

# 试验问题引领高中数学定理教学

黄清钿

(大田县第五中学,福建 大田 366100)

**摘 要** 试验问题引领数学定理教学可较好地帮助学生理解定理、应用定理。试验问题引领教学是指课堂上指导学生就某一主题用准备好的道具动手试验,教师根据学生试验的过程和可能出现的结果设置若干问题而进行的教学。试验问题引领数学定理教学的常用方法有:试验问题引领定理情境创设、试验问题引领学生定理理解、试验问题引领学生定理验证、试验问题引领学生定理归纳。

**关键词** 高中数学;试验问题;定理教学

定理是指已经过推理证明为正确的命题或公式。其作为解决其他与之相关的数学问题的依据和方法,是高中数学的重要内容。由于定理内容的抽象性、逻辑的严密性和运用的灵活性,定理成为一些学生学好高中数学的瓶颈。课堂教学如何引导学生学好定理、用好定理是数学教师应研究的问题。试验问题引领教学即课堂上指导学生就某一主题用准备好的道具动手试验,教师根据学生试验的过程和可能出现的结果设置若干问题,引导学生解答、发现、总结、验证,让学生在动手思考中学会数学定义、定理等数学知识的一种教学方法。这种教学方法符合杜威“从做中学”的教学理念。试验问题引领定理教学正是杜威“做中学”理念有效落地的很好体现。<sup>[1]</sup>笔者就试验问题如何引领数学定理教学进行了探索。

## 一、试验问题引领定理情境创设

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出:高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质。<sup>[2]</sup>定理是高中数学的重点,也是难点。因为难,使得部分学生“怕定理”“不爱学定理”。究其原因,除了有学生基础弱等自身原因外,还与教师的无趣教学、低效教学有关。有的教师对定理的教学只是“解读加例题”,学生只能“一背二套”。学生能“背”,但不一定都能“套”,当碰到许多题目“套”不过去时,就会对定理产生反感情绪。如何调动学生学习定理的积极性?创设有趣的问题情境是调动学生学习积极性的很好途径,用试验问题创设情境则可吊开学生的听课“胃口”,对数学定理,学生用道具动手操作,在问题引领下思考探索,提高学习兴趣,主动投入到定理的学习中。例如,《等比数列的前 $n$ 项和公式》

[普通高中教科书2020年人教版《数学》(下同),选择性必修第二册,第四章4.3.2节],本节教学可用试验问题创设情境激发学生学习的兴趣。

课前准备:A4纸一张,大米约200粒。

课堂试验:每个学生拿出准备好的A4纸并在其上画一个6格表(格子不要太小)并将6个格子从1~6进行编号,要求学生在第1格放1粒米,在第2格放入2粒米,在第3格放入4粒米……依此类推,每个格子里放的米粒数都是前一个格子里放的米粒数的2倍,直到第6个格子。

问题引领:

- 1.算出纸张上6个格子共有多少粒米?你是怎么算的?
- 2.如果将你画的格子数增加到原来的5倍,共有30个格子,按照上面的方法在每个格子里放入相应的米粒数(米太多,格子放不下的,可寄在他处),这时30个格子里共有多少粒米?1000粒米重约25克,这些米大约有多少斤?这张纸上的米和1万元钱让你选一样,你要选哪个?

公布答案:对于问题2,学生基本上无法算出30个格子里共有多少粒米,而对后面的问题只能乱猜,而且多数学生会选择1万元。在学生为答案争吵不休时,教师公布答案:问题1,6个格子里共有63粒米。问题2,30个格子里共有1073741823粒米,约重53687斤,价值十几万元。如果你选择1万元就亏大了。

学生个个睁大眼睛感到很惊奇。这时,教师抛出主题诱问:“你们想知道这是怎么算出来的吗?”学生:“想!”教师再引导学生看书学习等比数列的前 $n$ 项和公式并进行讲解,学生学习热情高涨,能较好地记牢等比数列前 $n$ 项和公式:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1)。$$

