

数学史融入高中数学单元教学的实践

吴湘芸 江苏省宜兴市丁蜀高级中学 214221

[摘要] 数学史是数学与历史的结合. 高中日常教学应根据教学内容, 整体规划设计, 选择与当前单元内容相关的数学史知识, 将数学史融入高中数学单元课, 由课内延伸到课外, 从零散走向整合, 学知识育素养, 帮助学生更好地理解数学的发展历程和应用背景, 培养学生的数学学习兴趣, 调动学生学习积极性, 发掘数学史对数学学科的教育价值.

[关键词] 数学史; 高中数学; 单元教学; 课堂实践

引言

某位哲学家曾言: 因为历史上人类知识和个体知识发生统一, 所以教育不得偏离历史. 数学史主要研究数学规律和科学发展, 要求学生探索数学历史, 理解知识形成过程, 感受数学内容和方法的演变, 认识到数学家的贡献, 体会研究的价值, 并学习创新精神. 在历史长河中, 人类始终坚持探索数学认知规律. 学生在单元知识的学习过程中发现、推理、认识、理解、探究、应用、反思, 可在前人的引导下继续研究、体会收获. 承古强今, 向新而行. 高中数学课堂实践中, 要以学生为主体, 实施主动建构. 将数学史融入单元课堂, 有助于构建结构化的教学内容, 实现知识点的纵横联系. 通过深入研究数学史中的逻辑, 科学地探索单元教学的实践方法, 从而促进对数学更深层次的理解和领悟.

数学史融入高中数学课堂的意义

1. 体现知识和谐

数学知识螺旋上升而又不断发展, 借鉴历史上的数学教学, 帮助学生理解知识, 建立知识间的整体联系, 搭建知识网络框图.

2. 获取探究乐趣

设计与数学史相关的实验或探究活动, 交流困惑之

处, 改善对数学学习的焦虑. 研究新问题, 深入理解数学原理, 积累活动经验, 获得成功体验.

3. 感受方法精妙

通过学习接触应用相关科学研究方法, 体会数学思想, 比较古今方法之异同, 重组整合, 提升经验, 拓宽认知, 促进思维再生成.

4. 体验能力晋升

培养学生数学学科核心素养, 提高理解、合作、创新、表达和思维能力, 培育远见卓识.

5. 展示文化融合

数学与多个学科领域交叉, 与现实生活紧密相关. 在教学过程中注入数学活动的文化含义, 拓宽学生的视野, 为学生跨学科学习提供资源与机遇.

6. 彰显德育效应

从数学史的相关材料中学习榜样的力量, 思考数学研究中的道德责任和科学精神, 拥有积极进取、探索真知的勇气和毅力, 拥有良好的操守和品行, 形成正确的三观和价值取向, 展现更高远的目标.

数学史融入高中数学课堂的方法

在高中数学课堂中, 有多种将数学史穿插到数学教学活动的方法, 如: 选用数学史作为背景引入新概念; 介绍数

基金项目: 无锡市教育科学“十四五”规划课题“核心素养导向的高中数学大单元教学设计研究”(B/C-b/2021/01).

作者简介: 吴湘芸(1981—), 本科学历, 中学一级教师, 从事高中数学教学工作, 无锡市学科带头人.

学家的历史故事;对历史古迹进行探访;介绍历史上的数学悖论;探索数学家的生平 and 贡献;基于历史设计教学大纲;重构历史创设情境;分析历史上的数学问题和解决方法;介绍历史上的数学实验;利用数学史设计课堂例题与习题;利用数学史建构知识体系;介绍史料中的数学思想方法;设计与数学史相关的小组活动;研究与数学史相关的项目;学习研究数学文献……选择这些方法,将数学与历史结合起来,激发思想共鸣,促进数学活动的深入发展,使数学课堂不仅传授知识,还能培养素养,启迪智慧,润泽心灵。

数学史融入高中数学单元教学的实践案例

1. 引入数学家的背景和故事

案例1 人教A版(2019)普通高中数学教科书必修第二册第七章“复数”的教学。

单元起始课是单元教学的开端,它概括了整个单元的核心思想,明确了知识结构、逻辑关系和学习路径,对单元教学的实施至关重要。在单元起始课中介绍数学家的历史故事,可促进数学概念的引入。“7.1.1 数系的扩充与复数的概念”是本章第一节课。

