

基于高阶思维的高中数学建模活动课教学设计研究 ——以“消费券”模型为例

李 烁¹, 夏宇晨¹, 戴阔斌¹, 熊建军²

(1.黄冈师范学院 数学与统计学院, 湖北 黄冈 438000; 2.湖北省鄂州高中, 湖北 鄂州 436099)

摘 要:数学建模活动是基于数学思维运用模型解决实际问题的一类综合实践活动,在数学建模活动课中要融入高阶思维的培养。本文通过“诱人”消费券数学模型为例,以高阶思维为主线,从问题提出、分析问题、修改模型、解决问题四个方向出发设计数学建模活动探究,引导学生用数学的思路解决现实中数学的问题,培养学生的高阶思维。

关键词:数学高阶思维;数学建模;高中数学

中图分类号:G633

文献标识码:A

文章编号:1673-9132(2024)07-0130-04

DOI:10.16657/j.cnki.issn1673-9132.2024.07.033

一、问题提出

新课改实施以来,学校的教育由关注学生知识的掌握转变为关注学生的能力发展。数学思维作为一种能力,教育的本质是培养思维,培养思维的最好场所是课堂。在课堂上落实数学思维的培养是当代教师应该思考的问题。普通高中数学课程标准(2017年版 2020 修订)(以下简称新课程标准)^[1]指出,通过高中课程学习,学生能在现实世界中发现问题和提出问题,学会使用数学模型解决实际问题,以落实核心素养的培养。为了发展学生数学学科核心素养,我们必须重视发展学生的数学思维素养,而培养学生的数学高阶思维能力则是此教学过程的最重要的部分。

随着新课程标准的提出,数学建模作为高中核心素养之一,更多的一线教师重视数学建模活动,将“建模思想”引入课堂,培养学生的建模思维,教师对数学建模的活动课设计尤其

重要。其次数学建模活动课相比其他课型,综合性更强,需要学生较高的思维能力。学生在数学问题的发现与解决过程中,都需要进行深度思考,实现低阶思维到高阶思维的跃迁,方可把握问题的本质,突破思维的障碍。高阶思维的培养体现了知识时代对人才素质提出的新要求,是适应新时代发展的关键能力,数学高阶思维的发生与核心素养发展可相互促进。在数学建模活动课中如何有效地培养学生数学高阶思维是当前亟须解决的问题。

二、数学高阶思维的内涵及培养

对于高阶思维的研究,国内最早研究的是钟志贤教授,钟教授指出高阶思维是发生在较高认知层次上的心智认知活动或认知能力^[2]。葛波结合核心素养的指向和内涵,认为数学高阶思维主要是学生在应对和解决教师提出的学习任务时,所表现出的策略思维、批判型思维、创新型思维^[3]。苏学峰认为,

作者简介:李烁(1999.3—),男,汉族,湖北黄梅人,研究方向:数学教育。

夏宇晨(1999.3—),男,汉族,湖北武汉人,研究方向:数学教育。

通信作者:戴阔斌(1974.5—),男,汉族,湖北黄梅人,副教授,研究方向:数学教育、密码学。

熊建军(1973.8—),男,汉族,湖北鄂州人,中学高级,研究方向:数学教育。

基金项目:本文系湖北省普通高校人文社会科学重点研究基地“鄂东教育与文化研究中心”资助项目“‘双减’目标下的作业设计与差异化教学研究”研究成果,课题编号:202238504。

数学高阶思维就是学生问题发现、问题思考、问题探究、问题推理、问题解决等能力^[4]。结合几位学者的研究,在数学高阶思维的概念界定上观点是比较一致的,因此数学高阶思维应是在解决问题中学生所产生的较高层次的思维活动。