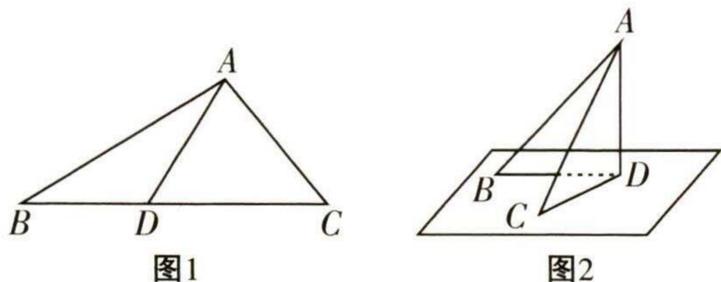
用试验问题进行情境教学,学生从好奇到动手,再到疑惑、思考,最后产生求知欲,大大提高了学生学习的积极性。本例中让学生准备大米,学生就感到好奇,如果用课本中的国王走国际象棋的故事引入,学生就没有好奇感。课堂上学生好奇大米的用途,通过动手后便知道了。等比数列的前  $n$  项和公式抽象且难记,用“大米”同公式联系起来,让抽象的公式增加了形象性和“记忆桩”,学生想到这个公式就会联系到“大米”,既可提高学生的学习兴趣,又可增强学生对公式的理解和记忆。

### 二、试验问题引领学生定理理解

在立体几何证明中需要用到相关的定义、定理、公理作为证明依据,其中定理发挥着重要的作用,但一些学生却十分“怕”解证明题,在解答证明题时常“空穴来风”“无中生有”,考试中的失分率很高。究其原因“书到用时方恨少”,在证明过程找不到每写一步的依据,无法运用定理进行证明。要让学生在几何证明中能准确运用定理,需要学生在学习定理时明白定理的来源背景、内容含义、应用条件。为此,要帮助学生理解定理的来源、条件、结论和应用范围。美籍匈牙利数学家波利亚说:“数学有两个侧面,一方面它是欧几里得式的严谨科学,从这个方面看,数学像是一门系统的演绎科学;但另一方面,创造过程中的数学,看起来却像一门试验性的归纳科学。”所以,从第二个侧面看,数学也是一门试验性的归纳科学。<sup>[3]</sup>在教学中引导学生动手试验并提出问题,有利于学生探究发现定理的来源、条件和结论,可较好地提高学生运用定理的能力。例如“直线与平面垂直的判定定理”(数学必修第二册 8.6.2 节)的教学用试验问题引领能较好帮助学生理解定理。

课前准备:任意三角形  $ABC$  纸片一张

课堂试验:取出准备好的三角形  $ABC$  纸片,过  $\triangle ABC$  顶点翻折纸片,得到折痕  $AD$ (如图 1),将翻折后的纸片竖起放置在桌面上( $BD, DC$  与桌面接触)。



问题引领:

1. 折痕  $AD$  与桌面垂直吗? 如何翻折才能使折痕  $AD$  与桌面所在的平面垂直? 为什么?

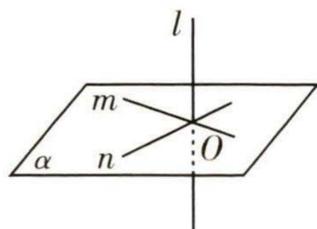


图3

2. 当折痕  $AD \perp BC$ , 如图 2, 翻折后  $AD$  与  $BD, AD$  与  $CD$  的垂直关系发生变化了吗? 这时  $AD$  垂直桌面吗?

3. 如果把折痕  $AD$  抽象为直线  $l$ , 把  $BD, CD$  抽象为直线  $m, n$  ( $m, n$  相交于  $O$  点), 把桌面抽象为平面  $\alpha$  (如图 3), 这时  $l \perp \alpha$  吗? 如果直线  $l$  不经过直线  $m, n$  的交点  $O, l \perp \alpha$  吗? 那么你认为保证直线  $l$  与平面  $\alpha$  垂直的条件是什么? 请总结出直线与平面垂直的判断方法。

4. 对照课本叙述直线与平面垂直的判定定理并用几何语言表示。

理解定理:

1. 要判断一条直线垂直于一个平面需要在这个平面上找两条直线, 对这两条直线有何要求?