在课堂引入环节,设置情境如下:

情境1 数学家卡丹在其著作《重要的艺术》中发问:把10分成两部分,使其相乘等于40.这需要解方程 $x(10-x)=40$. 他求得的根是 $5+\sqrt{15}i$ 和 $5-\sqrt{15}i$,然后说“不管会受到多大的良心责备,仍然会把 $5+\sqrt{15}i$ 和 $5-\sqrt{15}i$ 相乘得到 $25-(-15)=40$ ”。

情境2 卡丹发表三次方程 $x^3+px+q=0$ 的一个根的表达式为 $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. 求方程 $x^3=15x+4$ 的根,用一元三次方程的求根公式可得 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$;用因式分解法可得 $x=4$ 或 $x=-2\pm\sqrt{3}$. 思考结果为何不同. 用GeoGebra软件画出函数 $y=x^3-15x-4$ 的图象,发现其与 x 轴有三个交点,从而确定根的个数。

设计说明 课堂开始时,通过讲述数学家的故事来激发学生的兴趣,帮助他们迅速融入课堂氛围,并通过古今对比,体验数学家的思维历程。

在辨析、理解、深化概念的环节中,介绍复数的发展史:

古希腊数学家丢番图求解一元二次方程;

628年左右,印度数学家婆罗摩笈多指出负数没有平方根;

1545年,意大利数学家卡丹求解一元三次方程;

1637年,法国数学家笛卡尔在《几何学》中把负数的平方根称作虚数;

1777年,欧拉在《微分公式》一文中第一次用 i 来表示 -1 的平方根,首创用符号 i 作为虚数的单位。

1797年,韦塞尔提出复数的几何表示;

1831年,高斯对复数的几何意义进行描述,将复数解释为复平面上的一个点,并提及复数的几何加法与乘法法则。

1837年,哈密顿定义复数的四则运算。

设计说明 讲解复数的历史,使学生体会数学家的探索精神,激发学生的学习热情,提高教学效果。

在作业布置、分层巩固环节,设置阅读作业如下:

阅读书籍《虚数的故事》;

回顾卡丹求解一元三次方程的历史,体验复数领域内一元三次方程根的对称美;

查阅网站获取复数资料,寻找复数应用信息(选做)。

设计说明 复数作为数学工具广泛应用于多个领域,帮助学生理解数学与日常生活的联系,强调数学知识的价值,并激发学习兴趣。

2. 介绍历史上的数学悖论

案例2 人教A版(2019)普通高中数学教科书必修第一册“4.5 函数的应用”的教学。

介绍函数的零点,以及二分法:对于在区间 $[a,b]$ 上图象连续不断且 $f(a)f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$,通过不断地把它的零点所在区间一分为二,使所得区间的两个端点逐步逼近零点,进而得到零点近似值的方法叫做二分法。接下来应用函数性质研究方程的解,也为后续学习导数隐零点问题提供依据。

阅读与思考: 中外历史上的方程求解。二分法是一种常见的利用计算技术的数值解法。二分法悖论是古希腊哲学家芝诺于公元前5世纪中叶去雅典的一次访问中提出的四个著名悖论之一:以 A 点为起点出发前往 B 点,先走完总路程的二分之一,接着走完总路程的四分之一、八分之一、十六分之一……以至无穷划分下去,无法抵达 B 点。《庄子·天下篇》中写道:一尺之锤,日取其半,万世不竭。

设计说明 数学历史名题具有重要的研究价值和丰富的内涵。通过阅读了解古今中外各式各样方程的解法,探寻二分法的由来,感受二分法蕴含的取中思想、逼近思想、算法思想、极限思想,感知近似和精确的统一,并从不同角度理解问题,领悟真理的形态不唯一。

3. 借鉴数学史设计例题与习题

在高三数学一轮单元复习课中,以历史问题为基础,变换提问方式,引导学生深入思考,从而巩固和深化知识应用。

案例3 人教A版(2019)普通高中数学教科书必修第二册“8.6 空间直线、平面的垂直”的教学.

《九章算术·商功》中记载:斜解立方,得两堑堵.斜解堑堵,其一为阳马,一为鳖臑.阳马居二,鳖臑居一,不易之率也.合两鳖臑三而一,验之以基,其形露矣.刘徽注:此术臑者,背节也,或曰半阳马,其形有似鳖肘,故以名云.中破阳马,得两鳖臑,鳖臑之起数,数同而实据半,故云六而一即得.

