湖北省高中名校联盟2025届高三第三次联合测评

数　学

命题单位：湖北省武昌实验中学数学学科备课组　　审题单位：圆创教育教研中心　恩施高中

本试卷共4页，19题。满分150分。考试用时120分钟。　　考试时间：2025年2月6日下午15:00—17:00

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若 $z=(3+i)(2-5i)$，则 $\bar{z}=$

A. $12+5i$　　B. $11-13i$　　C. $11+13i$　　D. $-12-5i$

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2<x<5\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $(2,5)$　　B. $[2,5)$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $a_4=5$，$a_8=9$，则 S_{11} 为

A. 88　　B. 77　　C. 66　　D. 55

4. 已知 $\cos\alpha+2\sin\alpha=m$，$2\cos\alpha-\sin\alpha=n$，则 m^2+n^2 的值为

A. 3　　B. 5　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{5}{2}$

5. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=2xf'\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin x$，则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 在测量降雨量的实践活动中，某小组利用现有仪器，将一个玻璃漏斗固定在一个较大的锥形瓶上，漏斗的下端伸进锥形瓶内，下雨时将其置于室外收集雨水．如图所示，已知锥形瓶的底部直径为100 mm，瓶口直径为40 mm，玻璃漏斗口直径为80 mm，收集完毕后测得水面距瓶底30 mm，水面直径80 mm，则平地降雨量大约为（注：平地降雨量等于收集到的雨水体积与收集雨水的面积之比）

A. 25.6 mm　　B. 28.1 mm

C. 35.6 mm　　D. 38.1 mm

7. 已知一个等比数列的前 n 项，前 $2n$ 项，前 $3n$ 项的和分别为 S_n，S_{2n}，S_{3n}，则下列等式中正确的是

A. $S_n+S_{2n}=S_{3n}$

B. $S_{2n}^2=S_nS_{3n}$

C. $(S_n+S_{2n})-S_{3n}=S_{2n}^2$

D. $S_n^2+S_{2n}^2=S_n(S_{2n}+S_{3n})$

8. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 上的一点 P 作切线 l，设 l 与 x 轴相交于点 M，F 为 C 的焦点，直线 PF 交 C 于另一点 Q，则△PQM 面积的最小值为

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$　　B. 4　　C. $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$　　D. 3

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的有

A. 若样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{2025}$ 的平均数为 a，则数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{2025},a$ 的平均数为 a

B. 若随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(X<a)=0.5$，则 $a=2$

C. 若随机变量 $\xi\sim B\left(9,\dfrac{8}{9}\right)$，则 $E(\xi)=\dfrac{8}{9}$

D. 若随机变量 $\xi\sim B\left(9,\dfrac{8}{9}\right)$，设 $\eta=3\xi+1$，则 $D(\eta)=\dfrac{8}{3}$

10. 已知点 M 为△ABC 所在平面内一点，则

A. 若 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BM}$

B. 若 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$，则△$ABC$ 为等边三角形

C. 若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

D. 若 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $x+y=\dfrac{1}{3}$，则△MBC 的面积是△ABC 面积的 $\dfrac{2}{3}$

11. 已知函数 $f(x)=\cos^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}(\omega>0)$，则

A. $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

B. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{6\omega}\right)$ 上单调递增

C. 若 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上恰有一个极值点，则 ω 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{5}{12}\right]\cup\left[\dfrac{5}{6},\dfrac{11}{12}\right]$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $(2x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^2 的系数为 ________.

13. 设点 F_1，F_2 分别是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，过点 F_2 的直线 l 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A、B 两点，设△AF_1F_2 与△BF_1F_2 的内切圆半径分别为 r_1、r_2，则 $\dfrac{r_1}{r_2}$ 的值为________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, x\geqslant 0,\\ -x^2-2x, x<0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x)-kf(x)+1=0$ 恰有两个不同的实数根，则实数 k 的取值范围为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$a=\sqrt{3}$，$b+c=2$，D 为 BC 边上的点.

(1)若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，求角 A 的平分线 AD 的长；

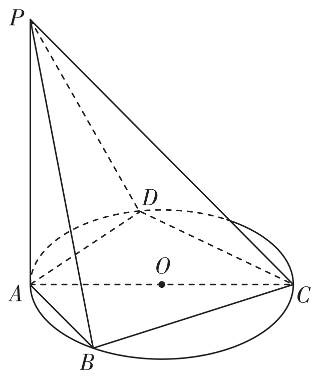
(2)求 BC 边上中线 AD 长的最小值.

16.（15 分）

如图，AC 是⊙O 的直径，PA 垂直于⊙O 所在的平面，B，D 是圆周上不同于 A，C 的两点.

(1) 求证：平面 $PAD\perp$平面 PCD；

(2)若 $PA=AC=2$，$AB=1$，直线 CD 与平面 PBC 所成的角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，求 AD.



17.（15 分）

已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{ax-1}{x-a}$，其中 $a>1$.

(1)当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$的对称中心；

(2)若函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{9}x$ 在区间(a,a^2+a-1)上单调递减，求实数 a 的取值范围.

18.（17 分）

已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，左、右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$. 椭圆 Γ 的上、下顶点分别记为 A、D，右顶点为 E.

(1)求 Γ 的方程；

(2)过上顶点 A 作直线 l 与 ED 的延长线交于 P，与椭圆 Γ 交于 B，点 B 关于 x 轴的对称点为 C. 延长 CA 交 DE 的延长线于 T，过 D 作 x 轴的平行线交 AE 的延长线于点 Q，连接 QP、QT.

（ⅰ）记直线 QP 与直线 QT 的斜率分别为 k_1，k_2，求 k_1k_2 的值；

（ⅱ）证明：$|QT|=|AP|$.

19.（17 分）

记集合 $S_n=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2\cdots,n\},n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$.

对于 $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in S_n$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$.

(1) $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in S_3$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，记随机变量 $X=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求 $P(X=0)$；

(2)若集合 $M\subseteq S_n$，对于 $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，请写出一个集合 M，使得集合 M 中的元素个数最多，并说明理由；

(3)若集合 $T\subseteq S_n$，对于 $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$，求证：集合 T 中至多有 2^{n-1} 个元素.