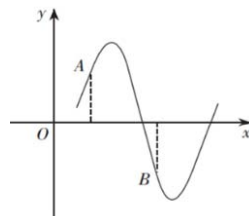


数学

第一部分（选择题共 58 分）

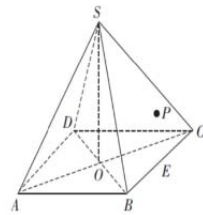
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $1+i = \frac{i-2}{z}$ ，则 $\bar{z}$ 在复平面上对应的点位于（ ）
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 函数 $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{x}{2}$ （ ）
 A. 是偶函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增 B. 是偶函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减
 C. 是奇函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增 D. 既不是奇函数也不是偶函数
3. 定义“等方差数列”：如果一个数列的各项都是实数，且从第二项起，每一项与它前一项的平方差是相同的常数，那么这个数列就叫做等方差数列，这个常数叫做该数列的公方差. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 是等方差数列，且公方差为 3， $a_1 = 1$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n + a_{n+1}}\right\}$ 的前 33 项的和为（ ）
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 6
4. 某学生的 QQ 密码是由前两位是大写字母，第三位是小写字母，后六位是数字共九个符号组成. 该生在登录 QQ 时，忘记了密码的最后一位数字，如果该生记住密码的最后一位是奇数，则不超过两次就输对密码的概率为（ ）
 A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$
5. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$ 的图象有两条与直线 $y = 2x$ 平行的切线，且切点坐标分别为 $P(x_1, f(x_1))$ ， $Q(x_2, f(x_2))$ ，则 $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围是（ ）
 A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ， $\left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，且 $f(x)$ 的图象经过 $A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ ， $B\left(\frac{5\pi}{4}, -1\right)$ 两点，若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值为（ ）
 A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $-\sqrt{3}$ D. -1



7. 如图, 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 6 的菱形 $\angle BAD = 60^\circ$, AC, BD 相交于点 O , $SO \perp$ 平面 $ABCD$, $SO = 4$, E 是 BC 的中点, 动点 P 在该棱锥表面上运动, 并且总保持 $PE \perp AC$, 则动点 P 的轨迹的长为 ()

- A. 3 B. 7 C. 13 D. 8



8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 0]$ 上单调递增, 且满足 $f(4-x) = f(x)$, $f(2-x) = -f(x)$, 则 ()

- A. $\sum_{k=1}^{10} f(k) = 0$ B. $f(0.9) + f(1.2) > 0$
C. $f(2.5) > f(\log_2 80)$ D. $f(\sin 1) > f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知随机变量 $X \sim N(4, 2)$, 若 $P(X > 6) = a$, $P(4 < X < 6) = b$, 则 ()

- A. $a + b = \frac{1}{2}$ B. $P(X < 2) = a$ C. $E(2X + 1) = 4$ D. $D(2X + 1) = 8$

10. 已知复数 z_1, z_2 满足: $|z_1 + \sqrt{3}| + |z_1 - \sqrt{3}| = 4$, $|z_2 - 2i| = 1$, 则 ()

- A. $|z_2|$ 的最小值是 1 B. $|\overline{z_1}|$ 的最大值是 2
C. $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$ 的最大值是 3 D. $|z_1 - z_2|$ 的最大值是 4

11. 若函数 $f(x) = 2\sin^2 x \cdot \log_2 \sin x + 2\cos^2 x \cdot \log_2 \cos x$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
C. $f(x)$ 的最小值为 -1 D. $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$

第二部分 (非选择题共 92 分)

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 斜率为 2 的直线 l 与 C 的交点为 A, B , 若 $|AF| + |BF| = 7$, 则直线 l 的方程为_____.

