## 培优课　与指数函数、对数函数有关的复合函数

与指数函数、对数函数有关的复合函数,主要是指数函数、对数函数与一次函数、二次函数复合成的新函数,求新函数的单调性、奇偶性、最值、值域等问题,一般采用换元思想,把复杂的复合函数化成简单的初等函数.

一、复合函数单调性的判断与应用

例1　(1)讨论函数*f*(*x*)=log*a*(3*x*2-2*x*-1)的单调性.

解　由3*x*2-2*x*-1>0得函数的定义域为

.

则当*a*>1时,

若*x*>1,则*u*=3*x*2-2*x*-1是增函数,

∴*f*(*x*)=log*a*(3*x*2-2*x*-1)是增函数;

若*x*<-,则*u*=3*x*2-2*x*-1是减函数,

∴*f*(*x*)=log*a*(3*x*2-2*x*-1)是减函数.

当0<*a*<1时,

若*x*>1,则*f*(*x*)=log*a*(3*x*2-2*x*-1)是减函数;

若*x*<-,则*f*(*x*)=log*a*(3*x*2-2*x*-1)是增函数.

综上所述,当*a*>1时,函数*f*(*x*)在(1,+∞)上单调递增,在上单调递减;当0<*a*<1时,函数*f*(*x*)在(1,+∞)上单调递减,在上单调递增.

(2)已知函数*y*=lo(*x*2-*ax*+*a*)在区间(-∞,)上是增函数,求实数*a*的取值范围.

解　令*g*(*x*)=*x*2-*ax*+*a*,

则*g*(*x*)在上单调递减,

∵0<<1,

∴*y*=lo*g*(*x*)是关于*g*(*x*)的减函数.

而已知复合函数*y*=lo(*x*2-*ax*+*a*)在区间(-∞,)上单调递增,

∴只要*g*(*x*)在(-∞,)上单调递减,

且*g*(*x*)>0在*x*∈(-∞,)上恒成立,

即

∴2≤*a*≤2+2,

故实数*a*的取值范围是[2,2+2].

反思感悟　(1)形如函数*y*=log*af*(*x*)的单调性判断

首先要求定义域,在定义域内,当*a*>1时,*y*=log*af*(*x*)的单调性与*y*=*f*(*x*)的单调性保持一致;当0<*a*<1时,*y*=log*af*(*x*)的单调性与*y*=*f*(*x*)的单调性相反.

(2)已知复合函数的单调性求参数的取值范围要注意

①函数的定义域.

②遵循“同增异减”原则.

③区别“在区间[*a*,*b*]上单调递增(减)”与“增(减)区间是[*a*,*b*]”.

(3)对数型复合函数一般可分为两类:一类是对数函数为外函数,即*y*=log*af*(*x*)(*a*>0,*a*≠1)型;另一类是对数函数为内函数,即*y*=*f*(log*ax*)(*a*>0,*a*≠1)型.

跟踪训练1　(1)函数*y*=lo(-*x*2+2*x*+3)的增区间是(　　)

A.(-1,1] B.(-∞,1)

C.[1,3) D.(1,+∞)

答案　C

解析　由题意得,要使函数*y*=lo(-*x*2+2*x*+3)有意义,则要满足-*x*2+2*x*+3>0,

解得-1<*x*<3,

即函数的定义域为(-1,3),

令*g*(*x*)=-*x*2+2*x*+3,则*g*(*x*)在区间(-1,1]上单调递增,在区间[1,3)上单调递减,

又由函数*y*=lo*g*(*x*)在定义域上单调递减,

所以*y*=lo(-*x*2+2*x*+3)的增区间为[1,3).

(2)已知函数*f*(*x*)=e|*x*-*a*|(*a*为常数),若*f*(*x*)在区间(-∞,1]上单调递减,则*a*的取值范围是　　　　.

