秘密 ★ 启用前 【考试时间：2025 年 1 月 15 日 15:00—17:00】

# 绵阳市高中 2022 级第二次诊断性考试

# 数　学

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将自己的班级、姓名、考号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4. 考试结束后，将答题卡交回。

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．已知复数 $z$ 满足 $z=\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$，则 $|z|=$

A．2　　B．3　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{5}$

2．已知集合 $A=\{(x,\ y)|y=x\}$，$B=\{(x,\ y)|x^2+(y-1)^2=1\}$，则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为

A．2　　B．1　　C．0　　D．不确定

3．直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=AA_1$，$AB\perp AC$，则 $AB_1$ 与 $BC$ 所成的角的大小为

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

4．若直线$l_1$：$x+2y-3=0$ 与直线$l_2$：$kx-2y+1=0(k\in\mathbf{R})$平行，则这两条直线间的距离为

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

5．已知等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，若$8S_6=7S_3$，则公比 $q=$

A．$q=2$　　B．$q=\dfrac{1}{2}$　　C．$q=-2$　　D．$q=-\dfrac{1}{2}$

6．已知过点 $P(2,\ -1)$的直线 $l$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于点 $A$，$B$ 两点，若 $A$，$B$ 的纵坐标分别为 $y_1$，$y_2$，则 $(y_1+1)(y_2+1)=$

A．$-4$　　B．$-3$　　C．0　　D．2

7. 已知正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2A_1B_1=4$，可在该正四棱台中放入的最大球的体积为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$，则点 $A_1$ 到平面 $BCC_1B_1$ 的距离为

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　D. $\sqrt{3}$

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若函数 $f(x)-g(x)$ 的值域为 $[-4，1]$，则函数 $f(2x)+g(2x)$ 的最小值为

A. $-16$　　　B. $-4$　　　C. $-1$　　　D. $0$

**二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．**

9. 对于函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，$g(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$，则

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期

C. 将 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，可得到 $g(x)$ 图象

D. $f(x)$ 图象与 $g(x)$ 图象在 $(0，\pi)$ 上只有一个交点

10. 设函数 $f(x)=x-a\ln x-\frac{b}{x}$ $(a，b\in\mathbf{R})$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 一定存在单调递减区间

B. 存在 $a$，$b$，使得 $f(x)$ 没有最值

C. 若 $f(x)$ 既有极大值，又有极小值，则 $a>2\sqrt{b}$

D. 令 $a=2$，$b=-3$，当 $0<x<3$ 时，$f(6-x)>f(x)$

11. 已知圆 $C_1$：$x^2+(y-2)^2=1$，双曲线 $C_2$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0，b>0)$ 的左，右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，$P$ 为双曲线 $C_2$ 右支上的一点，直线 $PF_2$ 的斜率恰好为该双曲线的离心率 $e$，且△$PF_1F_2$ 为直角三角形，则

A. $e$ 的值唯一　　　　　　B. $|PF_2|=\frac{2a}{e-1}$

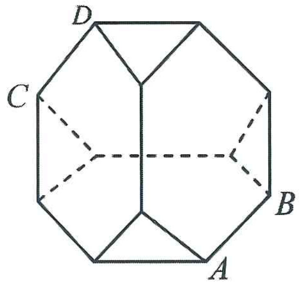
C. $1<e<2$　　　　　　　D. $C_2$ 的渐近线与 $C_1$ 共有 4 个公共点

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知$\boldsymbol{a}$=(2，1)，$\boldsymbol{b}$=(3，−3)，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__________.

13. 已知 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$， $\tan\alpha+\tan\beta=3$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$__________.

14. 在几何学的世界里，阿基米德体以其独特的形状和美丽的对称性吸引了无数数学爱好者和科学家，它是一种半正多面体，其中每个面都是正多边形，且各个面的边数不全相同．如图，棱长为 2 的半正多面体是将一个棱长为 6 的正四面体切掉 4 个顶点所在的小正四面体后所剩余的部分，已知 $A$，$B$，$C$，$D$ 为该半正多面体的四个顶点，点 $P$ 为其表面上的动点，且 $PD$//平面 $ABC$，则 $P$ 点的轨迹长度为__________.




四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （13 分）

已知△$ABC$ 内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，且 $a+b=2c\cos B$.

（1）若 $C=\dfrac{\pi}{2}$，求 $B$；

（2）若 $a=1$，$b=3$，求 $c$.

16. （15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+1$.

（1）若 $a$=0 时，求曲线 $f(x)$ 在(1，$f$(1))处的切线方程；

（2）若 1<$a$<e 时，$f(x)$ 在区间[0，1]上的最小值为 3−2ln2，求实数 $a$ 的值.

17. （15 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差大于 0 的等差数列，数列 $\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\}$ 的前 $n$ 项和为 $\dfrac{n}{3n+1}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

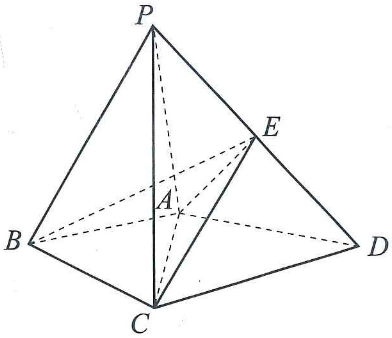
（2）设 $b_n=\begin{cases}k, & n=a_k,\\ 2^k, & a_k<n<a_{k+1},\end{cases}$ $k\in\mathbf{N}^*$.

（i）试写出 $b_1$，$b_2$，$b_3$ 的值；

（ii）求数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和 $S_{20}$.

18.（17分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形，$PC\perp AC$，点 $E$ 为 $PD$ 的中点，且 $AE=AD=2$，$CD=2\sqrt{2}$．




（1）求证：$AC\perp BE$；

（2）若二面角 $E-AC-D$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求三棱锥 $P-ACD$ 的体积；

（3）求直线 $PC$ 与平面 $ACE$ 所成角的正弦值的最大值．

19.（17分）

如图，已知面积为 $8\sqrt{3}$ 的矩形 $ABCD$，与坐标轴的交点 $E$，$F$，$G$，$H$ 是椭圆 $\Gamma$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的四个顶点，且该椭圆的离心率为 $\dfrac{1}{2}$．

（1）求椭圆 $\Gamma$ 的标准方程；

（2）$O$ 为坐标原点，过下顶点 $F$ 的直线与 $x$ 轴相交于点 $P$（不同于 $O$），与直线 $AD$ 相交于点 $R$，与椭圆 $\Gamma$ 相交于点 $M$，直线 $HM$ 与直线 $CD$ 相交于点 $Q$．

（i）证明：$\dfrac{|OP|}{|OG|}=\dfrac{|DQ|}{|DG|}$；

（ii）设线段 $QR$ 的中点为 $S$，$I$，$J$ 为椭圆 $\Gamma$ 上的两点，且直线 $SI$，$SJ$ 与椭圆 $\Gamma$ 都仅有一个公共点，$OT\perp IJ$，垂足为 $T$．探究：是否存在定点 $K$，使得 $|TK|$ 为定值？若存在，求点 $K$ 的坐标以及此定值；若不存在，请说明理由．