13. 抛掷一枚不均匀的硬币, 正面向上的概率为 $\frac{1}{4}$, 反面向上的概率为 $\frac{3}{4}$, 记 n 次抛掷后得到偶数次正面向上的概率为 a_n , 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 中, G, O 分别是 $\triangle ABC$ 的重心和外心 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AO} = 4, |\overrightarrow{AG}| = 2$, 则边 BC 的长为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤

15. (13 分) 用数学的眼光看世界就能发现很多数学之“美”. 现代建筑讲究线条感, 曲线之美让人称奇. 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率, 曲线的曲率定义如下: 若 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的曲率

$$K = \frac{|f''(x)|}{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$



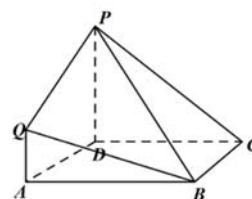
- (1) 若曲线 $f(x) = \ln x + x$ 与 $g(x) = \sqrt{x}$ 在 $(1, 1)$ 处的曲率分别为 K_1 , K_2 , 比较 K_1 , K_2 大小;
 (2) 求正弦曲线 $h(x) = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 曲率的平方 K^2 的最大值.

16. (15 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$, $a_1 + a_2 + a_3 = 14$, $a_2 + 1$ 是 a_1 , a_3 的等差中项. 等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $2b_1 = a_2$, $b_4 = a_3$.

- (1) $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和;
 (2) 将数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的所有项按照从小到大的顺序排列成一个新的数列, 求此数列的前 2^n 项和.

17. (15 分) 在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, 四边形 $ADPQ$ 是梯形, $PD \parallel QA$, $\angle PDA = \frac{\pi}{2}$, 平面 $ADPQ \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AD = PD = 2QA = 2$.

- (1) 求证: $QB \parallel$ 平面 PDC ;
 (2) 求平面 CPB 与平面 PBQ 所成角的大小;
 (3) 已知点 H 在棱 PD 上, 且异面直线 AH 与 PB 所成角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{3}}{15}$, 求点 A 到平面 HBC 的距离.



18. (17 分) 已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 4, 左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 其中 F_2 到其渐近线的距离为 1.

(1) 求双曲线 Γ 的标准方程;

(2) 若点 P 是双曲线 Γ 在第一象限的动点, 双曲线 Γ 在点 P 处的切线 l_1 与 x 轴相交于点 T .

(i) 证明: 射线 PT 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线;

(ii) 过坐标原点 O 的直线 l_2 与 l_1 垂直, 与直线 PF_1 相交于点 Q , 求 $\triangle QF_1F_2$ 面积的取值范围.

19. (本小题满分 17 分) 乒乓球赛有两种赛制, 其中就有“5 局 3 胜制”和“7 局 4 胜制”, “5 局 3 胜制”指 5 局中胜 3 局的一方取得胜利, “7 局 4 胜制”指 7 局中胜 4 局的一方取得胜利.

(1) 甲、乙两人进行乒乓球比赛, 若采用 5 局 3 胜制, 比赛结束算一场比赛, 甲获胜的概率为 0.8; 若采用 7 局 4 胜制, 比赛结束算一场比赛, 甲获胜的概率为 0.9. 已知甲、乙两人共进行了 $m (m \in \mathbf{N}^*)$ 场比赛, 请根据小概率值 $\alpha = 0.010$ 的 K^2 独立性检验, 来推断赛制是否对甲获胜的场数有影响.

(2) 若甲、乙两人采用 5 局 3 胜制比赛, 设甲每局比赛的胜率均为 p , 没有平局. 记事件“甲只要取得 3 局比赛的胜利比赛结束且甲获胜”为 A , 事件“两人赛满 5 局, 甲至少取得 3 局比赛胜利且甲获胜”为 B , 试证明: $P(A) = P(B)$.

(3) 甲、乙两人进行乒乓球比赛, 每局比赛甲的胜率都是 $p (p > 0.5)$, 没有平局. 若采用“赛满 $2n-1$ 局, 胜方至少取得 n 局胜利”的赛制, 甲获胜的概率记为 $P(n)$. 若采用“赛满 $2n+1$ 局, 胜方至少取得 $n+1$ 局胜利”的赛制, 甲获胜的概率记为 $P(n+1)$, 试比较 $P(n)$ 与 $P(n+1)$ 的大小.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.025	0.010
k_0	3.841	5.024	6.635