对于数学高阶思维的培养,国内众多学者提出自己的研究观点。吴立宝从初中数学教学的角度出发,提出了基于问题链的初中数学课堂高阶思维培养路径,在数学教学中以问题为主线,以不同类型的问题链促进初中生思维的全面发展^[5]。李建华、胡军从复习课的视角提出四个教学环节,在复习巩固中用问题唤醒策略型思维;在探究活动中用变式撬动批判型思维;开放题中重构催生创新型思维;在课堂小结激活结构化思维,以复习课来培养数学的数学高阶思维^[6]。胡军、栗小妮、李建华提出,通过学生提问与教师提问的对比分析,在思维培养上学生提问明显优于教师提问,“学生提问”方式能促进高阶思维的养成,增强学生的意识^[7]。

不难发现,众多学者对于数学高阶思维的培养聚焦在“问题提出”或者其他课型中,对于数学建模活动课来促进高阶思维的培养的研究目前略显不足。李健、李海东从数学教科书的视角提出了,教材中的数学建模问题需要学生进行相关信息分析,通过思维的发散与聚合提出数学模型,最后在建立模型中发展学生的创新思维^[8]。殷艳指出,学生可以通过感受解决问题的过程、体验数学建模的过程、积极反思和处理非常规问题来促进数学高阶思维的发展^[9]。高中阶段数学建模教学的关键目标就是让学生掌握数学建模的过程,让学生用数学的眼光观察世界,用数学的思维思考世界,用数学知识去合理解决实际问题^[10]。这个过程中培养学生的高阶思维。依据国内相关学者研究,在培养高阶思维与数学建模相融合过程中,学生最先是发现问题,对问题分析,从而建立初步数学模型,对数学模型进行求解运算。这三个阶段规划为低阶数学思维,其对模型进行检验、修改数学模型,再次解决实际问题,这三个阶段学生思维能力处于较高水平,形成数学高阶思维。具体教学流程如图 1 所示。