答案　[1,+∞)

解析　由函数*f*(*x*)=e|*x*-*a*|(*a*为常数),

且*f*(*x*)在区间(-∞,1]上单调递减,

得*t*=|*x*-*a*|在区间(-∞,1]上单调递减,

又函数*t*=|*x*-*a*|在区间(-∞,*a*]上单调递减,

所以(-∞,1]⊆(-∞,*a*],故有*a*≥1.

即*a*的取值范围为[1,+∞).

二、复合函数的值域与最值问题

例2　(1)求函数*y*=lo(3+2*x*-*x*2)的值域.

解　设*u*=3+2*x*-*x*2=-(*x*-1)2+4≤4.

∵*u*>0,

∴0<*u*≤4.

又*y*=lo*u*在(0,4]上单调递减,

∴lo*u*≥lo4=-2,

∴*y*=lo(3+2*x*-*x*2)的值域为[-2,+∞).

(2)求函数*y*=(lo*x*)2-lo*x*+5在区间[2,4]上的最大值和最小值.

解　因为2≤*x*≤4,所以lo4≤lo*x*≤lo2,

即-2≤lo*x*≤-1.

设*t*=lo*x*,则-2≤*t*≤-1.

所以*y*=*t*2-*t*+5,其图象的对称轴为直线*t*=,所以当*t*=-2时,*y*max=10;

当*t*=-1时,*y*min=.

反思感悟　求复合函数的最值

(1)首先恰当地把复合函数分解为两个或多个基本函数.

(2)然后按照“由内到外”的原则,利用函数的性质求最值.

跟踪训练2　(1)函数*y*=的值域为　　　　.

答案　(0,2]

解析　∵1-*x*2≤1,

∴≤21=2,

∴0<*y*≤2,故*y*=的值域为(0,2].

(2)函数*f*(*x*)=log3(*x*2+2*x*+4)的最小值为　　　　.

答案　1

解析　令*u*=*x*2+2*x*+4,

则*u*=(*x*+1)2+3≥3,

所以log3(*x*2+2*x*+4)≥log33=1,

即函数*f*(*x*)=log3(*x*2+2*x*+4)的最小值为1.

三、判断复合函数的奇偶性

例3　(1)判断函数*f*(*x*)=log*a*(*x*+)(*a*>0且*a*≠1)的奇偶性,并说明理由.

解　函数*f*(*x*)=log*a*(*x*+)为奇函数,理由如下:

由题意得,*x*+>0恒成立,故*f*(*x*)的定义域为R,关于原点对称,

*f*(-*x*)+*f*(*x*)

=log*a*(-*x*+)+log*a*(*x*+)

=log*a*(*x*2+1-*x*2)=log*a*1=0,

即*f*(-*x*)=-*f*(*x*),故*f*(*x*)是奇函数.

(2)若函数*f*(*x*)=2*x*+为偶函数,则*a*=　　　　.

答案　1

解析　函数的定义域为**R**,关于原点对称.任取*x*∈**R**,*f*(-*x*)=2-*x*+=+*a*·2*x*.因为*f*(*x*)是偶函数,所以*f*(*x*)=*f*(-*x*),则有*a*=1.

反思感悟　本题考查函数奇偶性的应用,以及不等式恒成立问题,将恒成立问题转化为最值问题是关键,另外要注意对数的真数部分也要恒大于零.

跟踪训练3　(1)若*a*>0且*a*≠1,则函数*f*(*x*)=+是(　　)

A.奇函数

B.偶函数

C.不是奇函数也不是偶函数

D.奇偶性与*a*的具体取值有关

答案　B

解析　函数*f*(*x*)的定义域为{*x*|*x*≠0},*f*(-*x*)=-=-=-=+=*f*(*x*),故函数*f*(*x*)为偶函数.

(2)已知函数*f*(*x*)=ln 是奇函数,则*k*的值为　　　　.

答案　1

解析　因为函数*f*(*x*)=ln 是奇函数,

所以*f*(*x*)+*f*(-*x*)=ln +ln

=ln =ln =0,

所以=1,即*k*2*x*2-1=*x*2-1,

即(*k*2-1)*x*2=0,

所以*k*2=1,解得*k*=±1.