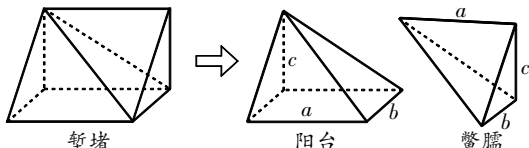


图1

例:《九章算术》中,将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为阳马,将四个面均为直角三角形的四面体称为鳖臑.如图2所示,在阳马 $P-ABCD$ 中,侧棱 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD=DC=1$, $BC=\sqrt{2}$, E 为棱 PC 的中点,过 E 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于 F ,连接 DE, DF, BD, BE .

- (1)证明: $PB \perp$ 平面 DEF ;
- (2)若平面 $PAD \cap$ 平面 $PBC=l$,证明: $AD \parallel l$;
- (3)判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑;
- (4)求直线 DF 与直线 BC 所成角的余弦值;
- (5)求直线 DF 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值;
- (6)求平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的大小;
- (7)求阳马 $P-ABCD$ 的外接球的体积;
- (8)求阳马 $P-ABCD$ 的内切球的半径.

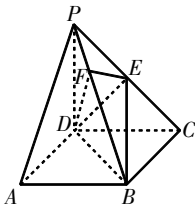


图2

思考:请以小组为单位,自主编题并解答.

设计说明 从历史原题中提取模型,为单元复习提供问题背景,设计、解决、衍生、改进问题,复习大单元专题系列知识点,整合知识,应用方法.

案例4 人教A版(2019)普通高中数学教科书必修第二册“6.4.3 余弦定理、正弦定理”的教学.

例:我国南宋时期数学家秦九韶发现了求三角形面积的“三斜求积”公式 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[c^2 a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}$,其中 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边.该公式和古希腊数学家海伦所列的三角形面积公式颇为统一: $S_{\triangle ABC} =$

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(p = \frac{1}{2}(a+b+c) \right).$$

(1)已知 $b=2$, $\tan A = \frac{\sin B}{\sqrt{3} - \cos B}$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值;

(2)用正弦定理和余弦定理证明“三斜求积”公式或海伦公式.

设计说明 对于第(1)问,先把 $\tan A = \frac{\sin B}{\sqrt{3} - \cos B}$ 转化为

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\sqrt{3} - \cos B}, \text{再转化为 } \sqrt{3} \sin A - \sin A \cos B = \cos A \sin B,$$

变形为 $\sqrt{3} \sin A = \sin(A+B) = \sin C$,得 $c = \sqrt{3}a$.考查两角和

的正弦公式和正弦定理.又 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[c^2 a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]} =$

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left[3a^4 - \left(\frac{4a^2 - 4}{2} \right)^2 \right]} = \sqrt{-\frac{1}{4}(a^2 - 4)^2 + 3} \quad (\text{可从二次函数的}$$

角度求出其最值),得到:当 $a=2$ 时, $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.这是用“三斜求积”公式求解的代数解法.也可以通过数形结合,利用边 b 为定值的特殊性,构建平面直角坐标系,设 B 为动点,尝试求它的轨迹方程,三角形的最值即为高的最值,此为几何解法.

对于第(2)问,可巧借余弦定理和正弦定理验证“三斜求积”公式.

$$\text{“三斜求积”公式: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ac \cdot \sqrt{1 - \cos^2 B} =$$

$$\frac{1}{2}ac \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[c^2 a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}.$$

$$\text{海伦公式: } S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(ca + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right) \left(ca - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{(a+c)^2 - b^2}{2} \right] \left[\frac{b^2 - (a-c)^2}{2} \right]} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{b+a-c}{2}} =$$

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

从三角形面积公式推导出“三斜求积”公式和海伦公式,体现不同形式的公式本质相同.

4. 进行数学史相关的研究项目

案例5 人教A版(2019)普通高中数学教科书必修第一册“5.4 三角函数的图象与性质”的教学.

任务1 文献阅读与数学写作.

我国唐代天文学家一行(683—727)是接触应用正切函数的第一人,《大衍历》便是出自他之手,在“步晷漏表”中制作了一个太阳天顶距和 $0^\circ \sim 80^\circ$ 每度影长的对应数表.