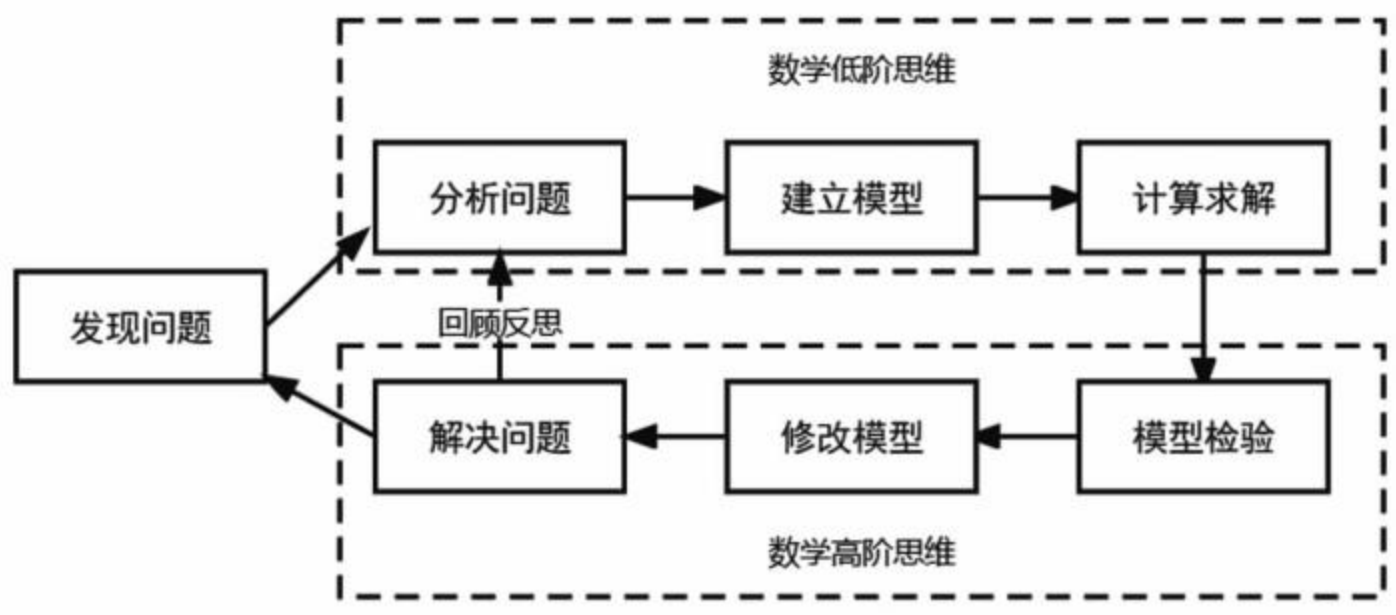


图 1 数学建模活动课高阶思维培养的流程

三、融入高阶思维的“消费券”数学建模活动课教学设计

对于教师而言,在数学建模活动课中融入高阶思维的培养,需要思考该如何去教、如何有效地设计。数学建模活动课重在过程,对没有接触过数学模型的学生而言,其思考方法、分析手段和探索过程需要引领才可较为迅速地掌握。因此,对数学建模的活动设计要符合学生的认知水平和实际情况。教师可基于网上购物消费券的情况,结合高一年级“分段函数”知识点,设计消费券的数学模型,让学生在数学建模活动课思维得到提升。具体教学设计流程如下。

(一)创设情境,提出问题

近年来,“双十一”购物狂欢节交易不断刷新纪录,“双十一”购物节的规则的复杂度不断增大,而面对商家复杂的优惠规则,消费者都尝试用足优惠。最近,某品牌商家推出三种优惠券,分别是满 150 减 10 元、满 200 减 40 元、满 300 减 50 元、满 400 减 120 元,这四种优惠券不可叠加,但是平台为了刺激消费者购买,增加满 300 减 50 元活动,可与任何店家叠加适用。

这些俗称为“满减”的优惠券容易让人产生购物的冲动。为了“凑单”,消费者可能会买些不需要的商品。这样的购物行为是否理性呢?商家使用了怎样的优惠策略?是否购买金额越大,享受的优惠也越大?

设计意图:以生活中常见的消费券模型引入,培养学生善于用数学的眼光观察世界。生活中所包含的数学问题更能吸引学生的注意力。其次抛出问题,对于眼花缭乱的优惠券,是否我们购买越多,优惠力度越大。怎样定义最大优惠?

思维层面:参与凑单活动是否理性消费等。创设相应的情境,有利于学生的思维生成,发现问题并思考,启发学生的思维发展,此阶段为学生低阶思维阶段。

(二)分析问题,建立模型

为了方便简单研究,我们假设,店铺优惠券每种券最多领 2 张。

预假设一,购买金额越大,优惠越大。设原始购买金额为 x ,优惠金额为 $f(x)$ 。

我们可以知道以下情况:

情况 1:当购买金额 $0 < x < 150$ 时,无法使用优惠券, $f(x) = 0$ 。

情况 2:当购买金额 $150 \leq x < 200$ 时,可以使用 10 元优惠券, $f(x) = 10$ 。

情况 3:当购买金额 $200 \leq x < 300$ 时,可以使用 40 元优惠券, $f(x) = 40$ 。

情况 4:当购买金额 $300 \leq x < 400$ 时,可以使用 50 元优惠券,还可以叠加使用平台 50 元优惠券, $f(x) = 100$ 。

情况 5:当购买金额 $x \geq 400$ 时,可以使用 120 元优惠券,还可以叠加使用平台 50 元优惠券, $f(x)=170$ 。

由 $f(x)$ 与 x 之间的关系得到如下关系:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0 < x < 150 \\ 10, & 150 \leq x < 200 \\ 40, & 200 \leq x < 300 \\ 100, & 300 \leq x < 400 \\ 170, & x \geq 400 \end{cases}$$

预假设二,考虑优惠率,设原始购买金额为 x ,原价与折扣之差占原价的百分比为 $f(x)$ 。

我们发现有以下情况:

情况 1:当 $0 < x < 150$ 时,无法使用优惠券, $f(x)=\frac{(x-x)}{x}=0$ 。

情况 2:当 $150 \leq x < 200$ 时,可以使用 10 元优惠券, $f(x)=\frac{10}{x}$ 。

情况 3:当 $200 \leq x < 300$ 时,可以使用 40 元优惠券, $f(x)=\frac{40}{x}$ 。

情况 4:当 $300 \leq x < 400$ 时,可以使用 50 元优惠券,还可以叠加使用平台 50 元优惠券, $f(x)=\frac{100}{x}$ 。