当*k*=-1时,=-1,不符合题意,

当*k*=1时,*f*(*x*)=ln ,

定义域为(-∞,-1)∪(1,+∞),关于原点对称,*f*(*x*)为奇函数,故*k*的值为1.

D:\杂\word图标\word图标\课堂小结通.tif

1.知识清单:

(1)指数、对数型函数的单调性.

(2)指数、对数型函数的值域和最值问题.

(3)指数、对数型函数的奇偶性.

2.方法归纳:换元法.

3.常见误区:求对数型函数的单调性易忽视定义域.



1.函数*y*=的增区间为(　　)

A.(-∞,+∞) B.(0,+∞)

C.(1,+∞) D.(0,1)

答案　A

解析　函数*y*=的定义域为**R**.

设*u*=1-*x*,则*y*=.

∵*u*=1-*x*为减函数,

*y*=在(-∞,+∞)上单调递减,

∴*y*=在(-∞,+∞)上单调递增.

则*y*=的增区间为(-∞,+∞).

2.(多选)已知函数*f*(*x*)=ln *x*+ln(2-*x*),则(　　)

A.*f*(*x*)在(0,1)上单调递增

B.*f*(*x*)在(0,1)上单调递减

C.*f*(*x*)的图象关于直线*x*=1对称

D.*f*(*x*)的图象关于点(1,0)对称

答案　AC

解析　由题意知,*f*(*x*)的定义域为(0,2),

*f*(*x*)=ln *x*+ln(2-*x*)=ln(-*x*2+2*x*),

令*μ*=-*x*2+2*x*,*x*∈(0,2),

则*μ*的增区间为(0,1),

*μ*的减区间为(1,2),

又*y*=ln *μ*是增函数,

∴*f*(*x*)的增区间为(0,1),减区间为(1,2),

∴A正确,B错误;

∵函数*f*(*x*)=ln *x*+ln(2-*x*),

∴*f*(2-*x*)=ln(2-*x*)+ln *x*,

即*f*(*x*)=*f*(2-*x*),

即*f*(*x*)的图象关于直线*x*=1对称.

∴C正确,D错误.

3.函数*y*=的值域是　　　　.

答案

解析　令*t*=

=,

则0≤*t*≤,

所以*y*=∈,

即函数*y*=的值域是.

4.函数*f*(*x*)=log2·log2(1≤*x*≤4)的值域为　　　　.

答案

解析　∵*f*(*x*)=log2·log2

=(log2*x*-2)·(log2*x*-1)

=-,

又∵1≤*x*≤4,

∴0≤log2*x*≤2,

∴当log2*x*=,

即*x*==2时,*f*(*x*)取最小值-;

当log2*x*=0,即*x*=1时,*f*(*x*)取得最大值为2,

∴函数*f*(*x*)的值域是.

## 课时对点练　[分值:100分]

单选题每小题5分,共35分;多选题每小题6分,共18分



1.函数*f*(*x*)=的增区间为(　　)

A.(-∞,2) B.(1,2)

C.(2,3) D.(2,+∞)

答案　B

解析　由题意知*f*(*x*)的定义域为[1,3],

令*g*(*x*)=,

因为*f*(*x*)=2*g*(*x*)在定义域上为增函数,

所以只需求*g*(*x*)=的增区间即可,

令*h*(*x*)=-*x*2+4*x*-3,

由二次函数单调性及二次根式有意义的条件可知*g*(*x*)的增区间为[1,2],

即*f*(*x*)=的增区间为[1,2],也可写作(1,2).

2.若函数*f*(*x*)=3(2*a*-1)*x*+3是减函数,则实数*a*的取值范围为(　　)

A. B.

C.∪(1,+∞) D.

答案　B

解析　令*u*=(2*a*-1)*x*+3,由于函数*f*(*x*)=3(2*a*-1)*x*+3是减函数,函数*y*=3*u*是增函数,则函数*u*=(2*a*-1)*x*+3为减函数,所以2*a*-1<0,解得*a*<.