2. 如果直线  $l$  与平面  $\alpha$  内一条直线垂直, 能否判定  $l \perp \alpha$ ? 为什么?

3. 如果直线  $l$  与平面  $\alpha$  内两条平行直线都垂直, 能否判定  $l \perp \alpha$ ? 为什么?

本例中, 学生通过尝试变化折痕的位置发现只有当折痕  $AD$  与  $\triangle ABC$  的边  $BC$  垂直时, 折后的三角形才能稳立于桌面。在教师的引导下, 学生发现折痕  $AD$  要垂直桌面必须让  $AD$  先垂直  $BD, CD$ 。教师进而将折痕抽象为直线  $l$ , 将  $BD, CD$  抽象为两条相交直线, 由两条相交直线确定一个平面, 学生不难得出结论: 要使直线  $l$  垂直一个平面, 必须找到直线  $l$  垂直平面里两条相交直线。学生先是动手试验, 体验三角形在桌面“站稳”与垂直的关系, 进而在问题的引领下进行探究思考, 逐步发现直线垂直平面所需要的条件, 最后总结出直线垂直平面的判定定理。在试验探究过程中, 学生知道了定理的来源, 记住了判定定理所需要的条件, 加深了对判定定理的理解, 提高了应用定理的能力。

### 三、试验问题引领学生定理验证

由于数学的抽象性, 许多数学结论学生学后很快遗忘, 特别是一些数学定理, 用死记的方法既记不牢, 也不能灵活运用。要让学生在课堂记牢定理并能灵活运用, 需要引导学生发现定理、验证定理并用好定理。数学试验问题引领教学能较好地引导学生学好定理和应用定理。在教学中, 先让学生动手试验, 教师提出问题引导学生思考, 学生在解答问题中发现定理得出结论, 并进一步对结论进行验证, 从而加深了对定理的印象。数学试验是通过动手动脑“做”数学的一种数学活

动,是学生运用有关工具在数学思维活动的参与下进行的一种以人人参与的实际操作为特征的数学验证或探究活动。<sup>[4]</sup>在高中数学中,有的定理公式受知识局限无法给出较完美的证明,但是可给出有说服力的验证。这种验证如果由教师来完成,则学生的学习是被动的,印象难以深刻;如果学生通过动手试验后在教师的问题引导下进行验证,则学生就能对定理的来源、内容、验证形成系统记忆,有利促进学生对公式的理解和应用。例如高中数学第二册第十章的10.2“事件的相互独立性”一节,从相互独立事件的定义中可得出结论:“ $A$ 、 $B$ 是两个相互独立的事件,则 $P(AB) = P(A)P(B)$ ”。在具体解题时,一些学生没有弄清本结论的运用条件,或不能将题目中的内容转化成公式,错误发生率较高。用试验问题引领教学可让学生在解答问题中发现定理、验证定理,降低学生的错误率。

课前准备:两枚质地均匀的硬币;四张扑克牌(任意花色):1,2,3,4。

课堂试验:

试验1:分别抛掷两枚硬币,观察硬币正面朝上的情况。重复试验若干次并记录每次试验结果。设 $A$  = “第一枚硬币正面朝上”, $B$  = “第二枚硬币反面朝上”。

试验2:将四张牌背面朝上叠在一起,采用有放回方式从中依次抽出两张,观察其数字大小。重复试验若干次并记录每次试验结果。设 $A$  = “第一次抽到的数字小于3”, $B$  = “第二次抽到的数字小于3”。

问题引领:

1. 试验1中,用1表示硬币“正面朝上”,用0表示硬币“反面朝上”,用集合的形式分别写出试验的样本空间及事件 $A$ 、 $B$ 、 $AB$ 。第一枚硬币的抛掷结果与第二枚硬币的抛掷结果是否相互影响?事件 $A$ 的发生与否会影响事件 $B$ 发生的概率吗?分别计算 $P(A)$ 、 $P(B)$ 、 $P(AB)$ 。

