12}{8}] - 1$，或 $j = \dfrac{m}{2} - [\dfrac{m+4}{8}]$ 时，其中 $[x]$ 为不超过 $x$ 的最大整数，即存在 $\{c_n\}$

满足 $|S_m| \leq 4$，，

所以综上所述，对任意给定的正整数 $m$，总存在一个 $\{a_n\}$ 满足 $|S_m| \leq 4$

(3) 参数方法二：依题意 $|d_{n+1} - d_n| = n$，

设 $d_{n+1} - d_n = nb_n$，其中 $b_n \in \{-1, 1\}$．因为 $d_n = d_1 + (d_2 - d_1) + \cdots + (d_n - d_{n-1})$，

所以 $S_m = (d_m - d_{m-1}) + 2(d_{m-1} - d_{m-2}) + \cdots + (m-1)(d_2 - d_1) = \sum\limits_{i=1}^{m-1} i(m-i)b_i$.

(i) 若 $m = 2k+1$ 为奇数．因为 $i(m-i) = (m-i)[m-(m-i)]$，

所以当 $b_i = (-1)^{i-1}$ 时，$|S_m| = 0 \leq 4$，符合题意；

(ii) 若 $m = 2k$ 为偶数．由 (2) 知，当 $b_i = (-1)^{i-1}$ 时，$S_m = k$．若 $k \leq 4$，当 $b_i = (-1)^{i-1}$ 时，

$|S_m| = k \leq 4$，符合题意，故下面只讨论 $k > 4$ 的情况.

设正整数 $j$ 满足 $2j + 1 \leq k$．若将 $b_{2j} = -1$ 和 $b_{2j+1} = 1$ 的值对调，$S_m$ 的改变量

$\Delta S_m = 2[2j(m-2j) - (2j+1)(m-2j-1)] = 8j - 2m + 2$，

所以此时的前 $m$ 项和为 $S_m' = S_m + \Delta S_m = 8j + 2 - 3k$．记 $[x]$ 为不超过 $x$ 的最大整数.

当 $j$ 取遍 1，2，…，$[\dfrac{k-1}{2}]$ 时，$S_m'$ 取遍 $10 - 3k$，$18 - 3k$，……，$8[\dfrac{k-1}{2}] + 2 - 3k$.

因为 $10 - 3k \leq -5$，$8[\dfrac{k-1}{2}] + 2 - 3k \geq k - 2 \geq 3$，且上述序列中相邻两数之差为 8，

所以存在 $j \in \{1, 2, \cdots, [\dfrac{k-1}{2}]\}$，使得 $S_m' \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$，符合题意.