3.函数*f*(*x*)=-+1在[-1,2]上的最小值是(　　)

A.1 B.

C. D.3

答案　C

解析　由题意,得函数*f*(*x*)=-+1=-+1,

设*t*=,因为*x*∈[-1,2],

所以*t*=∈,

则函数*y*=*t*2-*t*+1=+,

当*t*=时,*y*min=.

4.对于函数*f*(*x*)=,下列描述正确的选项是(　　)

A.是减函数且值域为(-1,1)

B.是增函数且值域为(-1,1)

C.是减函数且值域为(-∞,1)

D.是增函数且值域为(-∞,1)

答案　B

解析　函数*f*(*x*)==1-,

因为函数*y*=3*x*>0且是增函数,

所以*y*=是减函数,

所以*f*(*x*)为增函数,

又3*x*∈(0,+∞),

所以3*x*+1∈(1,+∞),∈(0,2),所以*f*(*x*)=1-∈(-1,1),即*f*(*x*)的值域为(-1,1).

5.(多选)如果函数*f*(*x*)=log*a*|*x*-1|在(0,1)上单调递减,那么(　　)

A.*f*(*x*)在(1,+∞)上单调递增且无最大值

B.*f*(*x*)在(1,+∞)上单调递减且无最小值

C.*f*(*x*)在定义域内是偶函数

D.*f*(*x*)的图象关于直线*x*=1对称

答案　AD

解析　由|*x*-1|>0得,

函数*y*=log*a*|*x*-1|的定义域为{*x*|*x*≠1}.

设*g*(*x*)=|*x*-1|=

则*g*(*x*)在(-∞,1)上单调递减,在(1,+∞)上单调递增,且*g*(*x*)的图象关于直线*x*=1对称,

所以*f*(*x*)的图象关于直线*x*=1对称,D正确;

因为*f*(*x*)=log*a*|*x*-1|在(0,1)上单调递减,

所以*a*>1,

所以*f*(*x*)=log*a*|*x*-1|在(1,+∞)上单调递增且无最大值,A正确,B错误;

又*f*(-*x*)=log*a*|-*x*-1|=log*a*|*x*+1|≠*f*(*x*),

所以C错误.

6.(多选)高斯是德国著名的数学家,近代数学奠基者之一,享有“数学王子”的称号,他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家,用其名字命名的“高斯函数”为:设*x*∈**R**,用[*x*]表示不超过*x*的最大整数,则*y*=[*x*]称为高斯函数,例如:[-3.5]=-4,[2.1]=2.已知函数*f*(*x*)=-,则关于函数*g*(*x*)=[*f*(*x*)]的叙述中正确的是(　　)

A.*g*(*x*)是偶函数

B.*f*(*x*)是奇函数

C.*f*(*x*)是增函数

D.*g*(*x*)的值域是{-1,0,1}

答案　BC

解析　∵*g*(1)=[*f*(1)]==0,

*g*(-1)=[*f*(-1)]==-1,

∴*g*(-1)≠*g*(1),则*g*(*x*)不是偶函数,

故A错误;

∵*f*(*x*)=-的定义域为**R**,

*f*(-*x*)+*f*(*x*)=+-1=+-1=-1=0,

∴*f*(*x*)为奇函数,故B正确;

∵*f*(*x*)=-=-=-,

又*y*=2*x*是增函数,

∴*f*(*x*)=-是增函数,

故C正确;

∵2*x*>0,∴1+2*x*>1,

则0<<1,

可得-<-<.

即-<*f*(*x*)<,

∴*g*(*x*)的值域是{-1,0},故D错误.

7.(5分)函数*f*(*x*)=在区间(1,+∞)上单调递减,则实数*a*的取值范围是　　　　　.

答案　(-∞,0]

解析　函数*f*(*x*)=由*y*=2*t*和*t*(*x*)=*ax*2-2*x*-1复合而成,

由于*y*=2*t*单调递增,函数*f*(*x*)=在区间(1,+∞)上单调递减,

所以*t*(*x*)=*ax*2-2*x*-1在区间(1,+∞)上单调递减.