情况 5:当 $x \geq 400$ 时,可以使用 120 元优惠券,还可以叠加使用平台 50 元优惠券, $f(x)=\frac{170}{x}$ 。

由 $f(x)$ 与 x 之间的关系得到如下关系:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0 < x < 150 \\ \frac{10}{x}, & 150 \leq x < 200 \\ \frac{40}{x}, & 200 \leq x < 300 \\ \frac{100}{x}, & 300 \leq x < 400 \\ \frac{170}{x}, & x \geq 400 \end{cases}$$

设计意图:以小组为单位分别提出问题,教师应该引入课题,将问题留给学生,让学生学会提问,提出相关数学问题,在问题中思考,促进学生思维能力的发展。设计两个预假设,预假设一是抽象的分段函数,学生会直接以满减金额大小,得出购买越多,优惠越大的结论。预假设二是考虑优惠率的情况,涉及优惠率的问题,通过函数解析式要求学生动手画出函数图象。观察可知,该函数属于减函数,学生得到启示,恰好达到满减金额时候,优惠最大,得出购买越多,优惠越大相应结论。

思维层面:通过分类讨论,促进学生思维的拓展。分类讨论及分组情况,可以促进思考问题的深度与广度,学生的思维开始发展,用数学的思维思考问题。因初步建立数学模型,学生的思维能力还不够严谨,因此该阶段为学生低阶思维阶段。

(三)分析结果,检验模型

从函数结果来分析,假设某个顾客一次性购买金额为 1100 元,很显然按照上述两个模型一次性付款,优惠不是很大,均只优惠 170 元。因此应该组合使用优惠券,对模型进行修改。

顾客购买金额 1100 元时,可以考虑拆开付款,假设顾客分三次付款,最优组合就是 400 元、400 元、300 元,那么最大优惠就是 $170+170+100=440$ 元。根据学生提出的初步模型,都无法解释最优优惠情况。那么按照组合券使用规则,顾客应该多次付款。

设计意图:在检验模型中,通过具体金额,让学生发现初步模型难以解释,让学生自主分析不足,修改模型,在检验模型、分析问题的过程中,学生从初步转向高阶思维。有较高的认知活动,纠正模型的修订。

思维层面:在结果分析中,学生已有批判性思维的生成,经过数学模型的结果检验,学生批判性思维能力逐渐增强,提出质疑,修改对应数学模型。学生的思维能力由低阶转向高阶阶段。

(四)修改模型,预设结果

预假设三,从优惠率考虑,设原始购买金额为 x ,原价与折扣之差占原价的百分比为 $f(x)$,根据购买金额,组合多次付款。

当 $x \leq 400$ 时候此时函数解析式如同假设情况 2,当 $400 \leq x < 550$ 时, $f(x)=\frac{170}{x}$;当 $550 \leq x < 600$ 时, $f(x)=\frac{180}{x}$;当 $600 \leq x < 700$ 时, $f(x)=\frac{210}{x}$;当 $700 \leq x < 800$ 时, $f(x)=\frac{270}{x}$;当 $800 \leq x < 950$ 时, $f(x)=\frac{340}{x}$;当 $950 \leq x < 1000$ 时, $f(x)=\frac{350}{x}$;当 $1000 \leq x < 1100$ 时, $f(x)=\frac{380}{x}$;当 $x \geq 1100$ 时, $f(x)=\frac{440}{x}$ 。

函数图象如图 2 所示:

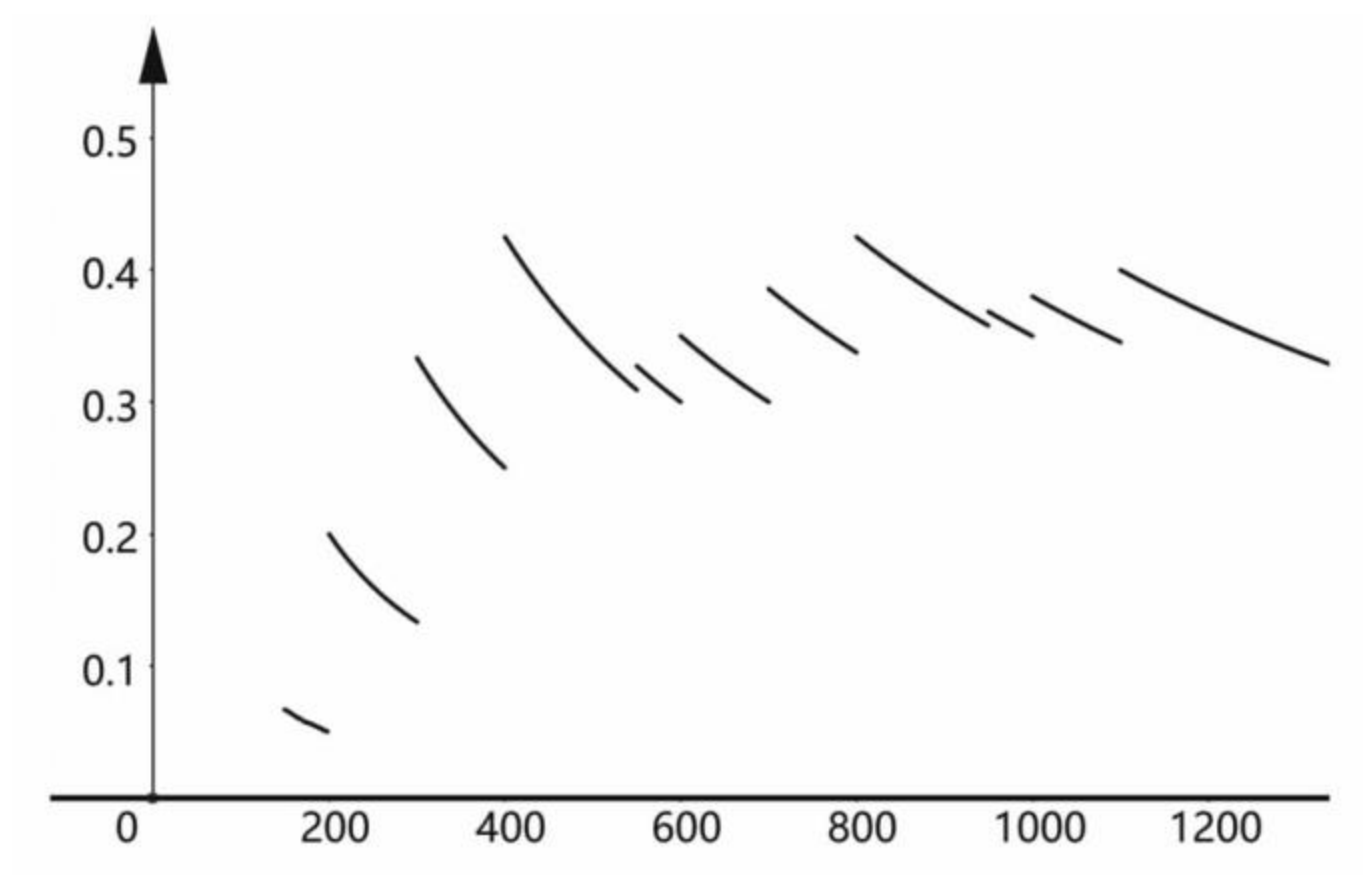


图 2 改进后优惠率分段函数图象

设计意图:通过修改后的模型,否定原始假设。深层次研

究原始购买金额与优惠率之间的关系,建立分段函数偶性,给出的购买策略包含“分单”“凑单”“减单”,让学生思维提升,其次通过消费券模型让学生领悟正确的消费观念,对于商家给出的消费券,并不是一味地购买就优惠越大,当达到最优优惠时,函数模型为减函数,反而优惠不是最优组合。