2. 试验2中,用集合的形式分别写出试验的样本空间及事件 $A$ 、 $B$ 、 $AB$ 。第一次抽牌的结果与第二次抽牌的结果是否相互影响?事件 $A$ 的发生与否会影响事件 $B$ 发生的概率吗?分别计算 $P(A)$ 、 $P(B)$ 、 $P(AB)$ 。

3. 从以上两个试验计算 $P(A)$ 、 $P(B)$ 、 $P(AB)$ 的结果,你有什么发现?写出你的结论。

4. 对于两个事件,要使 $P(AB) = P(A)P(B)$ ,事件 $A$ 、 $B$ 需要满足什么条件?

验证结论:学生分别在两个试验中比较 $P(A)$ 、 $P(B)$ 、 $P(AB)$ 的计算结果,容易得出结论——对于任意两个事件 $A$ 与 $B$ ,其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的概率,则事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生的概率

等于这两个事件各自发生的概率之积,即 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

学生通过自己动手完成两个试验,在试验问题的引领下分别计算两个事件单独发生的概率及两事件同时发生的概率,从而得出所需要的结论。教师再引导学生阅读教材,解读独立事件,这时学生理解独立事件的定义已是水到渠成。

#### 四、试验问题引领学生定理归纳

定理由题设和结论构成,正确运用定理需要理解定理中的题设包含的条件及结论的具体内容。在几何定理中由于一些学生不理解题设的具体条件,结果常将定理用错。其原因是学生被动听课,机械记忆定理内容,未能弄清定理题设与结论的实质。要让学生全面理解定理题设中的条件和结论的实际意义,需要让学生自主总结定理的题设和结论。归纳总结是人的一种重要思维方式,是学生获得数学结论的有效途径。《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出,逻辑推理是数学学科核心素养之一,是从一些事实和命题出发,依据规则推出其他命题的素养。主要包括两类:一类是从特殊到一般的推理,推理形式主要有归纳、类比;一类是从一般到特殊的推理,推理形式主要有演绎。逻辑推理是得到数学结论,构建数学体系的重要方式,是数学严谨的基本保证,是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质。<sup>[5]</sup>试验问题引领教学,学生通过动手试验,在教师设置的问题引领下边动手边思考边总结,逐步获得定理的内容,有利于学生发现定理、理解定理和应用定理。例如,人教版高中数学必修第二册第八章8.5.2直线与平面平行的判定定理用试验问题引领学生归纳定理可取得较好的教学效果。

课前准备:每人用硬纸板剪一个书本大小的直角梯形,铅笔一支。

课堂试验:试验1,将直角梯形纸板互相平行的两边中的一边放在桌面上,用铅笔紧贴另一边并用手抓住不让铅笔掉落,绕紧贴桌面那一边转动纸板,观察铅笔是否与桌面平行。试验2,把紧贴桌面的边换成直角腰并转动。观察铅笔是否与桌面平行。

问题引领:

1. 在试验1中,铅笔与桌面平行吗?为什么?在试验2中,铅笔与桌面平行吗?为什么?

2. 看教室的门,门扇的两边是平行的,当门扇绕着一边转动时(教师开动门扇),另一边与墙面有公共点吗?此时门扇转动的一边与墙面平行吗?

(下转第62页)

环节六:课外运用,开拓视野

【搭建问题支架】

个人作业:课本对应习题册。

小组作业:从数学文化、数学史角度了解数列发展过程,收集相关历史文献,通过撰写小论文的方式论述与数列相关的名著、名人、名题以及数列对人类文明的贡献等。

设计意图:追求作业的“成长性”,体现内容的延续性,设计创新型作业。<sup>[9]</sup>一方面,巩固学生本节课的基础知识和基本技能,做到活学活用;另一方面,激发学生的求知欲,养成主动思考、积极探索的好习惯,培养学生的创新意识,通过了解数列的发生发展过程,感悟我国古代数学的辉煌成就。