当*a*>0时,不符合题意;

当*a*=0时,*t*(*x*)=-2*x*-1单调递减,满足题意;

当*a*<0时,*t*(*x*)=*ax*2-2*x*-1的图象开口向下,对称轴为直线*x*=,

故需要满足≤1,即*a*<0满足题意,

综上,实数*a*的取值范围为(-∞,0].

8.(5分)设函数*f*(*x*)=-,若*f*(2*m*-1)+*f*(*m*-2)<0,则实数*m*的取值范围是　　　　.

答案　(1,+∞)

解析　∵函数的定义域为**R**,

*f*(-*x*)=-=-=-=-+=-*f*(*x*),

∴*f*(*x*)为奇函数,又*f*(*x*)为减函数,

由*f*(2*m*-1)+*f*(*m*-2)<0,

得*f*(2*m*-1)<-*f*(*m*-2)=*f*(2-*m*),

∴2*m*-1>2-*m*,解得*m*>1.

9.(10分)已知函数*f*(*x*)=(*a*>0,*a*≠1)是定义在**R**上的奇函数.

(1)求*a*的值;(4分)

(2)求函数*f*(*x*)的值域.(6分)

解　(1)∵*f*(*x*)是**R**上的奇函数,

∴*f*(0)=0,

解得*a*=2,经检验*a*=2符合题意.

(2)由(1)知,*f*(*x*)===1-是增函数,

∵2*x*+1>1,

∴0<<2,

∴-2<-<0,

∴-1<1-<1,

∴函数*f*(*x*)的值域为(-1,1).

10.(10分)已知函数*f*(*x*)=log2.

(1)判断函数*f*(*x*)的奇偶性;(3分)

(2)讨论*f*(*x*)的单调性;(3分)

(3)解不等式*f*(2*x*)>*f*(1-*x*).(4分)

解　(1)由>0得-1<*x*<1,所以函数*f*(*x*)的定义域为(-1,1),关于原点对称,

又因为*f*(-*x*)=log2=log2

=-log2=-*f*(*x*),

故函数*f*(*x*)为奇函数.

(2)设任意*x*1,*x*2∈(-1,1),*x*1<*x*2,

则1-*x*2>0,1+*x*1>0,

*f*(*x*1)-*f*(*x*2)=log2-log2

=log2,

又(1+*x*1)(1-*x*2)-(1-*x*1)(1+*x*2)=2(*x*1-*x*2)<0,(1+*x*1)(1-*x*2)>0,

则0<(1+*x*1)(1-*x*2)<(1-*x*1)(1+*x*2),

则0<<1,

即log2<0,

即*f*(*x*1)<*f*(*x*2),故*f*(*x*)在(-1,1)上单调递增.

(3)由(2)知,函数*f*(*x*)在(-1,1)上单调递增,

所以由*f*(2*x*)>*f*(1-*x*),可得

解得<*x*<,

所以不等式的解集为.



11.已知函数*f*(*x*)=ln(e+*x*)-ln(e-*x*),则*f*(*x*)是(　　)

A.奇函数,且在(0,e)上单调递增

B.奇函数,且在(0,e)上单调递减

C.偶函数,且在(0,e)上单调递增

D.偶函数,且在(0,e)上单调递减

答案　A

解析　若函数*f*(*x*)=ln(e+*x*)-ln(e-*x*)有意义,则解得-e<*x*<e,

即函数*f*(*x*)的定义域为(-e,e),关于原点对称,

因为*f*(-*x*)=ln(e-*x*)-ln(e+*x*)=-[ln(e+*x*)-ln(e-*x*)]=-*f*(*x*),所以函数*f*(*x*)是奇函数,

函数*f*(*x*)=ln(e+*x*)-ln(e-*x*)=ln

=ln,

因为函数*u*=-1+在(0,e)上单调递增,函数*y*=ln *u*在定义域上单调递增,

所以函数*f*(*x*)在(0,e)上单调递增.