思维层面:在数学建模优化过程中,学生会发现模型的难度逐渐增大,但也逐渐接近现实问题的解决,学生的思维能力处于较高水平,对现实的数学问题提出相应的解决方案。此过程也是学生高阶思维生成的阶段,学生学习的知识由易到难,学生的思维由低到高。

四、结论与建议

(一)结论

消费券的数学模型只是数学建模活动的一个案例,在消费券问题的数学建模活动课中,学生善于发现现实中的数学问题,不仅提出相应的数学模型解决实际问题,还能发现在商家“消费券”等数学问题中,当购买一定金额时候,优惠率最大,呼吁学生理性消费。在数学建模活动课中,教师要科学地分析教学内容,引导学生找出数学建模“切入点”确定建模的类型,优化学生的思维结构。教师还可引导学生从问题命制者的角度看问题,理解出题的意图,使其建构层级分明、可辨析、可检测的思维分析模型,以现有知识储备为基础,合理组织,准确表达,实现思维结构的优化,培养学生的高阶思维。

(二)建议

高阶思维的培养不是一蹴而就的,数学建模活动课只是

一个载体。在数学建模课设计中融入高阶思维是必要的,对于该类课型的设计,笔者提出以下建议。

创设真实情境,注重高阶思维的生成。数学建模活动课的主体是学生,教师必须教给学生思维方法,培养学生的思维能力。教师创设的“真实情境”就是打破教材内容,在实际生活中寻找数学实际问题,引起学生求知欲,从而唤起“注意”。学生从感性知识中提出疑问,发现疑问,激起学生对问题的思考。

小组合作探究,注重高阶思维的发展。数学建模活动课更是留给学生空白。教师在设计数学建模活动课时,要划分小组,以小组为单位探讨数学问题。要让学生自主发现问题并分析问题。数学建模活动课比较灵活,问题也比较综合,小组合作不仅可以提出不同的问题及看法,还可以弥补个人的不足。通过小组成员对数学模型的检验和评价,让每个学生在问题中成长。

数学模型改编,注重高阶思维的拓展。教师在数学建模活动课,应有层次地对数学问题进行改编,层层递进。通过变式来转变学生的思维,加深学生对数学知识的理解和掌握,进一步提高综合思维能力。

巧用信息技术,注重高阶思维的迁移。数学模型的检验离不开信息技术,使用信息技术不仅可以直观地显示数学模型,还能促进某些规律的行成,使学生的思维得到充分的挖掘。数学类信息技术软件为培养创造性思维提供了条件,教师可以指导学生亲自动手去操作,无形之中培养学生的创造能力,进而促进高阶思维的迁移^[11]。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 钟志贤.教学设计的宗旨:促进学习者高阶能力发展[J].电化教育研究,2004(11):13.
- [3] 葛波.指向核心素养的数学高阶思维培养路径探析[J].学苑教育,2021(13):55.
- [4] 苏学峰.发展“高阶思维”:核心素养导向下的数学学习[J].数学教学通讯,2020(13):39.
- [5] 吴立宝,刘颖超,曹雅楠.基于问题链的初中数学课堂高阶思维培养路径研究[J].天津市教科院学报,2022(1):21.
- [6] 李建华,胡军.基于数学高阶思维培养的中考数学专题复习课架构——以“相似三角形”专题复习课为例[J].数学通报,2022(6):42.
- [7] 胡军,栗小妮,李建华.数学高阶思维培养中的“学生提问”策略[J].数学通报,2021(9):37.
- [8] 李健,李海东.高中生高阶思维能力的培养——基于数学教科书使用的视角[J].基础教育课程,2022(17):36.
- [9] 殷艳.引发高层次数学思维的课堂问题设计[J].上海中学数学,2016(2):57.
- [10] 黄健,徐斌艳,王思凯.教学转换理论视角下高中数学新编教材中数学建模的知识形态[J].全球教育展望,2022(3):33.
- [11] 赵进.GeoGebra 软件平台下高中数学建模活动的教学设计研究[D].宁夏大学,2022.

[责任编辑 张宏丽]