将数学史融入数学教学,查找相关资料,认真分析素材,谈一谈自己的看法与体会,形成读书报告.

作业成果:随笔.

成果评价:根据现有任务要素,确定评价指标,为学生研究提供理论支持.

设计意图 将数学文化融入高中数学教学,以核心概念为指导,培养学生数学素养,关注数学概念的历史发展,理解数学知识的形成过程,拓宽学生的视野,引导他们运用数学语言解释世界.

任务2 实际应用.

数学家傅立叶曾说过,正弦函数的和,能够以周期函数的方式体现.请同学们欣赏一首钢琴曲,感受音色可以表示成简单的正弦函数之和.正弦函数与余弦函数的叠加,可解释声波的共振现象.

自从降生到这个世界,个体的情绪、体力和智力便开始进入发展状态,且呈现出周期趋势.心理学家研究发现,人的生物节律由情绪节律、体力节律和智力节律组成.同时,对应相应的节律周期.不仅如此,不管哪个节律周期,又细分为三个阶段,分别是临界日、高潮期和低潮期.其中,临界日即三个节律周期的半数.情绪节律的临界日是14天,体力节律的临界日是11.5天,智力节律的临界日

是16.5天.以临界日为界,高潮期为前半期,低潮期为后半期.以生日前一天为起点,按照实际的出生日期,尝试把情绪、体力和智力曲线分别绘制出来.同时,确认哪一节点应控制情绪,哪一节点应加强锻炼.

以“生活中的三角函数”为课题,形成学习小组,分工合作,查找资料,制作PPT或视频,准备交流发言.

设计意图 三角函数实际应用十分广泛,不仅源于并服务于实际生活,更存在于人的生理和心理领域.人生境遇各有不同,有波峰有波谷,让学生感悟到学习要劳逸结合,不以物喜,不以己悲,要以良好的心态面对生活与学习,改进行为习惯、生活能力,提升意志品质、思想品质.

结语

高中数学教学应注重教材的整体性,采用单元教学法,培养结构化思维.同时,教师应利用数学史中的丰富内容,包括理论、逻辑、规律、方法和智慧,激发学生的自主学习兴趣,促进知识的深入理解和能力的提升.在历史和数学的发展中,回顾过去,审视现在,展望未来.

(上接第22页)

自主证明.这里主要是呈现余弦定理和正弦定理的整体式设计结构,体现两个定理的内容和证明方法,以及教学的内在结构性,构建自然的生长机理.

1. 深析知识关联,概念自然生长

数学概念间的关系密切,但教材中的数学概念大多是碎片化的.因此,教师在设计课堂活动时要深入分析知识间的关系,从整体上把握知识脉络,实行单元整体教学活动.本教学设计借助概念生长逻辑构建单元知识框架,从特殊到一般,引导学生自主构建新旧概念的关系,激发学生的探索欲,在整体把握知识结构的同时体会到学习余弦定理和正弦定理的必要性.

2. 践行生本课堂,新知自主探究

学生是课堂主体,教师要鼓励学

生在最近发展区内自主探索新知识.本教学设计课前回忆旧知,建立解直角三角形的知识框架;课上学生自主类比,构建解三角形的知识框架,确定探究目标,在教师的引导下自主探索证明方法,小组通过合作,得出余弦定理和正弦定理;课后让学生自主完善单元知识结构框架,并将思维延伸到下一课时的学习内容.整堂课的教学活动都是学生自由、主动的探索过程,有利于学生深度理解知识结构,把握知识本质.

3. 激发思维活力,素养自行发展

数学课堂需要给予学生思维展示的机会,也要促进学生思维能力的提升,从而落实核心素养.本教学设计的问题给学生提供了思考载体,能够激发学生的思维活力,学生经历概念生长的探索过程,从特殊到一般的

思维过程,以及从既定目标寻找方法解决问题的过程,有助于发展数学抽象、数学运算、直观想象和逻辑推理等核心素养.

参考文献:

- [1] 吕世虎,杨婷,吴振英.数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J].当代教育与文化,2016,8(4):41-46.
- [2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.
- [3] 陈算荣,王莹.数学教学“结构思想”的意蕴与内化[J].教学与管理,2023(22):37-40.
- [4] 薛红霞.转变数学知识观 做好单元教学设计[J].数学通报,2022,61(2):12-16.