12.函数*f*(*x*)=(log2*x*)2-log2*x*3+4,*x*∈(1,4]的值域为(　　)

A.[2,4) B.

C. D.

答案　C

解析　令*t*=log2*x*,

则*t*∈(0,2],

∴原函数化为*y*=*t*2-3*t*+4,*t*∈(0,2],

其对称轴方程为*t*=,∴当*t*=时,

*y*min=-3×+4=;

当*t*=0时,*y*max=4,但取不到.

∴*f*(*x*)的值域为.

13.已知偶函数*f*(*x*)在区间[0,+∞)上单调递增,则满足*f*(log2*x*)>*f*(2)的*x*的取值范围是(　　)

A.(-4,4)

B.∪(4,+∞)

C.

D.∪(4,+∞)

答案　B

解析　由于函数*y*=*f*(*x*)是偶函数,

由*f*(log2*x*)>*f*(2),得*f*(|log2*x*|)>*f*(2),

又∵函数*y*=*f*(*x*)在区间[0,+∞)上单调递增,

∴|log2*x*|>2,

即log2*x*<-2或log2*x*>2,

解得0<*x*<或*x*>4.

因此,所求*x*的取值范围是∪(4,+∞).

14.(5分)函数*f*(*x*)=log2(-*x*2+*ax*+2)在(1,2)上单调递减,则实数*a*的取值范围是　　　　　　.

答案　[1,2]

解析　令*t*=-*x*2+*ax*+2,而*y*=log2*t*为增函数,

所以*f*(*x*)=log2(-*x*2+*ax*+2)在(1,2)上单调递减等价于*t*=-*x*2+*ax*+2在(1,2)上单调递减,且*t*=-*x*2+*ax*+2>0恒成立,

即解得1≤*a*≤2.



15.(多选)已知函数*f*(*x*)=ln|1+*x*|-ln|1-*x*|,则下列有关该函数叙述正确的有(　　)

A.*f*(*x*)是偶函数

B.*f*(*x*)是奇函数

C.*f*(*x*)在(-1,1)上单调递增

D.*f*(*x*)在(-∞,-1)和(1,+∞)上单调递减

答案　BCD

解析　函数*f*(*x*)=ln|1+*x*|-ln|1-*x*|,由解得*x*≠±1,

因此*f*(*x*)的定义域为(-∞,-1)∪(-1,1)∪(1,+∞),关于原点对称,

则*f*(-*x*)=ln|1-*x*|-ln|1+*x*|=-*f*(*x*),

所以函数*f*(*x*)是奇函数,不是偶函数,A错误,B正确;

函数*f*(*x*)=ln=ln,

当-1<*x*<1时,*f*(*x*)=ln,函数*y*=-1在(-1,1)上单调递增,

于是*f*(*x*)在(-1,1)上单调递增,C正确;

当*x*<-1或*x*>1时,*f*(*x*)=ln,函数*y*=1+在(-∞,-1)和(1,+∞)上单调递减,于是*f*(*x*)在(-∞,-1)和(1,+∞)上单调递减,D正确.

16.(12分)已知函数*f*(*x*)=ln(*ax*2+2*x*+1).

(1)若*f*(*x*)的定义域为**R**,求实数*a*的取值范围;(6分)

(2)若*f*(*x*)的值域为**R**,求实数*a*的取值范围.(6分)

解　(1)由*f*(*x*)的定义域为**R**,

得*ax*2+2*x*+1>0恒成立,

当*a*=0时,由2*x*+1>0,

解得*x*>-,不符合题意;

当*a*≠0时,

由得*a*>1.

即实数*a*的取值范围为(1,+∞).

(2)因为*f*(*x*)的值域为**R**,

所以{*y*|*y*=*ax*2+2*x*+1}⊇(0,+∞),

(也可以说*y*=*ax*2+2*x*+1取遍一切正数)

①当*a*=0时,*y*=2*x*+1可以取遍一切正数,符合题意;

②当*a*≠0时,需

即0<*a*≤1.

综上,实数*a*的取值范围为[0,1].