支架式教学模式通过学生已有的知识储备上,基于一定的学习任务,教师通过搭建合适的支架,分解并建构数学知识,使学生更高效、更可视化地执行学习任务,在教师引导的过程中逐渐撤去支架,使学生走向真正的自主学习。因此,“支架式教学模式”不仅是将数学核心素养落实课堂的脚手架,还是帮助学生提高自主学习能力的�重要方法。尽管支架式教学模式在高中数学课堂教学的研究成果较少,应用也未能广泛推广,但其现有成效逐渐获得数学教育界的认可。相信随着案例的积累和实际教学的开展,“支架式教学模式”的相关研究会更加丰富和完善,学生能够在支架式教学

活动中获得适应社会发展与自身发展的必备品格和关键能力。

参考文献

[1]乐玉丽,刘洁.支架式教学文献研究综述[A].劳动保障研究会议论文集(十五)[C].成都:四川劳动保障杂志出版有限公司,2022:130-134.  
 [2]何克抗.建构主义:革新传统教学的理论基础(二)[J].学科教育,1998(4):17-20.  
 [3]张建伟,陈琦.从认知主义到建构主义[J].北京师范大学学报(社会科学版),1996(4):75-82+108.  
 [4]教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020:2.  
 [5]黄林盛.基于深度教学的数学课堂实践:以“等比数列前项和”为例[J].福建中学数学,2023(5):15-18.  
 [6]曹越.基于支架式教学的高中数学翻转课堂教学研究[D].大连:辽宁师范大学,2022:31.  
 [7]魏闯.引入研究性学习理念推进高中数学课堂教学改革[J].数理化解题研究,2021(36):12-13.  
 [8]周志杰.科学搭建,提升效果:谈支架式教学在高中数学课堂中的应用[J].数学教学通讯,2017(12):33-34.  
 [9]黄炳锋.课程视域下高中数学单元作业的设计[J].福建基础教育研究,2022(7):53-56.

(责任编辑:万丙晟)

(上接第57页)

3.观察自己的试验,要使铅笔与桌面平行,铅笔应满足哪些条件?当铅笔转动到贴于桌面时,铅笔有无可能与桌面平行?

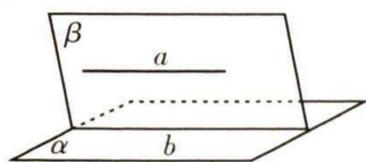
4.从转动门扇的试验看,门扇的一边与墙面平行,门扇的这一边有什么特点?

5.判断一条直线是否与一个平面平行,需要找出这条直线的哪些条件?试用几何语言表示。

6.设  $a, b$  是两条异面直线,则过  $a, b$  外一点  $P$  且与  $a, b$  都平行的平面存在吗?若存在,请画出平面,若不存在,请说明理由。

归纳定理:如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行,那么该直线与此平面平行。用几何语言表示:

$$a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, \text{且 } a // b \Rightarrow a // \alpha.$$



心理学表明,形象记忆要比抽象记忆更牢更久。试验1、2用铅笔代表直线,用桌面代表平面,学生在比

划过程通过问题引领容易找出直线平行平面应具备的条件,又通过教室的门扇作进一步验证,最后归纳得出线面平行的判定定理。铅笔、桌面具体形象是此定理的“记忆桩”,学生将线面平行的判定定理与铅笔、桌面联系起来,对定理的理解记忆更加深刻。问题6让学动手操作,探究直线平行平面的条件,加深对定理的认识,同时培养学生空间感与思维的严谨性。

参考文献

[1]刘炜.在实验中抽象,在经验上推理[J].中国数学教育(高中版),2022(6):38-44.  
 [2][5]教育部.普通高中数学课程标准(2017版2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020:3,5.  
 [3]周美兰,黄玉霞.学生数学表达能力的培养路径:“做中学”沉浸式学习[J].福建教育,2023(28):40-42.  
 [4]董林伟,孙朝仁.初中数学实验的理论研究与实践探索[J].数学教育学报,2014(6):20-25.

(责任编辑:万丙晟)